

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию РФ

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

Л.М. ПЕРЕРВА

В.В. ЮДИН

ФРАКТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Дальневосточным региональным Учебно-
методическим центром по направлению
«Физика»*

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2007

Рецензенты: В.А. Игнатюк, д-р физ.мат. наук,
профессор;
С.А. Щеголева, канд. физ.-мат. наук,
доцент

Перерва Л.М., Юдин В.В.

П 27 **ФРАКТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:** учебное пособие / под общ. ред. В.Н. Гряника. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2007. – 186 с.

ISBN 978-5-9736-0086-0

Изложены основы теории фракталов. В разделе 1 (главы с 1 по 4) изложены основы фрактальной теории, понятие фрактальной размерности, правила моделирования с помощью L-систем. Рассмотрены многочисленные примеры конструктивных фракталов (Коха, Минковского, Серпинского, Леви, Кантора и др.) Во разделе 2 (главы с 5 по 8) рассмотрены основные сведения из теории множеств, вопросы теории хаоса, определение размерности странных аттракторов, схема моделирования фракталов с помощью системы итерируемых функций (СИФ), а также вычислительные процедуры определения фрактальной размерности. Приложение содержит биографические сведения об ученых, чей труд во многом определил развитие фрактальной теории в мире.

Рекомендовано студентам, обучающимся по специальностям «Микроэлектроника», «Наноматериаловедение», «Наноэлектроника» и «Прикладная математика».

ББК 22.3

ISBN 978-5-9736-0086-0

© Издательство Владивостокский
государственный университет
экономики и сервиса, 2007

Данное учебное пособие относится к перспективным разделам современной физики и прикладной математики. Теория фракталов была рождена трудами Бенуа Мандельброта на рубеже 70–80-х годов. И с тех пор его фундаментальный труд «Фрактальная геометрия природы» оказывает существенное влияние на исследователей различных специальностей.

На протяжении последних нескольких лет на кафедре «Физические основы технологии информационных сред» (ФОТИС) физико-технического факультета ДВГУ ведется курс «Физика фракталов». Конечно, ни один курс в этом направлении не может обойтись без специального практикума по моделированию фрактальных объектов. Надо отметить, что это направление достаточно широко представлено в учебно-научной литературе во всем мире, и, в частности, в России. Однако при постановке таких курсов в развитых научных центрах всегда присутствует определенная специфика. И, в частности, в ДВГУ на кафедре ФОТИС, а также на кафедре электроники ВГУЭС сравнительно давно ведутся научные исследования в области мезоскопических распределенных систем. Такая направленность НИР не является типичной для мирового научного сообщества в области фрактальной физики.

Определенный итог наших ранних исследований был опубликован в работе: Информодинамика сетевых структур. Вероятность. Графы. Фракталы. – Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2003. Данное пособие было целиком посвящено развитию оригинальных авторских разработок по оценке фрактальной характеристики мезоструктуры разупорядоченных сред, полученных в неравновесных условиях.

В учебной практике по курсу и спецлаборатории по фрактальной физике, мы убедились в необходимости промежуточного, переходного спецпрактикума по моделированию фракталов.

Поэтому считаем, что данное пособие доцента канд. физ.-мат. наук Перерва Л.М. и заведующего кафедрой ФОТИС НОЦ нанофизики и наноэлектроники ДВГУ, профессора, д-ра физ.-мат. наук Юдина В.В. является своевременной и весьма уместной работой в мезоскопической фрактальной концепции твердых разупорядоченных неравновесных сред, каковыми являются спинингованные ленты, кварцевые и металлические стекла, квазикристаллы.

Работа выполнена при поддержке гранта от ВГУЭС.

Раздел 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФРАКТАЛОВ

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФРАКТАЛОВ

«**К**расота всегда относительна... Не следует... полагать, что берега океана и впрямь бесформенны только потому, что их форма отлична от правильной формы построенных нами причалов; форму гор нельзя считать неправильной на основании того, что они не являются правильными конусами или пирамидами; из того, что расстояния между звездами неодинаковы, еще не следует, что их разбросала по небу неумелая рука. Эти неправильности существуют только в нашем воображении, на самом же деле они таковыми не являются и никак не мешают истинным проявлениям жизни на Земле, ни в царстве растений и животных, ни среди людей» [29]. Эти слова английского ученого XVII в. Ричарда Бентли свидетельствуют о том, что идея объединить формы берегов, гор и небесных объектов и противопоставить их евклидовым построениям возникла в умах людей уже очень давно.

1.1. Фракталы и мир вокруг нас. Фракталы в природе

Во второй половине нашего века в естествознании произошли фундаментальные изменения, породившие так называемую теорию самоорганизации, или синергетику. Она родилась внезапно, как бы на скрещении нескольких линий научного исследования. Один из решающих начальных импульсов был придан ей российскими учеными на рубеже пятидесятих–шестидесятих годов. В пятидесятых годах ученый химик-аналитик Б.П. Белоусов открыл периодическую (колебательную) химическую реакцию. Открытие и изучение автоколебаний и автоволн в ходе реакции Б.П. Белоусова¹, С.Э. Шнолем, А.М. Жаботинским, В.И. Кринским, А.Н. Заикиным, Г.Р. Иваницким – едва ли не самая блестящая страница фундаментальной российской науки в послевоенный период. Быстрое и успешное изучение реакции Белоусова–Жаботинского сработало в науке как спусковой крючок: сразу вспомнили, что и раньше были известны процессы подобного рода и что многие природные явления, начиная от образования галактик до смерчей, циклонов и игры света на отражающих поверхностях (так называемых каустиках). Становление и развитие математического аппарата было приспособлено для обслуживания процессов, эволюция которых происходит достаточно спокойно. Однако позже выяснилось, что при удалении таких систем от состояния равновесия, при обмене их с окружающей средой энергией, веществом и информацией (открытые системы) положение кардинально меняется: мы переходим в мир, где господствует неустойчивость, малейшие флуктуации не гасятся, а, наоборот, начинают расти, образуя качественно новые структуры, в

¹ Борис Павлович Белоусов (19.02.1893–12.06.1970). Советский ученый-химик.

результате чего возможна перестройка даже всей системы и ее поведения целиком, т.е. сценарии эволюции становятся неоднозначными. В таких системах возможны эффекты согласования, когда, к примеру, частицы как бы устанавливают связь друг с другом на расстояниях, значительно превышающих, например, действие межмолекулярных взаимодействий. Основы данной теории заложили работы А. Пуанкаре и А.А. Ляпунова еще в конце XIX века. Диссертация «Об устойчивости движения» написана Ляпуновым в 1892 году.

Такое кооперативное согласованное поведение можно встретить в системах, образованных из самых, казалось бы, разных элементов – молекул, клеток, нейронов, социальных групп и т.д. Это поразительное явление приводит к образованию высокоупорядоченных структур из зародышей, находящихся в хаотическом состоянии.

Исследование таких систем проводится в сравнительно молодой науке, получившей название *синергетика*. Этот термин произошел от греческого слова «синергетикос», что в вольном переводе значит «совместный», «согласованно действующий», «совместное кооперативное действие», или, по-русски, «сотрудничество». Синергетика – новое научное направление, оформившееся примерно 20 лет назад. Это направление носит интегрирующий характер, объединяя общими законами разные области наук: физику, химию, биологию, психологию, социальные науки, астрономию, философию и т.д.

Синергетику можно охарактеризовать по-разному, а именно:

- синергетика – наука о самоорганизации физических, биологических и социальных систем; наука о коллективном, когерентном поведении систем различной природы;
- синергетика – термодинамика открытых систем вдали от равновесия;
- синергетика – наука о неустойчивых состояниях, предшествующих катастрофе, и их дальнейшем развитии (теория катастроф);
- синергетика – наука об универсальных законах эволюции в природе и обществе.

«Классическое однозначно-детерминистическое мировоззрение может символизироваться ровной гладкой поверхностью, на которой соударяются шары, получившие определенный импульс количества движения. Будущая судьба каждого такого тела однозначно определена его «прошлым» в предыдущий момент времени (количеством движения, зарядом) и взаимодействием с другими телами. Никакой целостностью такая система не обладает.» (Л. Белоусов. Посланники живой грозы // Знание – сила. 1996. № 2. С. 32). Таким образом, классическая наука верила, что будущее такой системы жестко и однозначно определено ее прошлым и, при условии знания прошлого, неограниченно предсказуемо.

Современная математика показала, что в некоторых случаях это не так: например, если шары ударяются о выпуклую стенку, то ничтожно малые различия в их траекториях будут неограниченно нарастать, так что поведение системы становится в определенный момент непредсказуемым. Тем самым позиции однозначного детерминизма оказались подорванными даже в сравнительно простых ситуациях.

Мировоззрение, основанное на теории самоорганизации, символизируется образом горной страны с долинами, по которым текут реки, и хребтами

водоразделами. В этой стране действуют мощные обратные связи – как отрицательные, так и положительные. Если тело скатывается вниз по склону, то между его скоростью и положением существует положительная обратная связь, если оно пытается взобраться вверх, то отрицательная. Нелинейные (достаточно сильные) обратные связи – неременное условие самоорганизации. Нелинейность в мировоззренческом смысле означает многовариантность путей эволюции, наличие выбора из альтернативных путей и определенного темпа эволюции, а также необратимость эволюционных процессов. Например, рассмотрим взаимодействие двух тел: А и В. В – упругий древесный ствол, А – горный поток в нашей стране. Поток сгибает ствол по направлению движения воды, но по достижении некоторого изгиба ствол под действием упругой силы может распрямиться, отталкивая частицы воды обратно. То есть мы видим альтернативу взаимодействия двух тел А и В. Причем это взаимодействие происходит таким образом, что связь А-В – положительна, а В-А – отрицательна. Соблюдается условие нелинейности.

Более того, в теории самоорганизации мы можем заставить нашу горную страну «жить», то есть изменяться во времени. При этом важно выделить переменные различного порядка. Такая иерархия переменных по времени является необходимым условием упорядочения самоорганизации. Нарушите ее, «смешайте» времена – наступит хаос (пример – землетрясение, когда сдвиги геологического порядка происходят за считанные минуты, а должны – за несколько тысячелетий). Впрочем, как выявляется, живые системы не так уж и боятся хаоса: они все время живут на его пределе, иногда даже впадая в него, но все же умеют, когда надо, из него выбираться. При этом самыми важными оказываются наиболее медленные по времени переменные (их называют параметрами). Именно значения параметров определяют, каким набором устойчивых решений будет обладать система и, таким образом, какие структуры могут быть в ней вообще реализованы. В то же время более быстрые (динамические) переменные отвечают за конкретный выбор реализуемых устойчивых состояний из числа возможных.

Принципы нелинейности и альтернативы выбора развития любого процесса, развития системы реализуются и при построении фракталов.

Как стало ясно в последние десятилетия (в связи с развитием теории самоорганизации), самоподобие встречается в самых разных предметах и явлениях. Например, самоподобие можно наблюдать в ветках деревьев и кустарников, при делении оплодотворенной зиготы, в снежинках, кристаллах льда, при развитии экономических систем (волны Кондратьева), строении горных систем, в строении облаков. Все перечисленные объекты и другие, подобные им по своей структуре, называются фрактальными. То есть они обладают свойствами самоподобия, или масштабной инвариантности. А это значит, что некоторые фрагменты их структуры строго повторяются через определенные пространственные промежутки. Очевидно, что эти объекты могут иметь любую природу, причем их вид и форма остаются неизменными независимо от масштаба.

Таким образом, можно сказать, что фракталы как модели применяются в том случае, когда реальный объект нельзя представить в виде классических моделей. А это значит, что мы имеем дело с нелинейными связями и недетерминированной природой данных. Нелинейность в мировоззренческом смысле означа-

ет многовариантность путей развития, наличие выбора из альтернатив путей и определенного темпа эволюции, а также необратимость эволюционных процессов. Нелинейность в математическом смысле означает определенный вид математических уравнений (нелинейные дифференциальные уравнения), содержащих искомые величины в степенях, больше единицы или коэффициенты, зависящие от свойств среды. То есть, когда мы применяем классические модели (например, трендовые, регрессионные и т.д.), мы говорим, что будущее объекта однозначно детерминированное. И мы можем предсказать его, зная прошлое объекта (исходные данные для моделирования). А фракталы применяются в том случае, когда объект имеет несколько вариантов развития и состояние системы определяется положением, в котором она находится на данный момент. То есть мы пытаемся смоделировать хаотичное развитие.

До недавнего времени геометрические модели природных объектов строились на основе сравнительно простых фигур: прямых, прямоугольников, окружностей, сфер, многогранников. Однако этот набор, как не сложно заметить, трудно применим для описания сложных объектов, таких как турбулентный поток жидкости, пористые материалы, форма облаков, кровеносно-сосудистая система (рис. 1.1), крона дерева и т.д.



Рис. 1.1. Кровеносная система человека

В человеческом организме множество фракталоподобных образований – в структуре кровеносных сосудов и различных протоков (рис. 1.2), а также в нервной системе. Наиболее тщательно изучена фрактальная структура дыхательных путей (рис. 1.4), по которым воздух поступает в легкие. В 1962 году Э. Уэйбел, Д. Гомес, а позже О. Раабе и его коллеги измерили длину и диаметр трубок в этой нерегулярной системе.

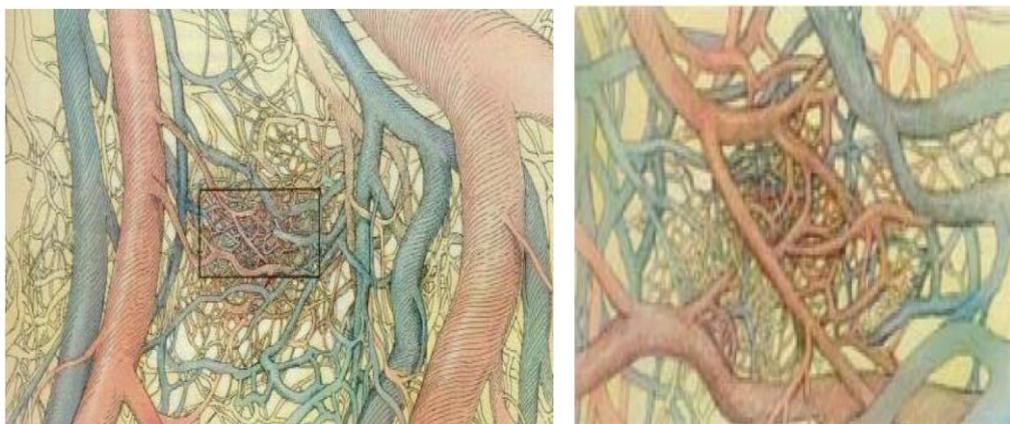


Рис. 1.2. Фракталоподобная структура сердечных артерий и вен

Многие другие системы органов также представляются фрактальными, хотя их размерности еще не были количественно оценены. Фракталоподобные структуры играют важную роль в нормальной механической и электрической динамике сердца.

Хотя фрактальные анатомические структуры выполняют неодинаковые функции в различных органах, у них все же заметны некоторые общие анатомические и физиологические свойства. Фрактальные ответвления или складки значительно увеличивают площадь поверхности, необходимой для всасывания (в тонком кишечнике), распределения или сбора различных веществ (в кровеносных сосудах, желчных протоках и бронхиолах) и обработки информации (в нервной системе). Фрактальные структуры, отчасти благодаря своей избыточности и нерегулярности, являются робастными системами и хорошо противостоят повреждениям.

Давайте понаблюдаем под микроскопом проявление броуновского движения на примере малой частицы, взвешенной в толще жидкости (рис. 1.3). Мы видим, что направление прямой, соединяющей точки, соответствующие двум очень близким во времени положениям частицы, изменяется по мере уменьшения временного промежутка между двумя измерениями совершенно беспорядочно. Беспристрастный наблюдатель заключит из этого, что он имеет дело с функцией, не имеющей производной, а вовсе не с кривой, к которой в любой ее точке можно провести касательную.

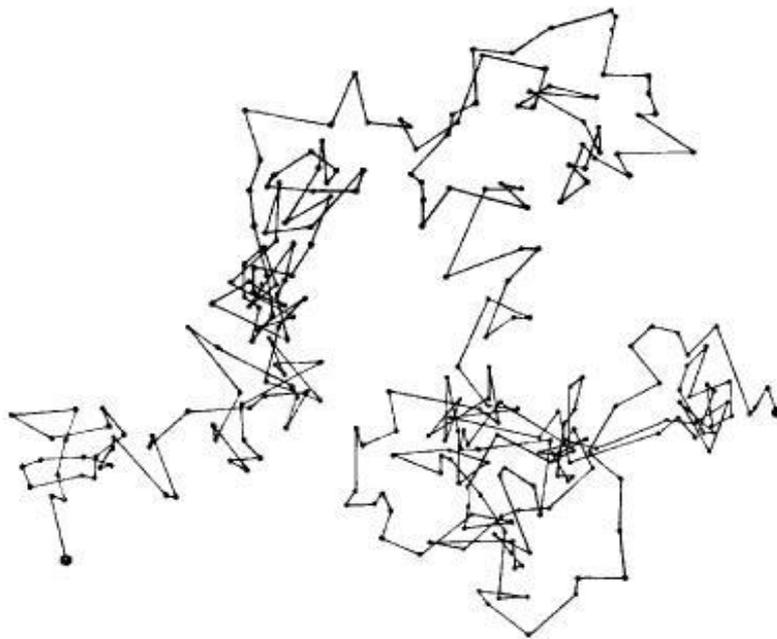


Рис. 1.3. Фрагмент броуновского движения

Хотя близкое рассмотрение любого объекта ведет в общем случае к обнаружению его в высшей степени неправильной структуры, не следует забывать и о том, что можно весьма достоверно оценить его свойства с помощью непрерывных функций. Древесина бесконечно пориста, однако нам удобнее считать, что поверхность отпиленного и обструганного деревянного бруска имеет конечную площадь. Иными словами, в определенном масштабе и при определенных методах исследования можно полагать, что многие феномены представимы в виде правильных непрерывных функций: так, оборачивая кусок губки фольгой, вовсе не обязательно точно следовать всем изгибам сложной поверхности губки.

Рисунок дает лишь слабое представление об изумительной запутанности реальной траектории. Если бы положения частицы регистрировались в 100 раз чаще, то вместо каждого отрезка прямой мы получили бы ломаную, столь же сложную, как и исходный рисунок, хотя и меньших размеров – и так далее. Нетрудно убедиться, что на практике понятие касательной в применении к таким кривым является полной бессмыслицей.

Кроме того, след, оставляемый броуновской частицей, в конце концов, почти заполняет всю плоскость. При этом напрашивается вывод, что в каком-то смысле размерность этой необычной кривой должна совпадать с размерностью плоскости. Самое интересное – так оно и есть. *Топологический* след движения броуновской частицы является кривой (размерность 1). Однако так как он способен заполнить практически всю плоскость, то во *фрактальном* смысле его размерность равна 2. Расхождение между этими двумя величинами дает броуновскому движению право называться фракталом.



Рис. 1.4. Снимок легких человека

Можно рассмотреть различные примеры фракталов, это и природные, созданные без участия человека (рис. 1.1–1.4), а также искусственные, т.е. созданные человеком (рис. 1.5–1.6).

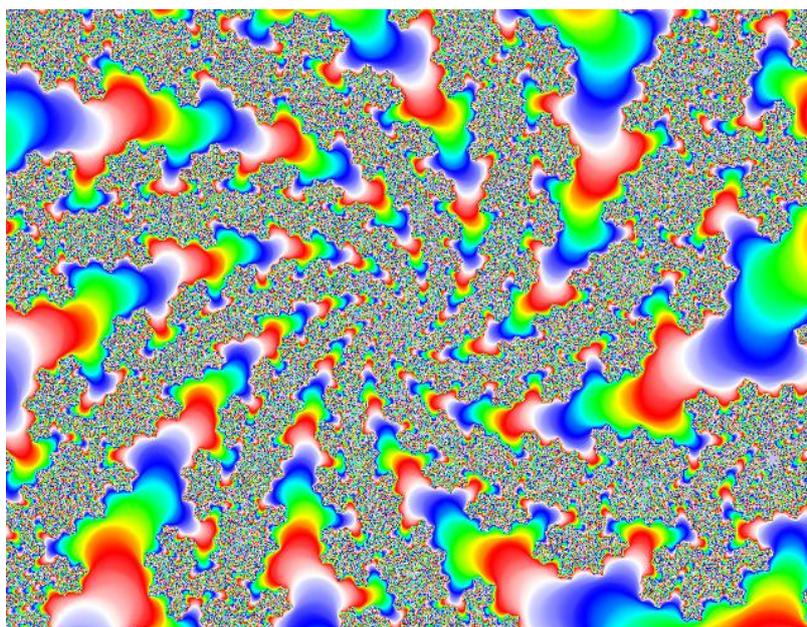


Рис. 1.5а. Множество Мандельброта, увеличенное в 100 раз

Одним из алгоритмов создания фрактальных объектов на плоскости является использование комплексных отображений, сопоставляющих одному комплексному числу $z_n = x_n + iy_n$ другое комплексное число $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ по итерационному правилу $z_{n+1} = f(z_n)$, где $f(z)$ – некоторая нелинейная функция, z , n – номер итерации. Из наиболее известных примеров такого рода можно привести простейшее квадратичное отображение $z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c$, где c – некоторая комплексная константа.

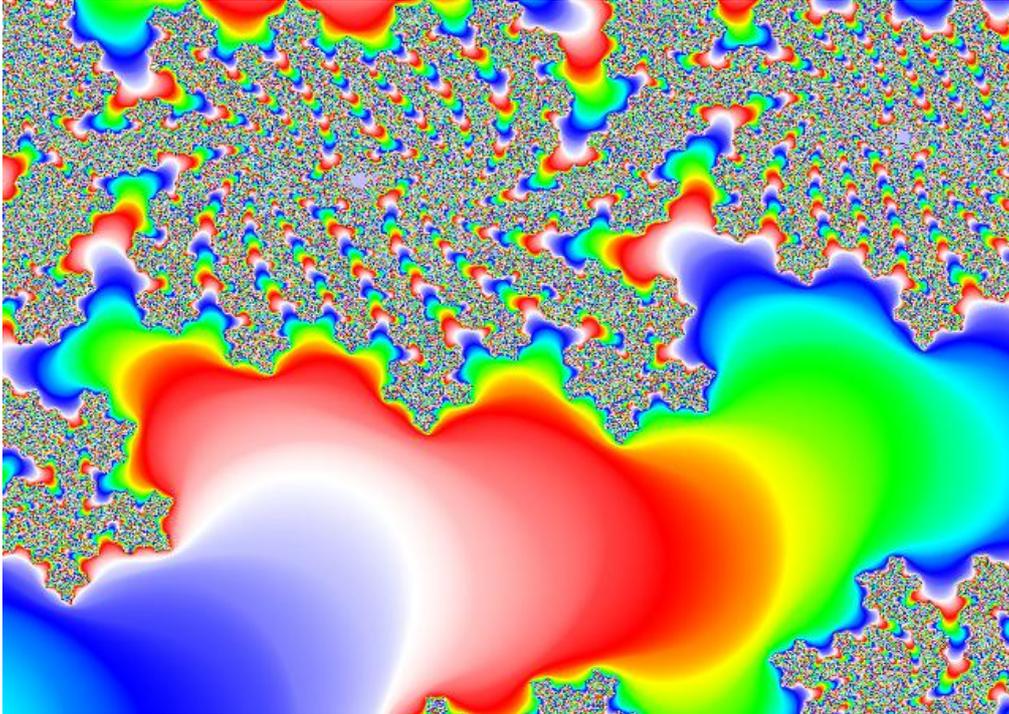


Рис. 1.56. Множество Мандельброта, увеличенное в 300 раз

В общем случае множество всех точек \tilde{n} , для которых итерации $z_{n+1} = z_n^2 + c$ $z_0 = 0$ остаются ограниченными при $n \rightarrow \infty$, называется *множеством Мандельброта*.

Неподвижной точкой \tilde{z} отображения $z_{n+1} = f(z_n)$ будем называть корень уравнения $f(z) = z$ (его также называют неподвижной точкой функции $f(z)$). Если, стартовав в непосредственной близости от неподвижной точки, мы будем в процессе итераций к ней неограниченно приближаться, то такая неподвижная точка называется притягивающей. В математике границы областей притяжения называют *множествами Жюлиа*.

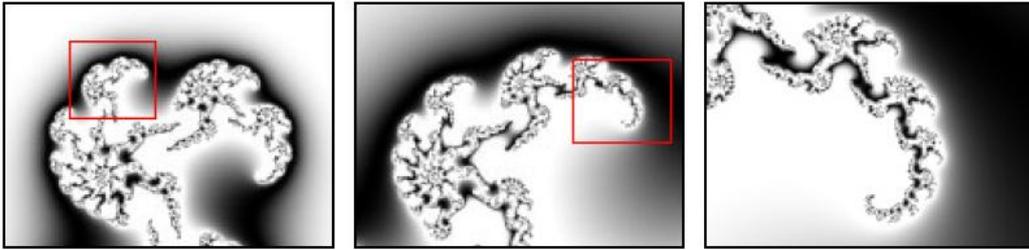


Рис. 1.6. Множество Жюлиа, построенное с увеличением выделенного фрагмента

Во время первой мировой войны французские математики Гастон Жюлиа и Пьер Фату изучали их свойства для более общего случая рациональных отображений в комплексной плоскости. Но их увлекательная деятельность оставалась неизвестной большинству математиков, поскольку в отсутствие современных средств компьютерной графики было практически невозможно передать все их идеи.

До недавнего времени геометрические модели природных объектов строились на основе сравнительно простых фигур: прямых, прямоугольников, окружностей, сфер, многогранников. Однако этот набор, как не сложно заметить, трудно применим для описания сложных объектов, таких как турбулентный поток жидкости, пористые материалы, форма облаков, кровеносно-сосудистая система, крона дерева и т.д.

Поэтому необходимы были новые геометрические понятия и методы для описания этих объектов. Одним из таких понятий и явилось понятие фрактала. Это понятие было введено Б. Мандельбротом в 1975 году.

Стоит отметить, что конструкции, подобные фрактальным, в той или иной форме появлялись много лет назад, но вся ценность понятия фрактала была осознана только недавно (в 70-х годах XX века). Важную роль в распространении этих идей сыграла книга Мандельброта «Фрактальная геометрия природы».

Отметим, что понятие фрактала относится к некоторой статичной геометрической конфигурации, а для описания динамических явлений используется понятие хаоса.

Основной идеей новой геометрии является идея самоподобия, то есть фрактальные структуры при различном увеличении не претерпевают в среднем значительных изменений. Например, у дерева есть ветви. На этих ветвях есть ветви поменьше и т.д. То же самое можно заметить, рассматривая горный рельеф, кровеносную систему человека и др. В отличие от евклидовой геометрии, которая рассматривает гладкие объекты, фрактальная геометрия рассматривает нерегулярные, сильно изломанные, изрезанные объекты. Для фрактальных кривых не существует понятия касательной, т.к. эти кривые в общем случае недифференцируемые.

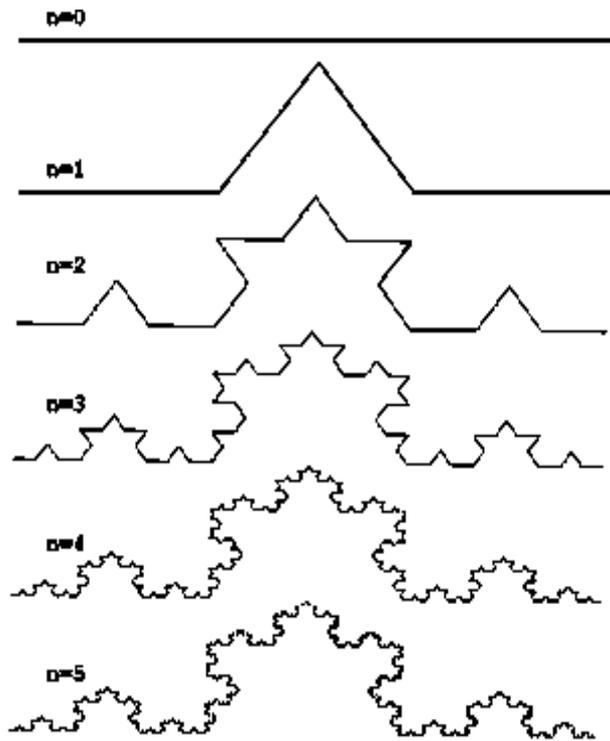


Рис. 1.7. Построение кривой Коха

1.2. Классификация фракталов. Геометрические фракталы

Видно, что множество Мандельброта (рис. 1.5), множество Жюлиа (рис. 1.6) и кривая Коха (рис. 1.7) – разные типы фракталов. У них есть общее – рекурсивная процедура при генерации, но есть и отличия. Поэтому для их изучения следует разделить их на определенные классы. Одной из общепринятых классификаций является классификация фракталов на геометрические, алгебраические и стохастические.



Теперь подробнее остановимся на каждом пункте.

Геометрические фракталы

Именно с них началась история фракталов. Это и есть те функции-монстры, которых так называли за недифференцируемость в каждой точке. Геометрические фракталы являются также самыми наглядными, т.к. сразу видна самопо-

добность. Вообще все геометрические фракталы обладают т.н. жесткой самоподобностью, не изменяющейся при изменении масштаба. Для построения геометрических фракталов характерно задание «основы» и «фрагмента», повторяющегося при каждом уменьшении масштаба. Поэтому эти фракталы иногда называют конструктивными или автомодельными.

Примерами таких фракталов являются треугольник Серпинского, снежинка Коха, кривая Леви и многие др.

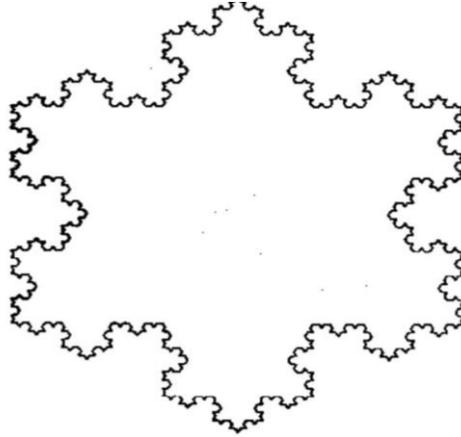


Рис. 1.8. Снежинка Коха

В графике геометрические фракталы применяются для получения изображений деревьев, кустов, береговых линий и т.д.

Конструктивные фракталы строятся с помощью рекурсивных процедур, систем итерированных функций, L-систем и др.

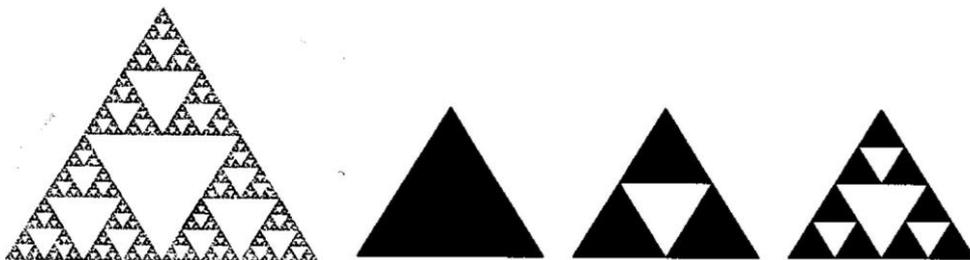


Рис. 1.9. Ковер Серпинского и этапы его построения

Алгебраические фракталы

Вторая большая группа фракталов – алгебраические. Своё название они получили за то, что их строят, используя простые алгебраические формулы. Получают их с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах.

Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. Общеизвестно, что равновесие может быть трех типов: устойчивое, неустойчивое и безразличное. Аналогично неподвижная точка

отображения тоже может быть трех типов: притягивающей, отталкивающей и нейтральной.

То состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от ее начального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние обладает некоторой областью начальных состояний, из которых система обязательно попадет в рассматриваемые конечные состояния. *Аттрактором* на комплексной плоскости мы будем называть точку (или точки), к которой сходится процесс итераций. В качестве такого аттрактора может выступать неподвижная притягивающая точка или притягивающий цикл. Иногда таких аттракторов может быть несколько, они также могут состоять из бесчисленного множества точек и представлять собой непрерывную линию или какое-нибудь другое множество.

Таким образом, фазовое пространство системы разбивается на области притяжения аттракторов. Если фазовым является двухмерное пространство, то, окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно получить сложные фрактальные картины с причудливыми многоцветными узорами. Неожиданностью для математиков стала возможность с помощью примитивных алгоритмов порождать очень сложные нетривиальные структуры. Самыми известными из них являются множества Мандельброта и Жюлиа, Бассейны Ньютона и т.д.

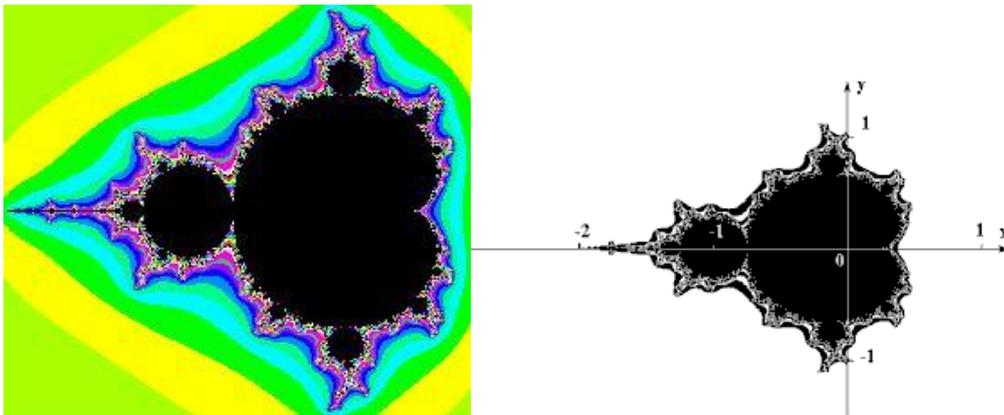


Рис. 1.10. Множество Мандельброта

В качестве примера рассмотрим множество Мандельброта (рис. 1.10). Алгоритм его построения достаточно прост и основан на простом итеративном выражении:

$$Z_{[n+1]} = Z_{[n]}^2 + C, \quad (1.1)$$

где $Z_{[n]}$ и C – комплексные переменные. Итерации выполняются для каждой стартовой точки C прямоугольной или квадратной области – подмножестве комплексной плоскости. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока $Z_{[n]}$ не выйдет за пределы окружности радиуса 2, центр которой лежит в точке

(0,0) (это означает, что аттрактор динамической системы находится в бесконечности) или после достаточно большого числа итераций (например, 200–500) Z_n сойдется к какой-нибудь точке окружности. В зависимости от количества итераций, в течение которых Z_n оставалась внутри окружности, можно установить цвет точки C (если Z_n остается внутри окружности в течение достаточно большого количества итераций, итерационный процесс прекращается и эта точка растра окрашивается в черный цвет).

Вышеописанный алгоритм дает приближение к так называемому множеству Мандельброта. Множеству Мандельброта принадлежат точки, которые в течение бесконечного числа итераций не уходят в бесконечность. Точки, принадлежащие границе множества (именно там возникают сложные структуры) уходят в бесконечность за конечное число итераций, а точки, лежащие за пределами множества, уходят в бесконечность через несколько итераций.

Стохастические фракталы

Кривая Коха, как бы ни была похожа на границу берега, не может выступать в качестве ее модели из-за того, что она всюду одинакова, самоподобна, а в действительности это не так. Все природные объекты создаются по капризу природы, и есть случайность в этом процессе.

Фракталы, при построении которых в итеративной системе случайным образом изменяются какие-либо параметры, называются стохастическими. Термин «стохастичность» происходит от греческого слова, обозначающего «предположение».

Также примером случайности в природе является броуновское движение. С помощью компьютера такие процессы строить достаточно просто, т.к. он позволяет генерировать последовательности случайных чисел. Эти фракталы используются при моделировании рельефов местности и поверхности морей, процесса электролиза.

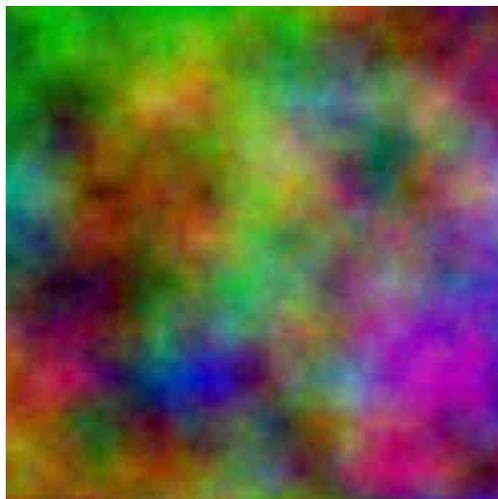


Рис. 1.11. Плазма

Существует еще одна интересная классификация. Фракталы в этом случае классифицируются на два класса: рукотворные и природные. К рукотворным относятся те фракталы, которые были придуманы учеными, и они при любом масштабе обладают фрактальными свойствами. В действительности это не так, т.к. у дерева не бесконечное число ветвей, и берег имеет не бесконечную длину. Поэтому на природные фракталы накладывается ограничение на область существования. Вводятся максимальный и минимальный размеры, при которых у объекта наблюдаются фрактальные свойства.



Существуют и другие классификации, например, разделение на детерминированные и недетерминированные фракталы.

1.3. Самоподобие. Скейлинг

Важным свойством фракталов является их самоподобие. Это буквально означает, что структура фрактала в одном масштабе подобна его структуре в другом, большем масштабе. Иными словами, увеличив в какое-то число раз любой элемент фрактальной структуры, мы получим элемент структуры того же фрактала. Это свойство очевидно для точных фракталов, с которыми мы познакомились выше. Для случайных фракталов типа траектории броуновского движения, береговой линии или фрактальных кластеров самоподобие нужно понимать статистически: увеличение случайного элемента фрактальной структуры дает случайный элемент структуры того же фрактала (рис. 1.3).

Самоподобие означает, что в структуре фрактала отсутствуют какие-либо характерные размеры, с которыми можно сравнить размеры ее элементов. При отсутствии характерных размеров система должна обладать одинаковыми свойствами во всех масштабах, так как ни одна область масштабов не выделена по сравнению с другими. Поэтому часто самоподобие называют масштабной инвариантностью.

Самоподобие означает, что любая количественная характеристика фрактала Q при изменении размера L в какое-то число раз меняется независимо от величины L . Математически соотношение, выражающее это свойство, можно представить в виде

$$Q(\eta L) = \eta^{D_0} Q(L). \quad (1.2)$$

Рассматривая это как функциональное уравнение для функции $Q(L)$, мы получаем

$$Q(L) \propto L^{D_Q}, \quad (1.3)$$

т.е. степенную зависимость. Размерность D_Q зависит, разумеется, от того, о какой характеристике фрактала Q мы говорим. Так, если Q означает массу фрактала M с линейным размером L , то D_M совпадает с хаусдорфовой размерностью D , которую иногда по этой причине называют массовой размерностью. Мы использовали уже это определение фрактальной размерности, когда говорили о распределении скоплений галактик во Вселенной. Таким образом, самоподобие фракталов приводит к тому, что их свойства описываются степенными законами.

Здесь необходимо одно пояснение. Исходно под фрактальной размерностью мы понимали показатель степени D в соотношении $N \propto l^{-D}$, где N – минимальное число элементов с характерным размером l , необходимых для покрытия данного фрактального множества (или его части). Но число N – безразмерная величина, поэтому оно должно выражаться в виде безразмерного отношения

$$N \propto \left(\frac{R}{l}\right)^D, \quad (1.4)$$

где R – характерный размер этого множества. Это происходит как раз по той причине, что у фрактала нет своего выделенного масштаба длины, кроме своего собственного размера. Поэтому фрактальная размерность D , с одной стороны, показывает, как с уменьшением масштаба l растет число элементов, необходимых для покрытия данного фрактального множества. С другой стороны, этот же показатель степени показывает, как это же число растет с увеличением размеров самого фрактала.

В отличие от теоретических фракталов, с которыми работают математики и физики, реальные фракталы, наблюдаемые в природе, могут существовать лишь в ограниченной области размеров, поскольку элементы их структуры не могут быть как бесконечно малыми, так и бесконечно большими. В примере с береговой линией речь идет о размерах l , значительно меньших размеров самого материка или острова. В то же время эти размеры должны быть во много раз больше песчинок и камешков, составляющих линию побережья. В общем случае можно ожидать, что фрактальная структура реализуется в некоторой промежуточной области масштабов $l_{\min} \ll l \ll l_{\max}$, хотя практически эта область может быть очень большой.

Термин фрактал был введен математиком Бенуа Мандельбротом, который определил фрактал как множество, хаусдорфова размерность которого строго больше топологической размерности. Само слово фрактал происходит от латинских слов *fractus* – дробный и *frangere* – ломать, что отражает суть фрактала, как «изломанного», нерегулярного множества [В.В. Mandelbrot, *The Fractal*

Geometry of Nature, San Francisco: Freeman. 1982, p. 4]. Под фракталами понимают множества, демонстрирующие на разных масштабах разрешения своей геометрической структуры свойства подобия в строгом или приближенном смысле, а также объекты в природе, обладающие этим свойством, хотя бы приближенно, в достаточно широком интервале масштабов.

Самоподобие, инвариантность относительно изменения масштаба, или скейлинга; иначе говоря, не инвариантность при аддитивных сдвигах, а инвариантность при мультипликативных изменениях масштаба. Кратко можно сказать, что самоподобный объект «выглядит» неизменным и после увеличения, и после уменьшения его размеров. Так, в турбулентных потоках крупные вихри порождают меньшие, те, в свою очередь, еще меньшие. Многие законы природы не зависят (или почти не зависят) от масштаба. То, что скейлинг обычно имеет предел (постоянную Планка, когда объекты становятся слишком малыми, или скорость света, когда объекты движутся слишком быстро), не умаляет полезности «размышлений в терминах самоподобия». Так, отсутствие (за пределами чистой математики) строгой периодичности не создает сколько-нибудь серьезных препятствий для применения этого понятия в реальном мире. В некотором смысле самоподобие это тоже периодичность, только в логарифмической шкале.

Самоподобие строгое или приближенное царит во многих областях под самыми различными обличьями, и мы рассмотрим некоторые из многочисленных проявлений самоподобия в окружающем нас мире.

Повторяя некую операцию снова и снова (во все меньшем и меньшем масштабе), мы почти неизбежно приходим к самоподобной структуре. Повторяющаяся операция может быть алгебраической, символической или геометрической. Классическим примером такого повторяющегося построения может служить кривая фон Коха, предложенная в 1940 г. шведским математиком Хельге фон Кохом¹. Возьмем отрезок прямой (инициатор, рис. 1.7) и на его средней трети построим равносторонний треугольник. Результат этого построения называется генератором. Заметим, что длина генератора составляет четыре третьих от длины инициатора.

Повторяя еще раз построение равносторонних треугольников на средних третях прямолинейных отрезков, мы получаем ломаную, изображенную на рис. 1.7, длина ломаной теперь составляет $(4/3)$. Повторяя процесс бесконечно много раз, мы приходим к «кривой» бесконечной длины, которая (хотя и всюду непрерывна) нигде не дифференцируема.

Такого рода «ущербные функции», которые непрерывны, хотя ни в одной точке к ним невозможно провести касательную, были впервые построены в позапрошлом веке немецким математиком Карлом Вейерштрассом лишь для того, чтобы показать своим скептически настроенным коллегам (в том числе ужаснувшемуся Эрмиту), что такие функции действительно существуют. Однако другие авторитеты (и среди них не в последнюю очередь великий австрийский физик Людвиг Больцман) увидели забрезживший новый свет; в 1898 г. Больцман писал в письме к Феликсу Клейну, что недифференцируемые функции могли бы

¹ Нильс Фабиан Хельге фон Кох (25.01.1870–11.03.1924). Шведский математик, специалист преимущественно по теории чисел.

быть изобретены физиками, поскольку в статистической механике имеются проблемы, для решения которых «недифференцируемые функции абсолютно необходимы». Французский коллега Больцмана Жан Перрен пошел еще дальше. В 1906 г. он, предвосхищая современное отношение к такого рода математическим монстрам, заявил, что «кривые, не имеющие касательных, являются общим правилом, а гладкие кривые, такие, как окружность, интересным, но весьма частным случаем». Теперь, следуя Мандельброту, мы называем такие недифференцируемые кривые просто *фракталами*.

Для гладкой кривой ее приближенная длина $L \frown$ определяется как произведение числа N прямолинейных отрезков, уместяющихся на кривой, на длину такого отрезка r : $L \frown \approx N \cdot r$. Когда длина шага r стремится к нулю, величина $L \frown$ стремится к своему пределу – длине L рассматриваемой кривой.

Иначе обстоит дело в случае фракталов! Произведение $N \cdot r$ обращается в бесконечность, потому что, когда r стремится к нулю, мы учитываем все более мелкие извивы фрактала. Однако асимптотически это стремление к бесконечности происходит по некоторому четко определенному однородному степенному закону от r . Иначе говоря, существует некоторый критический показатель $D_H > 1$, такой, что произведение $N \cdot r^{D_H}$ остается конечным. При показателях меньших, чем D_H , произведение расходится, т. е. обращается в бесконечность, а при показателях больших, чем D_H , стремится к нулю. Этот критический показатель D_H называют размерностью Хаусдорфа¹. Справедливо следующее соотношение:

$$D_H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln \frown r} \quad (1.5)$$

(это определение размерности Хаусдорфа эквивалентно приведенному выше). Если при построении кривой или снежинки фон Коха n -го поколения (n -й итерации) шаг выбран равным $r = r_0/3^n$, то число шагов N пропорционально 4^n . Таким образом,

$$D_H = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26... \quad (1.6)$$

То, что D_H лежит между 1 и 2, довольно понятно: бесконечно длинная кривая в некотором метрическом смысле представляет собой нечто большее, чем просто одномерный объект, но в то же время «не дотягивает» до двумерной фигуры, так как такая кривая не покрывает никакой области на плоскости. И действительно, как мы вскоре увидим, предложенное Хаусдорфом определение размерности, которая, как нам уже известно, может принимать дробные значения, во многих отношениях вполне разумно. Разумеется, для гладкой кривой $D_H = 1$, а для гладкой поверхности число N покрывающих дисков пропорцио-

¹ Феликс Хаусдорф (1868–1942). Немецкий математик.

нально $1/r^2$, вследствие чего $D_H = 2$ (здесь r диаметр N малых дисков, необходимых для того, чтобы покрыть фигуру). Аналогично, для компактного трехмерного тела размерность Хаусдорфа D_H равна 3.

Удивительно, однако, что при $D_H = 2$ мы отнюдь не обязательно получаем двумерную фигуру: вполне достаточно оказывается топологически одномерного объекта – линии. Хорошо известным примером может служить кривая броуновского движения (рис. 1.3).

При определении, является ли данная структура фрактальной, огромную роль играет принцип скейлинга – принцип масштабной инвариантности, масштабного подобия. Этот принцип считается основным по Мандельброту.

У нас есть пространство R_3 , $\vec{r} = (x, y, z)$. Преобразование подобия означает, что $\vec{r}' = \Lambda \vec{r}$.

В физике долгое время рассматривались только преобразования вращения $r' = \Lambda \vec{r}$.

При этом чаще всего рассматривались те преобразования, при которых какие-то величины остаются постоянными. При преобразовании вращения площадь фигуры остается постоянной, если $|\det \Lambda| = 1$, при этом $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Для двумерного пространства

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

Если рассчитать детерминант данного преобразования, то он равен единице. Таким образом, получаем, что вращение сохраняет инвариантной (постоянной) меру – площадь, объем, длину.

Следующими, после преобразований вращения, рассматривались преобразования сжатия (растяжения).

Сжатие (растяжение) связано с изменением масштаба. Перемасштабирование или центральное расширение характеризуется центром и показателем сжатия «с». Так, центральное расширение (сжатие) относительно начала координат выражается соотношениями

$$C: \begin{cases} x' = cx \\ y' = cy \end{cases}, \quad (1.7)$$

а центральное расширение (сжатие) относительно точки (x_0, y_0) – формулами

$$C: \begin{cases} x' = c(x - x_0) + x_0 \\ y' = c(y - y_0) + y_0 \end{cases}. \quad (1.8)$$

При $c > 1$ преобразование C определяет растяжение, а при $|c| < 1$ – сжатие. Для фракталов обычно имеем $|c| < 1$. При $c = -1$ говорят об отражении, оно соответствует повороту относительно точки (x_0, y_0) на 180° .

При этом если $\Lambda_x = \Lambda_y = \Lambda_z$ – это неаффинные преобразования, а если $\Lambda_x \neq \Lambda_y \neq \Lambda_z$ – аффинные преобразования.

Эта проблема рассматривалась в Эрлангенской программе, сформулированной впервые Феликсом Клейном на лекции, прочитанной в 1872 году в университете г. Эрланген (Германия). Программа была напечатана в этом же году под названием «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований». Сущность Эрлангенской программы состоит в следующем. Как известно, евклидова геометрия рассматривает те свойства фигур, которые не меняются при движениях; равные фигуры определяются как фигуры, которые можно перевести одна в другую движением. Но вместо движений можно выбрать какую-нибудь иную совокупность геометрических преобразований и объявить «равными» фигуры, получающиеся одна из другой с помощью преобразований этой совокупности. Выбирая по-разному группу преобразований, получим разные геометрии.

Проблеме теории инвариантов посвящены работы Эмми Нетер¹. Теорема Нетер устанавливает связь между свойствами симметрии физической системы и законами сохранения. Если свойства системы не меняются при каком-либо преобразовании переменных, то этому соответствует сохранение некоторой физической величины. Так, независимости свойств системы от выбора начала отсчета времени соответствует закон сохранения энергии.

Любые преобразования в физике проводятся на координатах, но ищутся законы сохранения (инвариантности) на этих координатах.

Задача физика по фракталам – найти инварианты при преобразованиях масштаба. При этом инвариантными могут не только величины, а отдельные структуры. В результате мы приходим к принципу матрешки.

Существует тип сложных систем иерархического типа, для которых применим принцип масштабной иерархичности. Всегда можно найти повторяющиеся структуры, элементы.

Фрактал по-прежнему может быть объединением непересекающихся подмножеств, полученных масштабированием оригинала, но коэффициенты подобия уже не обязательно одни и те же для всех подмножеств.

Термин *фрактал* был впервые введен в 1975 году Бенуа Мандельбротом, пионером в области фрактальной геометрии. Многие математические идеи оформились задолго до этого, еще в XIX-м веке, в работах Георга Кантора, Карла Вейерштрасса, Джузеппе Пеано и других. Понятие фрактальной (дробной) размерности появилось в 1919 году в работе Феликса Хаусдорфа. Тем не менее, именно Мандельброт объединил эти идеи и положил начало систематическому изучению фракталов и их приложений.

При этом следует иметь в виду, что понятие фрактала еще находится в развитии и разные источники могут использовать различные определения. Заметим здесь, что некоторые множества целой размерности также являются фракталами, как следует из нашего определения.

¹ Эмми Нетер (23.03.1882–14.04.1935). Немецкий математик.

Глава 2.

**ФРАКТАЛЬНАЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ
РАЗМЕРНОСТИ**

Сравнительно давно в математике возник образ объекта, более объемистого, но тем не менее сходного с линией. Некоторым ученым было трудно примириться с понятием линии, не имеющие ширины, поэтому постепенно ими стали изучаться геометрические формы и структуры, имеющие дробную пространственную размерность. На смену непрерывным кривым, обладающим всеми производными, пришли ломаные или очень изрезанные кривые.

В математике существует несколько различных определений размерности, наиболее известна топологическая размерность. Идея определения размерности была высказана еще А. Пуанкаре. Точка, линия и поверхность имеют, соответственно, топологические размерности 0, 1 и 2. Более точное определение топологической размерности ввел нидерландский математик Брауэр. Другие математики (Хаусдорф, Безикович, Колмогоров) определили размерность по-другому. Их определения необязательно дают целые размерности.

2.1. Связь размерности и коэффициентов подобия

Разделим отрезок прямой на N равных частей. Тогда каждую часть можно считать копией всего отрезка, уменьшенной в $1/r$ раз. Очевидно, N и r связаны соотношением $Nr = 1$.

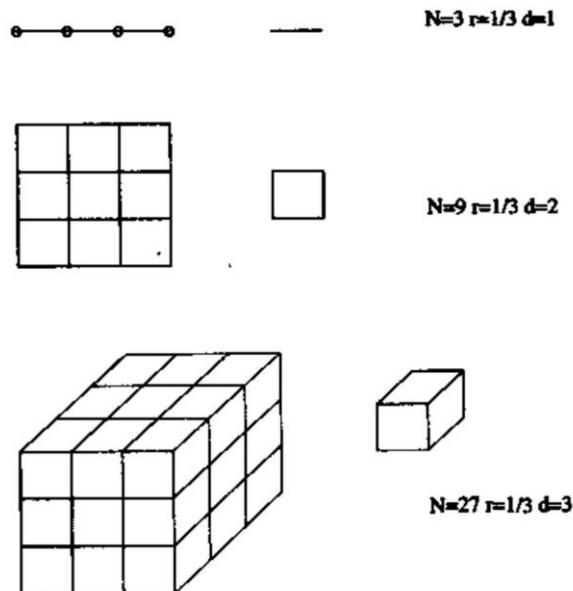


Рис. 2.1. Связь размерности и коэффициента подобия

Если квадрат разбить на N равных квадратов (с площадью, в $1/r^2$ раз меньше площади исходного), то соотношение запишется, как $Nr^2 = 1$ (рис. 2.1). Если куб разбить на N равных кубов (с объемом, в $1/r^3$ раз меньше объема исходного), то соотношение примет следующий вид: $Nr^3 = 1$. Заметим, что размерность d объекта, будь то одномерный отрезок, двумерный квадрат или трехмерный куб, появляется как степень r в соотношении между N , числом равных подобъектов, и коэффициентом подобия r . А именно:

$$Nr^d = 1. \quad (2.1)$$

Множества, построенные на рис. 2.1, обладают целой размерностью. Зададимся вопросом, возможно ли такое построение, при котором показатель d в равенстве не является целым, то есть такое, что при разбиении исходного множества на N непересекающихся подмножеств, полученных масштабированием оригинала с коэффициентом r , значение d не будет выражаться целым числом. Ответ, как мы убедимся – да! Такое множество называют *самоподобным фракталом*. Величину d называют *фрактальной (дробной) размерностью* или *размерностью подобия*. Явное выражение для d через N и r находится логарифмированием обеих частей:

$$d = \frac{\log N}{\log 1/r}. \quad (2.2)$$

Логарифм можно взять по любому положительному основанию, отличному от единицы, например по основанию 10 или по основанию $e \approx 2,7183$.

О РАЗМЕРНОСТЯХ

Обычное понятие размерности мы считаем интуитивно ясным и легко определяемым математически. Понятие размерности линейного пространства известно из элементарной геометрии и линейной алгебры. Размерность многообразия – это размерность евклидовых шаров (областей, окрестностей), из которых склеено многообразие и т.д. Однако в математике, механике, физике встречаются множества, для которых понятие размерности нуждается в специальном обсуждении и, более того, для них можно определить не одну, а несколько различных размерностей. Причем эти размерности могут между собой не совпадать. Интуитивно ясно, что речь идет о множествах, устроенных локально «существенно хуже», чем открытые области в евклидовом пространстве. Строго говоря, разные понятия размерности можно определить для произвольного топологического пространства. Но для «хороших» пространств, к которым относятся многообразия, все эти числа (размерности) совпадают. Однако, как только мы переходим к рассмотрению более сложных, экзотических (а иногда в некотором смысле «патологических») объектов, разные понятия размерности приводят нас, вообще говоря, к разным числам. Раньше считалось, что это происходит в основном для класса пространств, редко встречающихся на практике. Однако не-

давно выяснилось, что такие аномальные объекты встречаются сплошь и рядом в классических областях математики. Это суть фракталы.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ dim

Напомним, что система подмножеств \mathcal{U}_i топологического пространства X называется его покрытием, если каждая точка $x \in X$ принадлежит какому-то из множеств (хотя бы одному) U_i , т.е. $\forall x \in X \exists U_i \in \mathcal{U}_i : x \in U_i$. Будем рассматривать сейчас лишь конечные покрытия.

Кратностью покрытия \mathcal{U}_i называется наибольшее из таких чисел n ($n \in \mathbb{N}$ – целое неотрицательное число), что существует n элементов покрытия \mathcal{U}_i , имеющих непустое пересечение (т.е. всегда существует хотя бы (по крайней мере) одна точка, принадлежащая n различным элементам покрытия – всем этим U_j ($j = \overline{1, n}$) одновременно).

Сформулируем понятие топологической размерности, восходящее к работам Брауэра, Урысона, Менгера.

Рассмотрим для простоты компакт, т.е. замкнутое ограниченное множество. Каждый компакт при $\forall \varepsilon > 0$ допускает ε -покрытие, т.е. может быть представлен в виде объединения конечного числа замкнутых множеств, каждое из которых имеет диаметр $< \varepsilon$. Или из любого открытого его покрытия всегда можно выбрать конечное подпокрытие (система множеств \mathcal{V}_j называется подпокрытием, если $\forall V_j \in$ хотя бы одному $U_i \in \mathcal{U}_i$).

Определение. Топологической размерностью d_T или dim компакта X называется наименьшее из таких целых чисел n , что во всякое открытое покрытие пространства X можно вписать замкнутое подпокрытие кратности $\leq n + 1$. Если таких чисел нет, то полагается $dim X \stackrel{def}{=} +\infty$. Топологическая размерность называется также брауэровской размерностью или просто размерностью.

Наглядный смысл этого определения довольно прост. Например, при $n = 2$ оно утверждает, что всякая двумерная «площадка» может быть вымощена сколь угодно мелкими камнями (замкнутыми множествами) так, что камни примыкают друг к другу не более чем по три (рис. 2.2). В то же время эта площадка не может быть вымощена сколь угодно мелкими камнями так, чтобы были только примыкания по два. При заполнении некоторого трехмерного объема достаточно мелкими камнями (например, кирпичной кладкой) необходимо возникают уже примыкания по четыре.

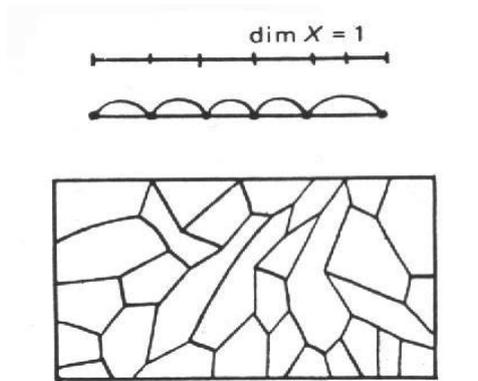


Рис. 2.2. Наглядное представление топологической размерности

РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА d_H (ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ)

Как уже говорилось, точка имеет размерность, равную нулю, отрезок, окружность, вообще любая обычная кривая на плоскости или в пространстве – размерность 1, круг, сфера – двумерны, тела – трехмерны. Во всех перечисленных случаях размерность равна числу независимых переменных, необходимых для того, чтобы задать точку на рассматриваемом объекте. Однако смысл понятия «размерность» шире. Оно характеризует более «тонкие» топологические свойства объектов и совпадает с числом независимых переменных, необходимых для описания объекта, только в частных случаях. С одномерными объектами мы связываем понятие длины, с двумерными – площади и т.д. Но как можно представить себе множество с размерностью $3/2$? По видимому, для этого требуется нечто промежуточное между длиной и площадью, и если длину условно назвать 1-мерой, а площадь – 2-мерой, то требуется $(3/2)$ -мера. В 1919 году Феликс Хаусдорф действительно определил такую α – меру для любого $\alpha \geq 0$, ($\alpha \in R$) и на этой основе каждому множеству в евклидовом пространстве сопоставил число, названное им метрической размерностью. Идеи Хаусдорфа, не опубликовавшего больше ни одной работы в этом направлении, были развиты А.С. Безиковичем. В последующие годы размерность Хаусдорфа-Безиковича получила применение в некоторых узких областях математики, но ничто не предвещало той популярности этого понятия за пределами математики, которая сейчас наблюдается.

Рассмотрим известные выражения для длины, площади и объема шара в евклидовом пространстве. Диаметр (длина) шара радиуса r в R^1 составляет $2\pi r$. Площадь шара в R^2 равна πr^2 . Объем в R^3 равен $\frac{4}{3}\pi r^3$. Соответствующие формулы в евклидовом пространстве любого целого числа измерений хорошо известны:

$$V_d = \gamma(d) \cdot r^d, \quad d = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.3)$$

где $\gamma(d) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^d}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)}$, а $\Gamma(x)$ – гамма функция Эйлера: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt, x > 0$

Первый шаг в построении теории дробной размерности состоит в определении d -меры шара радиуса r в R^n , где d – любое неотрицательное вещественное число. Это достигается путем распространения формулы (1) на все вещественные $d > 0$. Например, мера шара в $\frac{3}{2}$ - мерном пространстве определяется как $\gamma \left(\frac{3}{2}\right) r^{3/2}$.

Следующий шаг заключается в переносе понятия d -меры с шара на произвольное множество $A \subset R^n$. Для этого построим покрытие A множеством шаров $B_\varepsilon \left(\xi_i\right)$ (рис. 2.3).

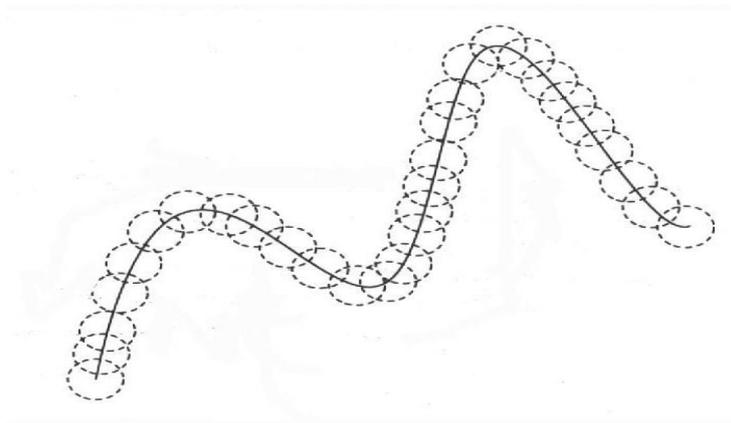


Рис. 2.3. Покрытие кривой множеством шаров

Просуммируем их объемы:

$$\sum_{i=1}^M \gamma(d) \cdot \varepsilon^d \quad (2.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ε -фрактальной d -мерой множества называется число

$$\mu(A, d, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \min M \cdot \varepsilon^d \equiv N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d \quad (2.5)$$

Или $\mu(A, d, \varepsilon) = \inf \sum \gamma(d) \cdot \varepsilon^d$ всевозможным покрытиям множества A .

Например, если $A_1 = [0, 1] \in R^1$, то $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] + 1$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ этот \inf может только увеличиваться. Следовательно, всегда существует предел $\mu(A, d, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фрактальной d -мерной сферической мерой Хаусдорфа называется число

$$\mu_F A, d = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu A, d, \varepsilon = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d \cdot N \varepsilon \quad (2.6)$$

Часто бывает:

$$\mu_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu A, d, \varepsilon \quad (2.7)$$

Безикович показал, что для каждого X всегда существует число $d_H \in R$, что d – мерная мера Хаусдорфа компакта X бесконечна при $d < d_H$, и, напротив, равна 0, при $d > d_H$.

$$\text{Если } A_1 = 0, 1, \text{ то при } d=1, \mu_F A_1, 1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \cdot N \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \cdot \left(\left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] + 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

В то же время для $d > 1$ $\mu_F A_1, d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d \cdot N \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d \cdot \left(\left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] + 1 \right) = 0$, а для

$$d < 1 \mu_F A_1, d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d \cdot N \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d \cdot \left(\left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] + 1 \right) = +\infty.$$

В общем случае замкнутого ограниченного множества A легко видеть, что если $\mu_F A, d' < +\infty$, то $\mu_F A, d = 0$ для любого $d > d'$. Если же $\mu_F A, d > 0$, то для $\forall d < d' \Rightarrow \mu_F A, d = +\infty$. Следовательно, существует такое число $d_H \in 0, +\infty$, что $\mu_F A, d = 0$ при $d > d_H$ и $\mu_F A, d = +\infty \forall d < d_H$, в то время как $\mu_F A, d$ может быть любым числом из интервала $0, +\infty$. Очевидно,

$$d_H = \inf d \mid \mu_F A, d = 0. \quad (2.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число d_H , удовлетворяющее соотношению: $d_H = \inf d \mid \mu_F A, d = 0$ называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича (метрической или фрактальной размерностью) множества A . Обозначается как d, d_H или d_F .

$$\text{Например, для } A_1 = 0, 1 \mu_F A_1, d = \begin{cases} 0, & d > 1 \\ +\infty, & d < 1. \text{ Значит, } d_H A_1 = 1. \\ \frac{1}{2}, & d = 1 \end{cases}$$

Вернемся теперь к формуле (2.6):

$$\mu A, d, \varepsilon = N \varepsilon \cdot \varepsilon^d \Rightarrow N \varepsilon = \frac{\mu}{\varepsilon^d}. \quad (2.9)$$

Прологарифмируем обе части:

$$\log N \varepsilon = \log \mu - \log \varepsilon^d \Rightarrow d = -\frac{\ln N \varepsilon}{\ln \varepsilon}. \quad (2.10)$$

или

$$d = d_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N \varepsilon}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (2.11)$$

Для большинства «хороших» объектов, пространств, множеств \dim и d_H совпадают, однако существуют объекты, для которых $\dim < d_H$. Это и есть фракталы.

РАЗМЕРНОСТЬ МИНКОВСКОГО d_M

Размерность Минковского может служить аналогом размерности Хаусдорфа-Безиковича, удобным для использования в прикладных задачах. Эти размерности, как правило, совпадают, но алгоритм определения размерности Минковского несколько проще.

Определение размерности Минковского d_M для кривой (фрактальной или гладкой) в общих чертах сводится к следующему. Пусть центр небольшого евклидова шара (круга) радиуса r движется вдоль кривой, заметая площадь Минковского, то есть площадь $S r$ возникающей при движении круга «сосиски Минковского» (рис. 2.4). Разделим площадь $S r$ на $2r$ и устремим r к нулю. В случае гладкой кривой мы получили бы в пределе длину кривой, но для фрактальной кривой результат бесконечный. Действительно, отношение $S r / 2r$ пропорционально величине r^{1-d_M} , которая при $d_M > 1$ расходится для $r \rightarrow 0$. Значение величины d_M служит мерой скорости расхождения и называется размерностью Минковского-Булигана. Ее можно вычислить по формуле:

$$d_M = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln S r}{\ln \frac{1}{r}} + 2, \quad (2.12)$$

при условии, что предел существует.

В случае гладкой кривой $S r \cong r$ и $d_M = -1 + 2 = 1$, как и следовало ожидать.

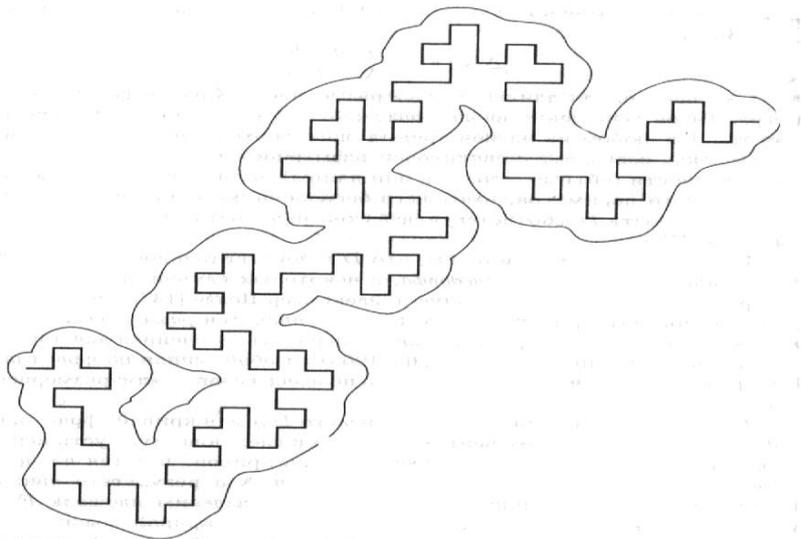


Рис. 2.4. Определение «протяженности» кривой с помощью «сосиски Минковского»

Формула (10) для d_M напоминает формулу для размерности Хаусдорфа. Различие состоит в том, что вместо числа «покрывающих элементарных областей» $N r$ в размерность Минковского-Булигана входит площадь $S r$ – площадь «сосиски Минковского». Кроме того, к отношению логарифмов добавлено 2. (Впрочем, от члена +2 можно избавиться, если заменить $S r$ под логарифмом на $S r / r^2$).

Для всех строго самоподобных фракталов размерность Минковского d_M равна размерности Хаусдорфа-Безиковича d_H . Если эти размерности не совпадают, то

$$d_M > d_H. \quad (2.13)$$

Это говорит о том, что размерность Минковского несколько «грубее» размерности Хаусдорфа-Безиковича, так как не учитывает некоторые тонкие структуры объекта.

2.2. Виды геометрических фракталов

Сформулируем основной принцип построения геометрических фракталов, оно всегда начинается с двух фигур – *инициатора* и *генератора*. Последний

представляет собой ориентированную ломаную, состоящую из N отрезков длины r . В начале каждого этапа построения мы имеем некоторую ломаную, сам этап построения заключается заменой каждого прямого участка копией *генератора*, уменьшенной и смещенной так, чтобы ее концевые точки совпали с концевыми точками заменяемого отрезка. На каждом этапе $d = \frac{\log N}{\log 1/r}$.

Все эти кривые не пересекают сами себя, поэтому при определении d их можно без какой-либо неопределенности делить на непересекаемые части.

Фрактал Леви получается, если взять половину квадрата, а затем каждую сторону заменять таким же фрагментом (рис. 2.5).

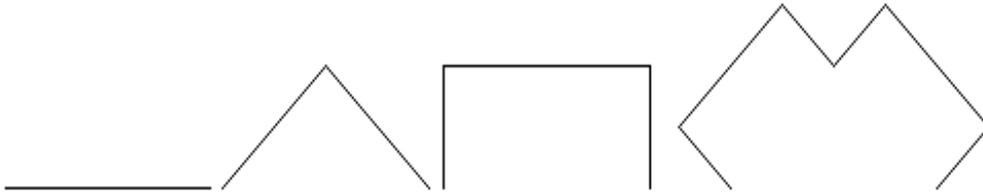


Рис. 2.5. Первые шаги построения кривой Леви

Снежинка Коха. Граница *снежинки*, придуманной Хельге фон Кохом в 1904 году (рис. 2.6), описывается кривой, составленной из трех одинаковых фракталов размерности $d \approx 1,2618$. Каждая треть снежинки строится итеративно, начиная с одной из сторон равностороннего треугольника. Пусть K_0 – начальный отрезок. Уберем среднюю треть и добавим два новых отрезка такой же длины, как показано на рис. 2.7(а, б, в, г). Назовем полученное множество K_1 . Повторим данную процедуру многократно, на каждом шаге заменяя среднюю треть двумя новыми отрезками. Обозначим через K_n фигуру, получившуюся после n -го шага.

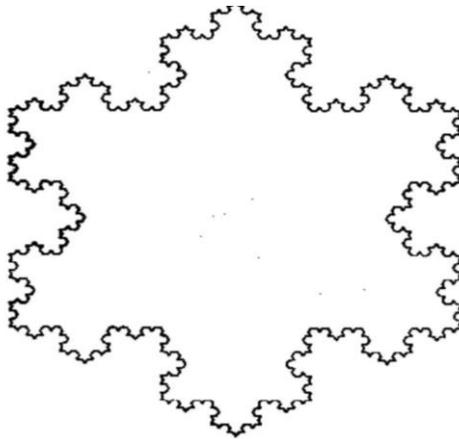


Рис. 2.6. Снежинка Коха

Интуитивно ясно, что последовательность кривых $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к некоторой предельной кривой K . Предположим, что кривая K существует, и рассмотрим некоторые ее свойства.

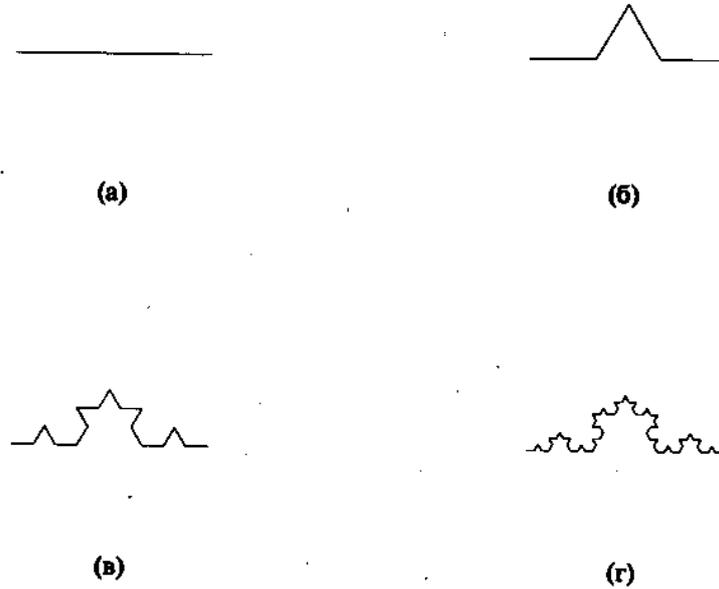


Рис. 2.7. Этапы построения кривой Коха

Если взять копию K , уменьшенную в три раза ($r = 1/3$), то все множество K можно составить из $N = 4$ таких копий. Следовательно, отношение самоподобия (2.1) выполняется при указанных N и r , а размерность фрактала будет:

$$d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.2618.$$

Инициатором кривой Коха с многозвеньевым генератором являются четыре единичных отрезка (рис. 2.8, 0), а генератором – сложная фигура из восьми отрезков (рис. 2.8, 1).

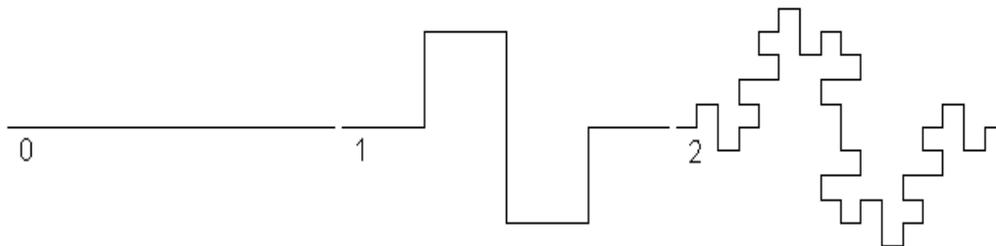


Рис. 2.8. Вариант кривой Коха с многозвеньевым генератором

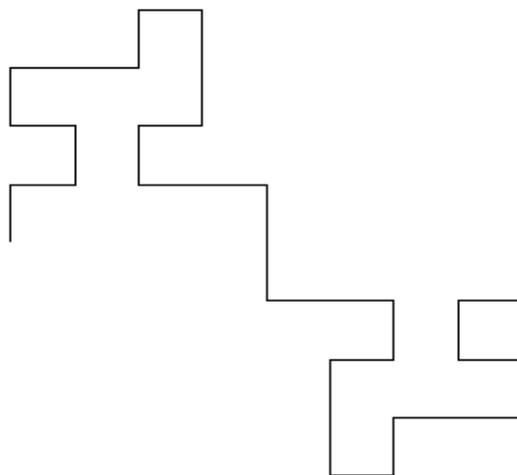


Рис. 2.9. Генератор кривой Коха из 32 звеньев

Еще одно важное свойство, которым обладает граница снежинки Коха – ее бесконечная длина (см. теорему 2.1.1). Это может показаться удивительным читателю, привыкшему иметь дело с кривыми из курса математического анализа. Обычно гладкие или хотя бы кусочно-гладкие, они всегда имеют конечную длину (в чем можно убедиться интегрированием). Мандельброт в этой связи опубликовал ряд увлекательных работ, в которых исследуется вопрос об измерениях длины береговой линии Великобритании. В качестве модели он использовал фрактальную кривую, напоминающую границу снежинки за тем исключением, что в нее введен элемент случайности, учитывающий случайность в природе. В результате оказалось, что кривая, описывающая береговую линию, имеет бесконечную длину.

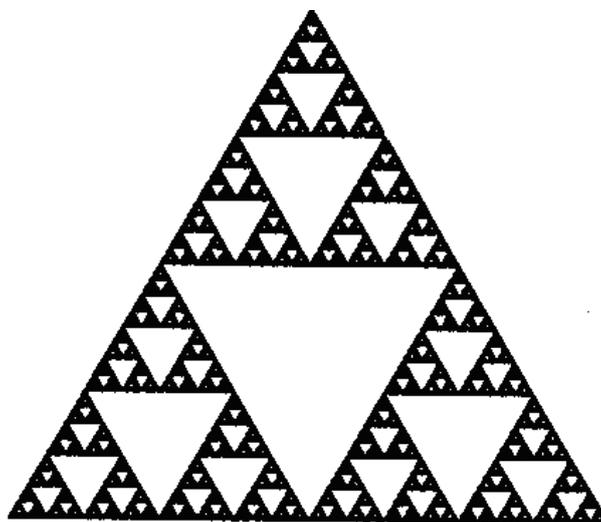


Рис. 2.10. Ковер Серпинского

Теорема 2.1.1. *Граница снежинки Коха имеет бесконечную длину.*

Доказательство. Достаточно показать, что *каждый* из трех идентичных фракталов K , полученных итерациями (рис. 2.6), имеет бесконечную длину. Пусть исходный отрезок K_0 имеет единичную длину. Тогда длина кривой K_1 равна $4/3$. Длина кривой K_2 равна $4^2/3^2$. Продолжая таким образом, имеем, что кривая K_0 после n -го шага имеет длину $4^n/3^n$. Следовательно, длина предельной кривой K_n равна бесконечности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n} = \infty. \quad (2.14)$$

Ковер Серпинского. Еще один пример простого самоподобного фрактала – *ковер Серпинского* (рис. 2.10), придуманный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 году. Сам термин *ковер* принадлежит Мандельброту. В способе построения, следующем ниже, мы начинаем с некоторой области и последовательно выбрасываем внутренние подобласти (рис. 2.11).

Пусть начальное множество S_0 – равносторонний треугольник вместе с областью, которую он замыкает. Разобьем S_0 на четыре меньшие треугольные области, соединив отрезками середины сторон исходного треугольника. Удалим внутренность маленькой центральной треугольной области. Назовем оставшееся множество S_1 (рис. 2.11). Затем повторим процесс для каждого из трех оставшихся маленьких треугольников и получим следующее приближение S_2 . Продолжая, таким образом, получим последовательность вложенных множеств S_n , чье пересечение и образует ковер S .

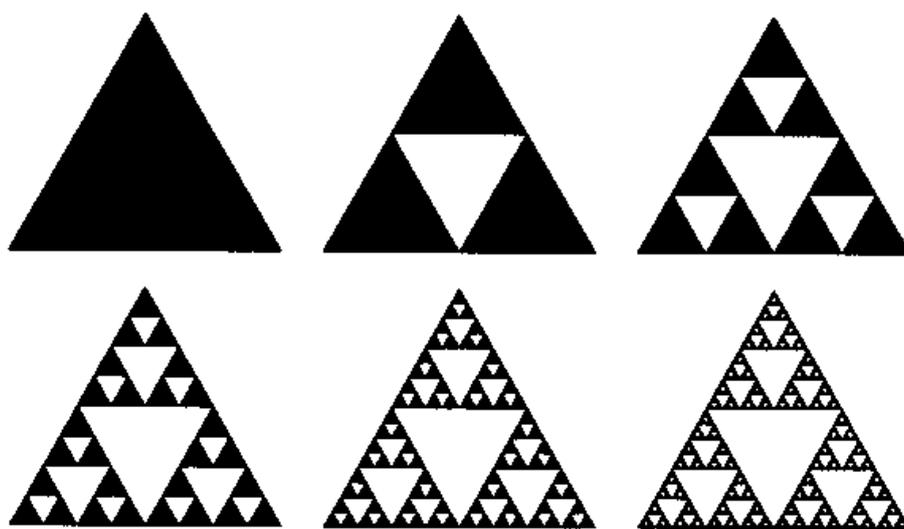


Рис. 2.11. Построение ковра Серпинского

Из построения видно, что весь ковер представляет собой объединение $N = 3$ существенно непересекающихся уменьшенных в два раза копий; коэффициент подобия $r = 1/2$ (как по горизонтали, так и по вертикали). Следовательно, S – самоподобный фрактал с размерностью:

$$d = \ln 3 / \ln 2 \approx 1,5850. \quad (2.15)$$

Очевидно, что суммарная площадь частей, выкинутых при построении, в точности равна площади исходного треугольника. На первом шаге мы выбросили $1/4$ часть площади. На следующем шаге мы выбросили три треугольника, причем площадь каждого равна $1/4^2$ площади исходного. Рассуждая таким образом, мы убеждаемся, что полная доля выкинутой площади составила:

$$1/4 + 3(1/4^2) + 3(1/4^3) + \dots + 3^{n-1}(1/4^n) + \dots \quad (2.16)$$

Эта сумма равна 1. Следовательно, мы можем утверждать, что оставшееся множество S , то есть ковер, имеет площадь меры нуль. Это выделяет множество S в разряд «совершенного», в том смысле, что оно разбивает свое дополнение на бесконечное число треугольных областей, обладая при этом нулевой толщиной.

Губка Менгера. Существуют и трехмерные аналоги ковров. Следуя Мандельброту, мы называем такие множества *губками*. Губка, изображенная на рис. 2.12, называется губкой Менгера, по имени Карла Менгера. Это самоподобный фрактал с $N = 20$ и $r = 1/3$. Его размерность равна:

$$d = \ln 20 / \ln 3 \approx 2,7268. \quad (2.17)$$

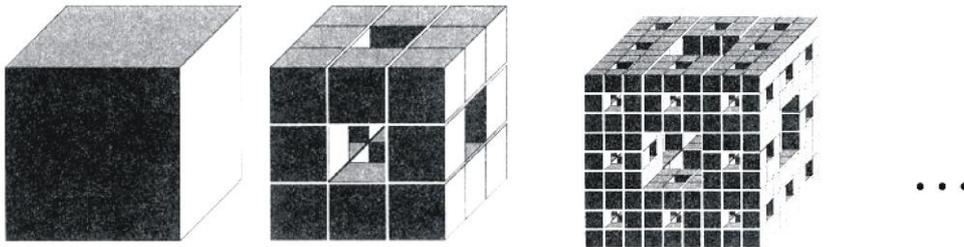


Рис. 2.12. Построение губки Менгера

Такая губка имеет объем меры нуль.

2.3. Определение размерности геометрических фракталов. Построение фрактала по размерности

Для геометрических фракталов мы определили правила построения так, что инициатор замещается генератором так, чтобы концы инициатора и генератора

совпадали. Генератор представляет собой ориентированную ломаную, состоящую из N равных отрезков длины r . Это правило позволяет достаточно просто определять размерность геометрического фрактала как отношение логарифма количества единичных отрезков генератора на логарифм количества единичных отрезков инициатора. Таким образом, на каждом этапе $D = \ln N / \ln 1/r$. Этот способ годится для единичного топологического пространства. Для пространств с топологической размерностью больше единицы единичные отрезки заменяются на единичные квадраты, единичные кубы и т.д.

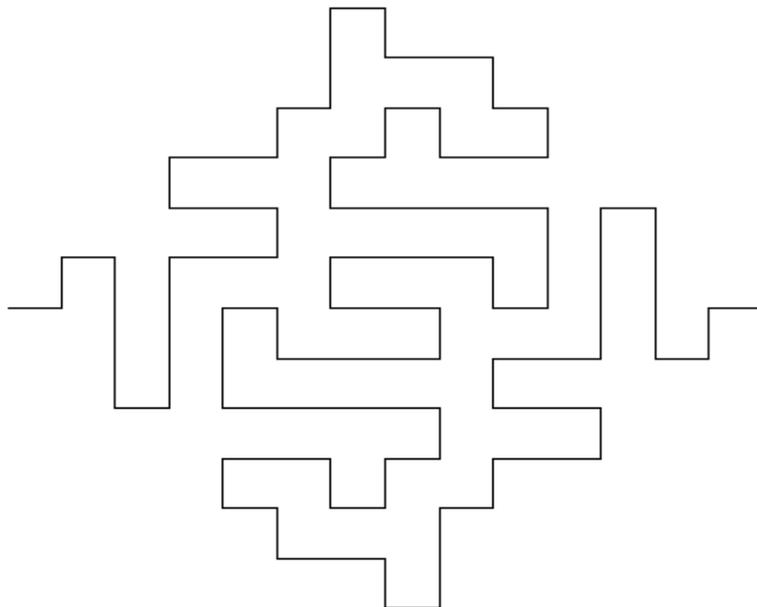


Рис. 2. 13. Генератор кривой Коха

Если внимательно пересчитать количество отрезков генератора и количество отрезков по прямой, между концами генератора (рис. 2.13), то получим, что фрактальная размерность определяется соотношением $D = \ln 98 / \ln 14$.

Но не всегда расчеты можно провести так просто, примером этого может служить фрактал Леви, изображенный на рис. 2.5. Как видно из рисунка, длина отрезка генератора не совпадает с длиной отрезка инициатора. Для определения размерности фрактала в этом случае необходимо вычислить длину отрезка генератора по отношению к длине отрезка инициатора. Поскольку генератор фрактала Леви является половинкой квадрата, то нетрудно посчитать, что длина отрезка генератора составляет $\sqrt{2}$. Тогда фрактальная размерность определится по формуле:

$$D = \frac{\ln 2\sqrt{2}}{\ln 2} = \frac{\ln 2^{\frac{3}{2}}}{\ln 2} = \frac{\frac{3}{2} \ln 2}{\ln 2} = \frac{3}{2}. \quad (2.18)$$



Рис. 2.14

Задания к главе 2

1. Определить дробную размерность (размерность подобия) фракталов, которые строятся, как указано на рис. 2.15.

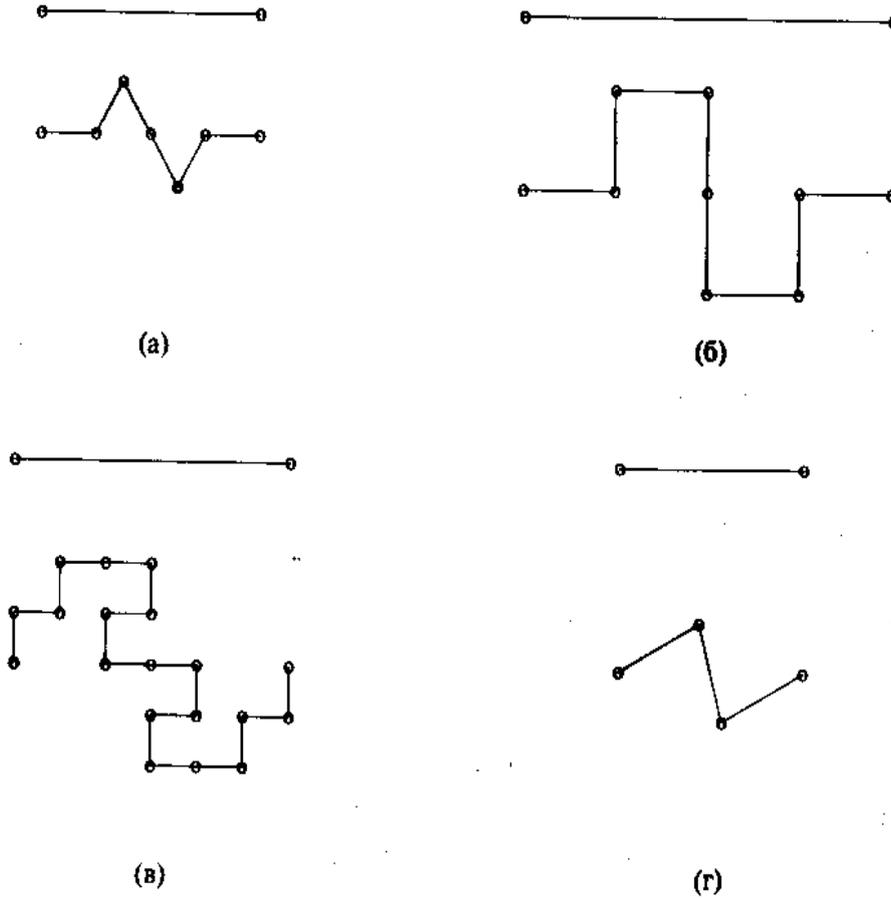


Рис. 2.15. Виды геометрических фракталов

2. Определить дробную размерность (размерность подобия) фракталов, которые строятся, как указано на рис. 2.16.

3. Построить фрактал, отличный от фрактала на рис. 2.16(a), но той же размерности.

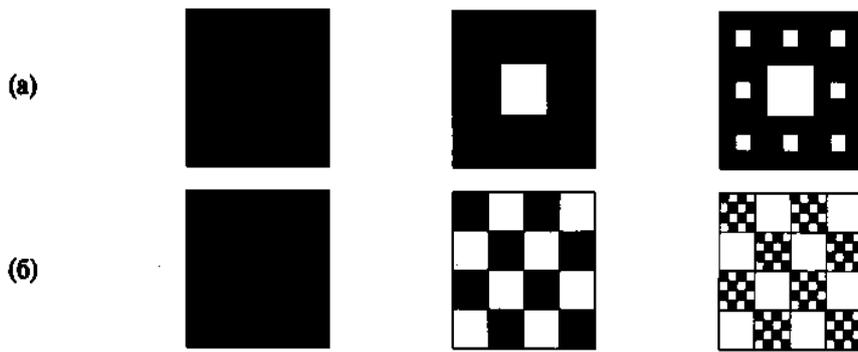


Рис. 2.16. Фракталы для упражнения 2

4. Показать, что сумма площадей треугольников, выкинутых при построении ковра Серпинского, равняется площади исходного треугольника. **Указание:** воспользоваться соотношением:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots, \quad \text{для } |x| < 1. \quad (2.19)$$

5. Рассмотрим фрактал, который строится, как указано на рис. 2.17. Этот фрактал иногда называют *пылью Серпинского*. Записать бесконечный ряд для суммы площадей частей, которые были удалены при построении. Найти сумму этого ряда.

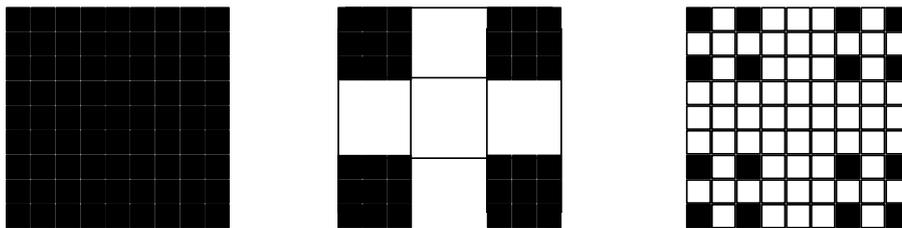


Рис. 2.17. Фракталы для упражнения 5

6. Определить дробную размерность (размерность подобия) фракталов, которые строятся, как указано на рис. 2.18.



Рис. 2.18. Фракталы для упражнения 6

Существуют два основных способа построения фракталов. Первый способ – использование L-систем (от имени Lindenmayer), второй способ – применение системы итерированных функций IFS (iterated function systems). L-система – это грамматика некоторого языка (достаточно простого), которая описывает инициатор и преобразование, выполняемое над ним, при помощи средств, аналогичных средствам языка Лого (аксиоматическое описание простейших геометрических фигур и допустимых преобразований на плоскости и в пространстве).

Как мы уже убедились, многие регулярные фракталы строятся путем бесконечного повторения нескольких простых операций, скажем, замены одного элемента некоторой комбинацией других, ему подобных. Так, например, салфетка Серпинского получается при замене исходного большого треугольника тремя треугольниками в два раза меньшего размера, расположенными друг относительно друга так, как показано на рис. 2.11 в центре. Затем эта же операция повторяется с каждым из этих трех маленьких треугольников, и так далее до бесконечности. Возникает естественный вопрос, а нельзя ли эту «процедуру замены» перевести на язык математических формул.

Так или примерно так в середине 80-х годов появился метод Систем Итерированных Функций – СИФ – как простое средство получения фрактальных структур. Он был придуман американским математиком М. Барнсли, работавшим тогда в технологическом институте штата Джорджия.

L-системы представляют собой формализованный язык, применяющийся для построения различных геометрических фракталов. Фактически, для использования этого языка надо построить интерпретатор, который будет понимать команды языка L-систем и выполнять их с помощью машинной графики для визуального представления результата.

3.1. L-системы. Построения L-систем с использованием одного правила

Понятие L-систем, тесно связанное с самоподобными фракталами, появилось только в 1968 году благодаря Аристриду Линденмайеру. Изначально L-системы были введены при изучении формальных языков, а также использовались в биологических моделях селекции. С их помощью можно строить многие известные самоподобные фракталы, включая снежинку Коха и ковер Серпинского.

Некоторые другие классические построения, например кривые Пеано (работы Пеано, Гильберта, Серпинского), также укладываются в эту схему. И конечно, L-системы открывают путь к бесконечному разнообразию новых фракталов, что и послужило причиной их широкого применения в компьютерной графике для построения фрактальных деревьев и растений. Данное изложение L-систем

следует в основном работам Прузинкевича и Хапана и ограничивается случаем детерминированных L-систем и графикой на плоскости.

Для графической реализации L-систем в качестве подсистемы вывода используется так называемая *тертл*-графика (turtle – черепаха). При этом точка (черепашка) движется по экрану дискретными шагами, как правило, прочерчивая свой след, но при необходимости может перемещаться без рисования. В нашем распоряжении имеются три параметра x, y, α , где x, y – координаты черепашки, α – направление, в котором она смотрит. Черепашка обучена интерпретировать и выполнять последовательность команд, задаваемых кодовым словом, буквы которого читаются слева направо. Букв-команд всего шесть.

Кодовое слово представляет собой результат работы L-системы и может включать следующие буквы:

F – переместиться вперед на один шаг, прорисовывая след;

b – переместиться вперед на один шаг, не прорисовывая след;

[– открыть ветвь (сохранить текущее состояние x, y, α в конец стека);

] – закрыть ветвь (извлечь с удалением параметры x, y, α из конца стека);

+ – увеличить угол α на величину β ;

- – уменьшить угол α на величину β .

Все остальные символы, которые могут содержаться в кодовом слове, черепашка игнорирует. Размер шага и величина приращения по углу β задаются заранее и остаются неизменными для всех перемещений черепашки. Если начальное направление движения α (угол, отсчитываемый от положительного направления оси X) не указано, то полагаем α равным нулю.

Несколько примеров иллюстрируют применение команд ветвления (обозначаются], [) и вспомогательных переменных (обозначаются X, Y и т.д.). Команды ветвления используются для построения деревьев и растений, а вспомогательные переменные заметно облегчают построение некоторых L-систем.

Таким образом, работа L-систем состоит из двух основных стадий:

1) запись кодового слова, содержащего команды для построения фигуры;

2) выполнение последовательности полученных команд с помощью *тертл*-графики.

L-система задается словом инициализации, называемым *аксиомой* или *инициатором*, набором *порождающих правил*, указывающих, как следует преобразовывать кодовое слово при переходе от уровня к уровню (от итерации к итерации), начальным состоянием параметров x, y, α_0 , величиной единичного шага Δ и углом приращения β . Как правило, $x_0 = y_0 = 0$, а $\Delta = 1$ и при записи начальных условий не указываются.

Формально детерминированная L-система состоит из алфавита, слова инициализации, называемого аксиомой или инициатором, и набора порождающих правил, указывающих, как следует преобразовывать слово. К примеру, можно заменить букву F при помощи порождающего правила $newf = F-F++F-F$, что соответствует L-системе для кривой Коха (рис. 2.7). Символы +, -,], [не обнов-

ляются, а просто остаются на тех местах, где они встретились. Обновление букв в данном слове предполагается одновременным, то есть все буквы слова одного уровня обновляются раньше любой буквы следующего уровня. L-система, соответствующая снежинке Коха (рис. 1.8), задается следующим образом:

$$\alpha = 0, \beta = \pi/5$$

$$\text{Аксиома : } F ++F ++F$$

$$\text{Порождающее правило : } newF = F - F ++F - F$$

Графическое представление аксиомы $F ++F ++F$ – равносторонний треугольник. Черепашка делает один шаг вперед, затем угол α увеличивается на $2\pi/3$ и черепашка делает еще один шаг вперед, угол α снова увеличивается на $2\pi/3$ и черепашка делает еще шаг.

На первом шаге каждая буква F в слове-инициаторе $F ++F ++F$ заменяется на $F - F ++F - F$:
 $F - F ++F - F ++ F - F ++F - F ++ F - F ++F - F$ и т.д.

Остров на рис. 3.1 не имеет разрывов, так как черепашка движется единичными шагами и каждый раз прорисовывает свой след. Разрывные графики можно получать, применяя в L-системе команду «b», то есть команду «переместиться на один шаг вперед без рисования». Примерами могут служить изображения мозаики на рис. 4.2 и цепочки на рис. 4.3.

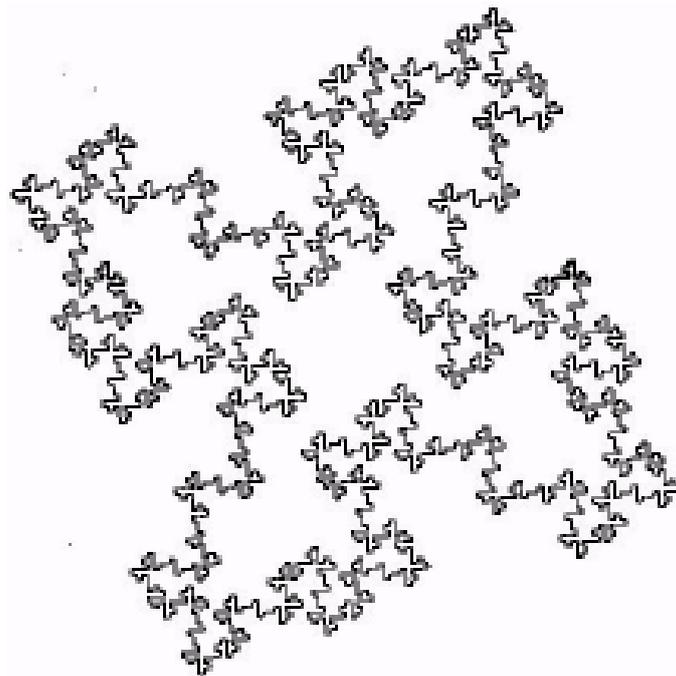


Рис. 3.1. Остров после 2-х итераций

3.2. Программные средства для построения фракталов с помощью L-систем

Среди множества программных средств, используемых для построения фракталов с помощью L-систем, выделим две:

- 1) программный модуль «Mkokh Application»;
- 2) программный комплекс «Graphic».

Рассмотрим интерфейс и основные правила работы с программами.

Интерфейс и правила работы с программой «Mkokh Application»

В программе «Mkokh Application» имеется набор примеров самых распространенных фракталов, которые можно построить с помощью L-систем. Программа также позволяет строить собственные фракталы, используя редактор свойств фракталов.

Работу с программой рассмотрим на примере фрактала, строящегося при запуске программы по умолчанию – «Снежинка Коха».

Главное меню состоит из следующих пунктов:

Файл

создать (Ctrl+N) – создает новый документ и строит по умолчанию снежинку Коха;

открыть (Ctrl+O) – открытие ранее сохраненных файлов;

сохранить (Ctrl+S) – сохранить изменения в открытом файле;

сохранить как – сохранить изменения в файле с заданным именем и расположением;

список названий последних открытых файлов;

выход – выход из программы.

Правка

копировать (Ctrl+C) – копирует изображение построенного фрактала в буфер обмена;

больше шагов (Пробел) – увеличить количество шагов на 1;

меньше шагов (Ctrl+Пробел) – уменьшить количество шагов на 1.

Вид

панель инструментов – показывает или убирает панель инструментов с экрана;

строка статуса – показывает или убирает строку статуса с экрана;

во весь экран (F11) – показывает фрактал во весь экран;

свойства (Alt+Enter) – вызывает окно свойств фрактала.

Справка

Назначение кнопок на панели инструментов

С помощью панели инструментов можно эффективно управлять видом строящегося фрактала – поворачивать его, увеличивать или уменьшать количе-

ство итераций построения, запускать, приостанавливать или заканчивать построение, можно поворачивать строящийся фрактал влево или вправо по шагам. Кнопкой можно вызвать окно редактирования свойств L-системы.

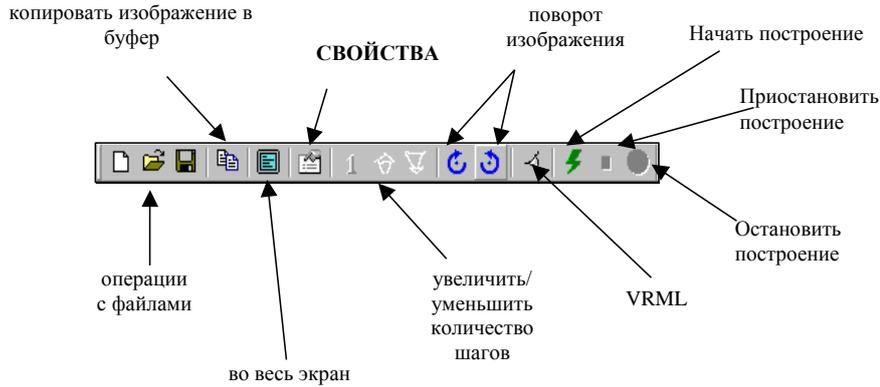


Рис. 3.2. Панель инструментов программы «Mkokh Application»

Редактирование свойств L-системы. В свойствах можно задавать параметры L-системы (рис. 3.3) и параметры отображения L-системы (рис. 3.4).

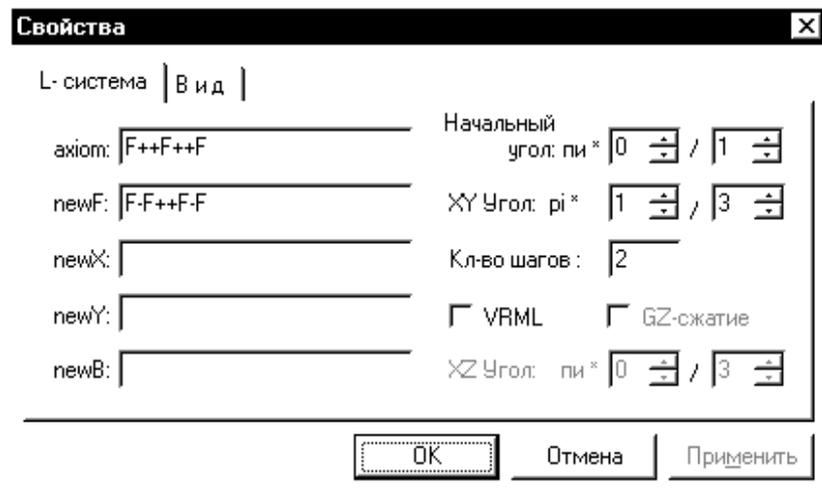


Рис. 3.3. Окно параметров свойств L-системы

Параметры свойств L-системы (рис. 3.3):

- аксиом – аксиома;
- newF – новое, порождающее правило F;
- newX – новое, порождающее правило X;
- newY – новое, порождающее правило Y;
- newB – новое, порождающее правило B;

начальный угол – начальное направление взгляда черепашки задается в долях π (отдельно задаётся числитель, а после / знаменатель);

XУ угол – угол отклонения, задается в долях π (отдельно задаётся числитель, а после / знаменатель);

количество шагов – определяет, сколько раз надо применить правило newF.

Параметры отображения L-системы (рис. 3.4):

размер изображения – задается размер изображения в пикселях;

цвет фона – задается цвет фона из палитры;

ширина и цвет линии – задается начальная ширина линии и ее цвет;

изменять делением на n ветвей – с увеличением количества итераций, первоначальная толщина линии делится на заданное количество частей, в соответствии с принципом – суммарная толщина всех веток дерева на одной высоте постоянна (по всей высоте дерева). Таким образом, если в вашем алгоритме ветви деревьев разветвляются в одной точке на две ветви, ставьте в этом поле 2, если ветвление происходит на три ветви, ставьте 3. Можно подбирать это число экспериментально (нецелые числа допустимы);

переключатель «Рисовать с полутонами» – увеличивает качество рисования линий за счет использования полутонов. Края линий становятся сглаженными.

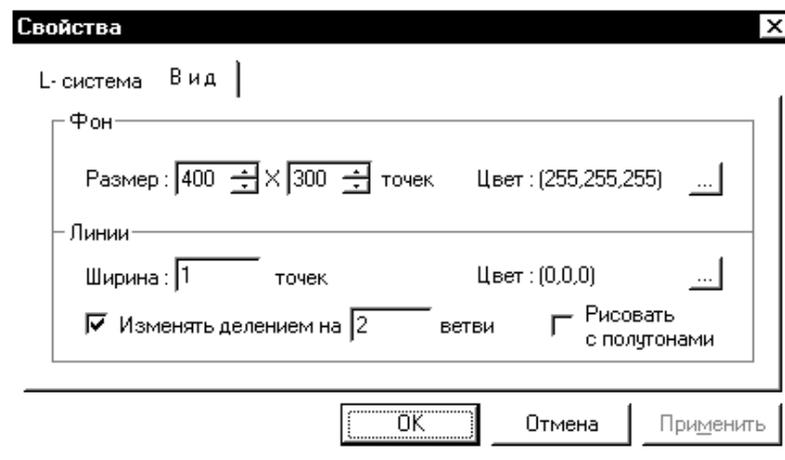


Рис. 3.4. Окно параметров отображения L – системы

Алгоритм построения L-системы

В программе «Mkokh Application» L-системы строятся с помощью алгоритма черепашкой графики. Алгоритм состоит в том, что вы управляете движением черепашки, которая ползает по экрану и оставляет за собой след. При этом ваша цель – управлять черепашкой так, чтобы черепашка нарисовала нужную линию.

1. Задается аксиома (сценарий, по которому будет рисовать черепашка).
2. Задается набор порождающих правил (они указывают, как будет изменяться аксиома от итерации к итерации).
3. Задается начальный угол построения и величина угла приращения.

4. Задается количество итераций (количество шагов черепашки).

5. Запуск процесса построения.

Примеры:

аксиома – $F ++ F ++ F$ – это равносторонний треугольник, если угол поворота равен $\pi/3$;

аксиома – $F + F + F + F$ – это квадрат, если угол поворота равен $\pi/2$.

Пример построения L-системы по шагам (рис. 3.5):

1) аксиома – F

2) порождающее правило – $F - F ++ F -$

3) начальный угол – $-\pi/2$

4) угол поворота – $\pi/10$

5) количество шагов – 6

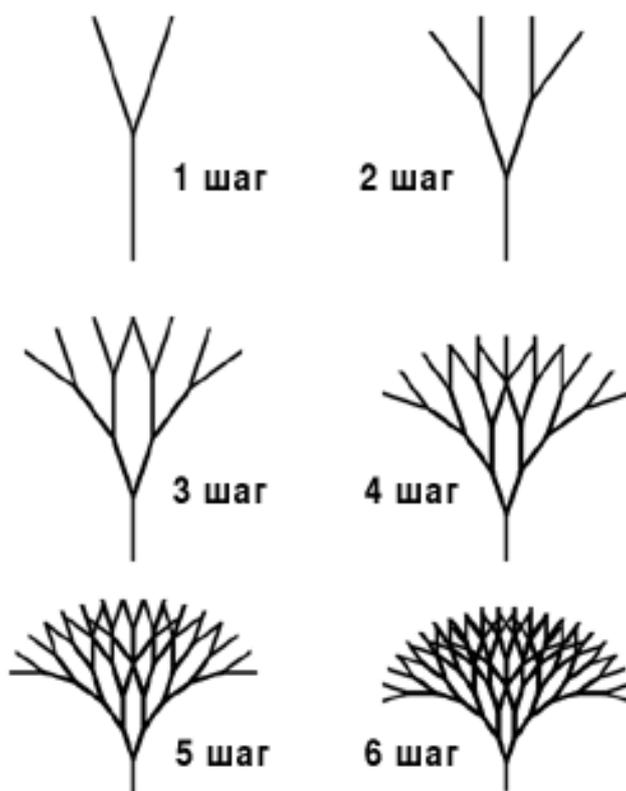


Рис. 3.5. Построение дерева по шагам

Примеры L-систем

Примеры L-систем можно найти в папке, куда установлена программа в подкаталоге «Mkokh/Samples» (рис. 3.6). Это самые распространенные фракталы, которые можно построить с помощью L-систем.

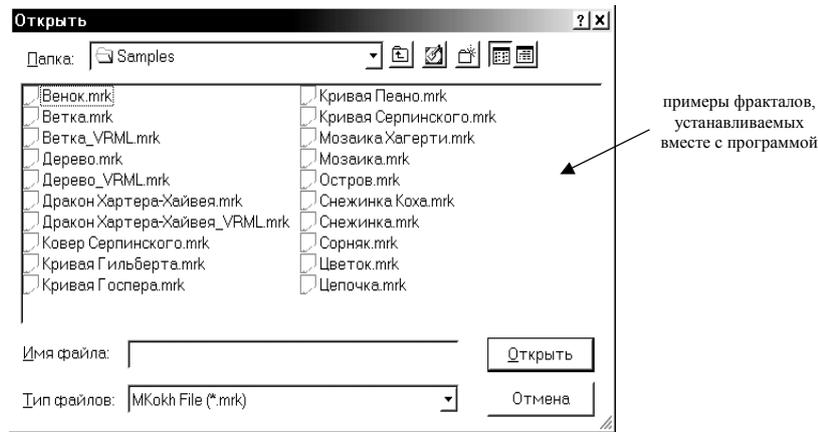


Рис. 3.6. Папка с примерами наиболее распространенных фракталов

Интерфейс и правила работы с программой «Graphic»

Программа «Graphic» не требует инсталляции. Создайте новый каталог, разверните туда полученный архив и запустите файл Graphic.exe. Для удаления программы – удалите созданный для него каталог вместе со всем содержимым.

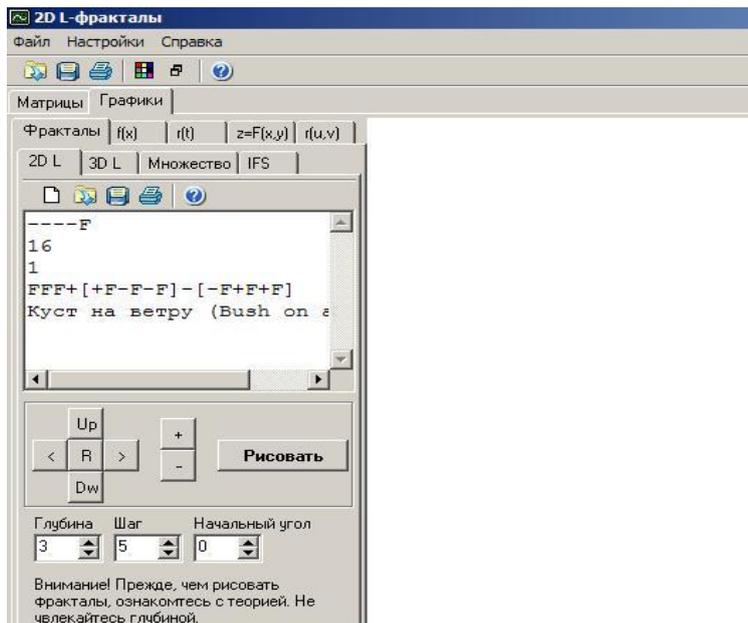


Рис. 3.7. Интерфейс программного комплекса «Graphic»

Основные возможности программы по построению фракталов:

1. Графическое отображение двумерных геометрических L-фракталов;
2. Графическое отображение трехмерных геометрических L-фракталов;
3. Графическое отображение системы итерирующих функций (Iterated Functional Systems – IFS);
4. Графическое отображение алгебраических фракталов: множества Мандельброта и Жюлиа;
5. Печать и сохранение в файл полученного изображения.

Главное меню состоит из следующих пунктов:

Файл

открыть – открытие ранее сохраненных файлов;

сохранить – сохранить изображение в файл;

печать – печать изображения на принтере;

выход – выход из программы.

Настройки

Справка

Назначение кнопок на панели инструментов

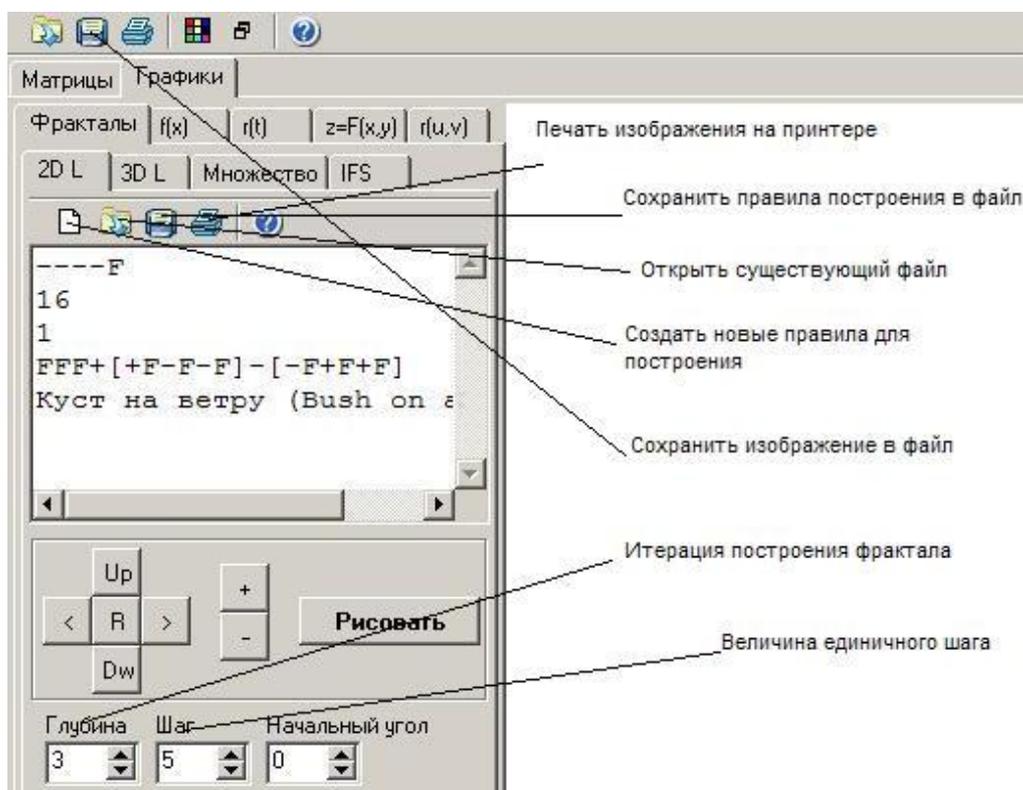


Рис. 3.8. Панель инструментов программы «Graphic»

С помощью панели инструментов можно эффективно управлять строящимся фракталом – поворачивать его, изменяя начальный угол; увеличивать или уменьшать количество итераций построения, изменяя глубину; рисовать изображение фрактала после изменения параметров построения; можно сдвигать строящийся фрактал влево, вправо, вверх или вниз по экрану.

Редактирование настройки построения изображений

Вкладка «Общие» (рис. 3.9)

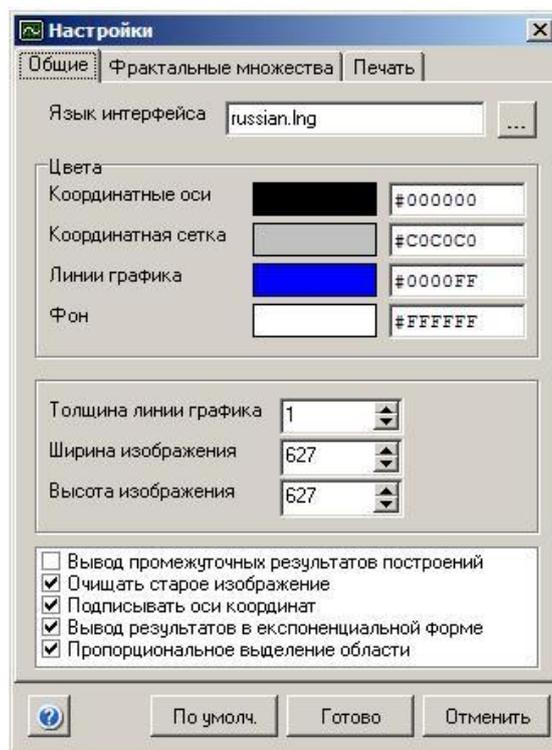


Рис. 3.9. Панель Настройки. Вкладка Общие

Вывод промежуточных результатов построений

Иногда нужно посмотреть порядок построения отдельных элементов изображения (грань, линия, точка). Но при этом построение изображения существенно замедляется.

Очищать старое изображение

Каждый раз, когда строится новое изображение, старое очищается. Если нужно нарисовать несколько изображений на одной картинке, уберите флажок «Очистить старое изображение». Таким образом, можно рисовать разнородные изображения на одной картинке, например, график функции $y = f(x)$ и интерполяционную функцию по точкам.

Подписывать оси координат

Например, если необходимо построить график функции, распечатать его, но при этом оси координат обозначить по-своему, тогда уберите флажок «Подписывать оси координат».

Вывод результатов в экспоненциальной форме

Имеются в виду результаты вычислений корней, интегралов, экстремумов, а также определителей матриц, решений СЛАУ.

Пропорциональное выделение области

Область нового окна для построения выделяется пропорционально установленным на данный момент размерам изображения (при исследовании фрактальных множеств Жюлиа и Мандельброта, а также IFS.). Значения ширины и высоты канвы на данный момент можно увидеть в строке состояния внизу.

Толщина линии графика

Измеряется в пикселях и касается только отрисовки графиков функций $y = f(x)$, $r = f(t)$ и т.д., а также 2D L-фракталов, 3D L-фракталов, интерполирования-экстраполирования, но не касается отрисовки осей и сетки ПСК.

Вкладка «Фрактальные множества» (рис. 3.10)

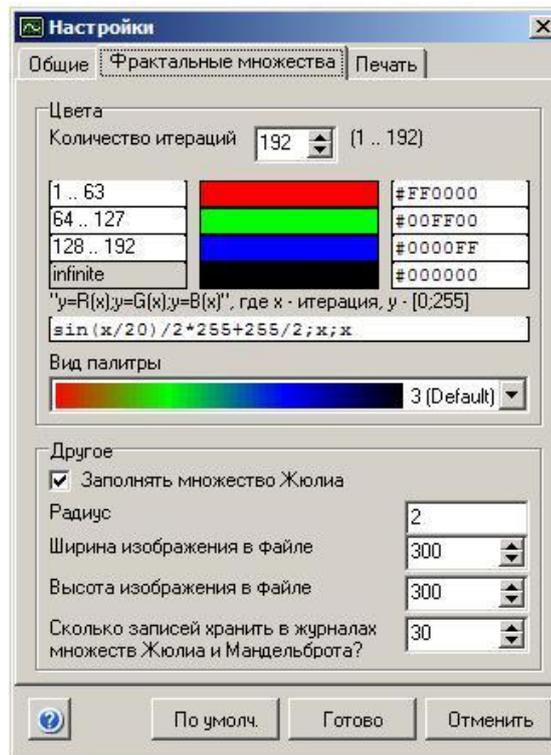


Рис. 3.10. Панель Настройки. Вкладка Фрактальные множества

Количество итераций (по умолчанию 192) определяет максимальное количество итераций проводимых для каждой точки (пикселя) канвы с целью определения принадлежности данной точки к соответствующему фрактальному множеству (т.е. итерации с номерами от 1 до 192 по умолчанию).

Задаются четыре цвета: 1 (интервал), 2 (интервал), 3 (интервал), 4 (infinite – принадлежит множеству).

Программа выбирает цвет из палитры по следующему принципу:

– если точка попала в первый интервал, то закрасить её цветом из этого интервала, иначе,

– если точка попала во второй интервал, то закрасить её цветом из второго интервала, иначе,

– если точка попала в третий интервал, то закрасить её цветом из третьего интервала, иначе,

– если точка вышла за пределы 192 итераций («убежала», т.е. вышла за пределы круга радиуса 2), то закрасить точку четвертым цветом, иначе,

– если точка не вышла за пределы 192 итераций и не попала ни в один из интервалов, то закрасить точку цветом фона.

Вид палитры определяет способ перехода между цветами. По умолчанию установлен вид палитры – 3. Это значит, что от 1 до 63 итерации цвет будет плавно меняться от красного до зеленого, от 64 до 127 итерации цвет будет плавно меняться от зеленого до синего, от 128 до 192 итерации цвет будет меняться от синего до черного.

Пример. Если необходимо окрашивать изображение только градациями серого цвета, впишите вместо «1..63» строку «1..192» и установите вместо красного цвета белый, а вместо зеленого – черный. Цвет можно изменить, щёлкнув левой кнопкой мыши по цветному прямоугольнику, или справа от этого прямоугольника наберите код цвета вручную «#ffffff», где первые два символа «ff» после знака «#» – это интенсивность красного компонента цвета; вторые два символа «ff» – это интенсивность зелёного компонента цвета; последние два символа – это интенсивность синего компонента цвета.

При монохромной палитре (№ 5) точки, принадлежащие множеству, закрашиваются цветом 4, остальные точки окрашиваются цветом фона (вкладка «Общие»).

Палитра № 6 определяется функциями $y=R(x)$, $y=G(x)$, $y=B(x)$, где x – итерация (по умолчанию [1; 192]), y – интенсивность цветовой компоненты [0; 255].

Если не установлен флажок в контейнере «**Заполнять множество Жюлиа**», то строится истинное множество Жюлиа и, соответственно, учитываются только 4-й цвет и цвет фона.

Некое подобие незаполненного множества можно строить и для множества Мандельброта.

Сколько записей хранить в журналах? В процессе исследований множества все введённые координаты записываются в «Журнал» так, что при необходимости можно вернуться к предыдущим координатам, дважды щёлкнув левой кнопкой мыши по соответствующей записи в списке. Журнал сохраняет только последние 30 (по умолчанию) записей, а после закрытия приложения сохраняется в файле set.log.

Параметры **Ширина и высота изображения в файле** учитываются только при выводе построенного изображения множества Жюлиа или Мандельброта прямо в графический **файл**. Не путать с **шириной и высотой изображения** на вкладке «Общие», которые применяются только для изображений, выводимых на **экран**.

Вкладка «Печать» (рис. 3.11)

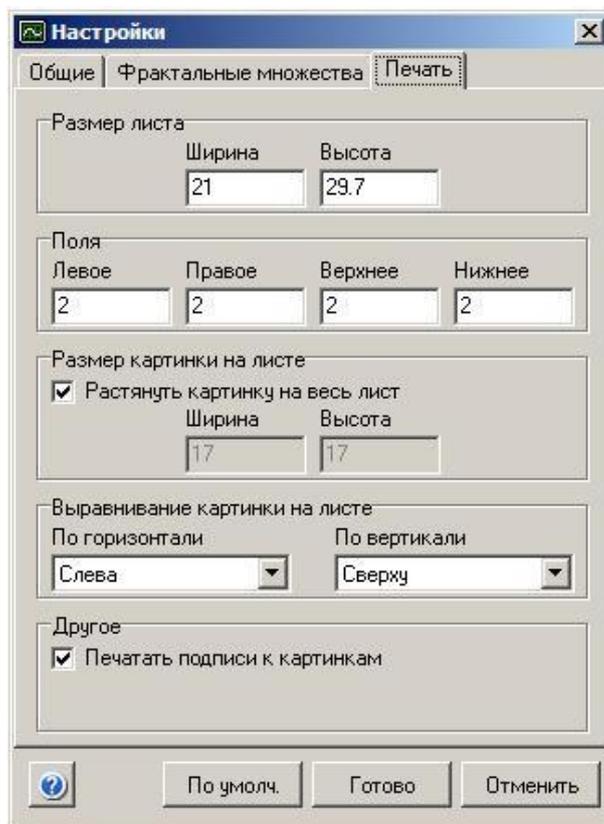


Рис. 3.11. Панель Настройки. Вкладка Печать

Подписи к картинкам при печати

Когда картинка распечатана, ниже печатаются: в случае графиков – названия, формулы, найденные корни, экстремумы, интегралы, шаг и отрезки изменения значений аргументов; 2D и 3D L-фракталы – аксиомы, правила, глубина, шаг, поворот; множества Мандельброта и Жюлиа – координаты окон.

Формат записи аксиомы и правил в программе Graphic

Пусть имеется некоторая строка, которую мы назовём аксиомой (axiom), и набор строк, называемых правилами (rule1, rule2, ..., ruleN). Аксиома может быть любой, а правила должны иметь вид «символ \rightarrow строка».

1-я строка – аксиома;

2-я строка – число, на которое надо разделить 360 для получения угла поворота;

3-я строка – число, равное количеству правил.

Строки – правила (количество которых определено в 3-ей строке) не содержат пробелов, 1-й элемент – заменяемый символ, остальные элементы – символы, на которые заменяется первый.

Пример:

Аксиома:

---G

Правила:

$G \rightarrow GFX[+G][-G]$

$X \rightarrow X[-FFF][+FFF]FX$

Сначала результирующая строка равна аксиоме. Станем просматривать её слева направо. Если встречается символ, являющийся первым символом одного из правил, заменим его на строку из соответствующего правила. И так несколько раз.

Таким образом, предыдущий пример будет выглядеть следующим образом:

---G

14

2

GGFX[+G][-G]

XX[-FFF][+FFF]FX

Примеры L-систем можно найти в папке, куда установлена программа в подкаталогах «Graphic/Lfr», «Graphic/3dlfr», «Graphic/Ifs». Это самые распространенные фракталы, которые можно построить с помощью описанного программного комплекса.

Глава 4. ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛОВ

4.1. Построение L-систем с использованием двух правил

При построении фракталов с использованием только одного порождающего правила возникает следующая трудность. Мы не можем изменить направление чтения правила на некоторых шагах, то есть читать его не слева направо, а справа налево. Без решения этой проблемы невозможно получить L-системы для различного класса кривых (кривая Пеано, дракон Хартера-Хейтуэя, мозаика Хагерти и т.д.).

Например, для того чтобы построить фрактал под названием «дракон Хартера – Хейтуэя», необходимо иметь возможность менять направление чтения порождающего правила, изображенного на рис. 4.1. В качестве инициатора, или аксиомы, используется кривая слева. Порождающее правило в данном случае заключается в том, чтобы нарисовать инициатор сначала в прямом, а затем в обратном направлении. Подобная схема не вписывается в рамки L-систем, использующих только одно порождающее правило. Эту проблему можно решить, введя две различных команды для передвижения вперед, например, X и Y. Будем считать, что черепашка интерпретирует X и Y одинаково, то есть как один шаг вперед.

С помощью этих двух букв порождающее правило для дракона можно записать следующим образом:

axiom = X,
newx — X+Y+,
newy = -X-Y.

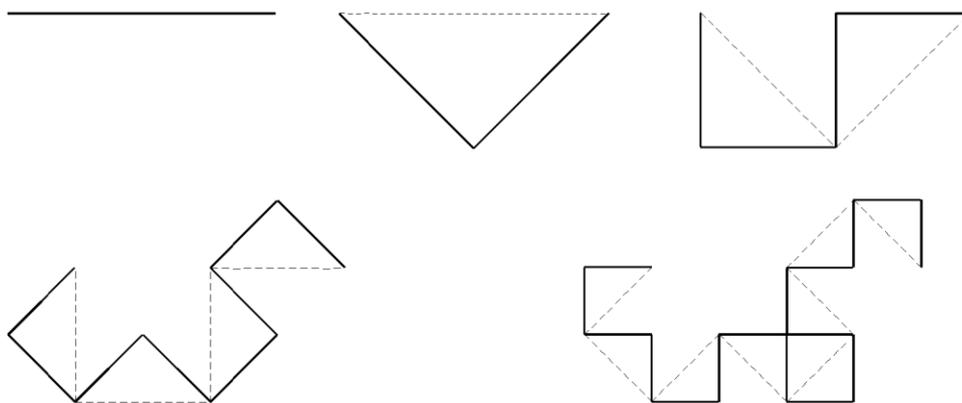


Рис. 4.1. Алгоритм построения дракона Хартера-Хейтуэя

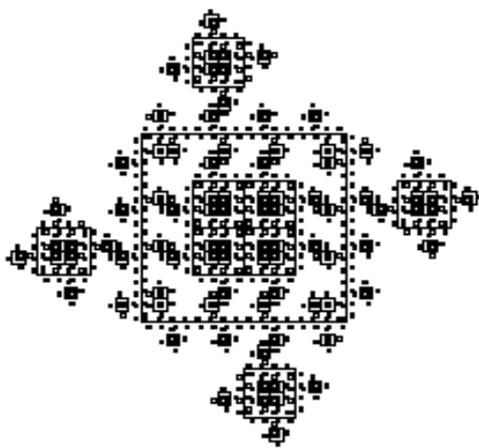


Рис. 4.2. Мозаика после 3-х итераций (Патрик Хагерти)

Однако нам не хотелось бы отказываться от первоначального подхода, при котором имеется только одна буква F, интерпретируемая как один шаг вперед. Чтобы вернуться в рамки этого подхода, будем считать буквы X и Y вспомогательными переменными, игнорируемыми черепашкой, и заменим их в порождающем правиле на FX и FY соответственно. Получим:

$$\begin{aligned} \text{axiom} &= FX, \\ FX &= FX+YF+, \\ YF &= -FX-YF. \end{aligned}$$

Далее замечаем, что того же результата можно добиться при помощи следующих порождающих правил:

$$\begin{aligned} \text{axiom} &= FX, \\ \text{newf} &= F, \\ \text{newx} &= X+YF+, \\ \text{newy} &= -FX-Y. \end{aligned}$$

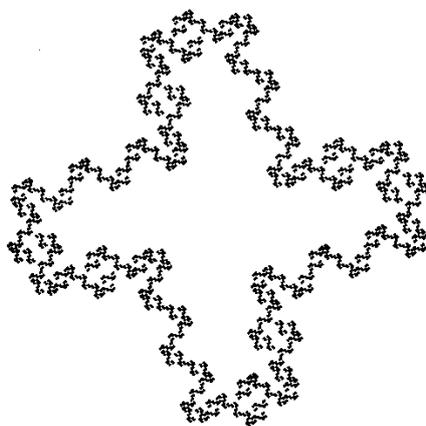


Рис. 4.3. Цепочка после 3-х итераций (Ян-Си Ло)

Ниже приведены несколько шагов построения дракона с использованием этих порождающих правил:

1-й шаг: $FX+YF+$

2-й шаг: $FX+YF++-FX-YF+$

3-й шаг: $FX+YF++-FX-YF++-FX+YF+ - -FX-YF+$

4-й шаг: $FX+YF++-FX-YF++-FX+YF+ - -FX-YF++ -FX+YF++-FX-YF+ - -FX+YF+ - -FX-YF+$

На рис. 4.4 изображен дракон после 12 итераций. Заметьте, что дракон состоит из нескольких похожих частей.

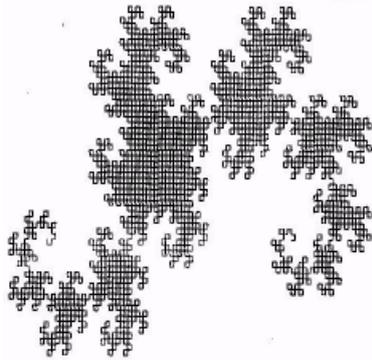


Рис. 4.4. Дракон Хартера-Хейтуэя после 12-и итераций

Запишем аксиому и порождающие правила для мозаики Хагерти.

Мозаика Хагерти (рис. 4.2, 4.5):

Аксиома – $F - F - F - F$

Порождающие правила –

$newF = F - B + F - F - F - FB - F + B - F + F + F + FB + FF$

$newB = BBBB$

Начальный угол – 0

Угол поворота – $\pi/2$

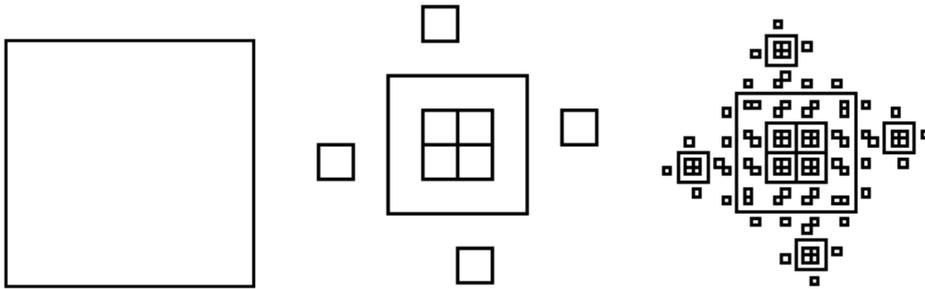


Рис. 4.5. Три итерации построения мозаики Хагерти

Цепочка Ян-Си-Ло (рис. 4.3, 4.6):

Аксиома – $F + F + F + F$

Порождающие правила –

$newF = F + B - F - FFF + F + B - F$

$newB = BBB$

Начальный угол – 0

Угол поворота – $\pi/2$

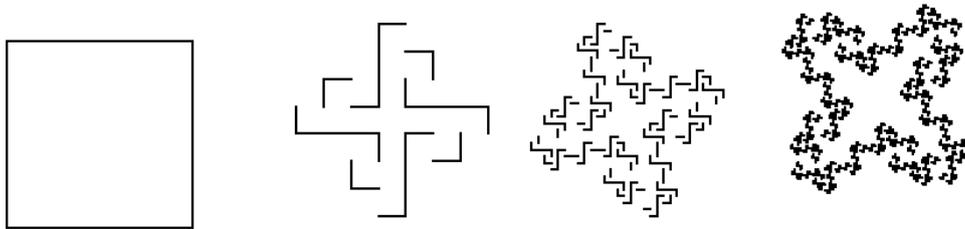


Рис. 4.6. Четыре итерации построения цепочки

Мы рассмотрели случаи построения L-систем с помощью более одного правила.

4.2. Правила ветвления

В заключение остановимся на операции ветвления. Когда мы встречаем символ [(открыть ветвь), мы запоминаем положение и направление черепашки, то есть переменные (x, y, α) , и возвращаемся к этим установкам позднее.

Для хранения триплетов x, y, α используется стек: $\begin{bmatrix} x_1, y_1, \alpha_1 \\ x_2, y_2, \alpha_2 \\ \dots \\ x_n, y_n, \alpha_n \end{bmatrix}$, причем но-

вые данные записываются в конец стека. Когда ветвь закрывается, переменным x, y, α присваиваются значения, считанные из конца стека. Затем эти значения из стека удаляются.

Таким образом, ветвление задается двумя символами:

[Открыть ветвь. Сохранить x, y, α в конце стека.

] Закреть ветвь. Присвоить переменным x, y, α значения, считанные из конца стека, после чего удалить их из стека.

На рис. 4.7, рис. 4.8 и рис. 4.9 изображены фракталы, построенные с помощью операции ветвления.

Цветок Брандон Нельсон (рис. 4.7):

Аксиома – $F[+F + F][-F - F][++F][--F]F$

Порождающие правила –

$newF = FF[+ + F][+F][F][-F][--F]$

Начальный угол – $\frac{3\pi}{2}$

Угол поворота – $\frac{\pi}{16}$

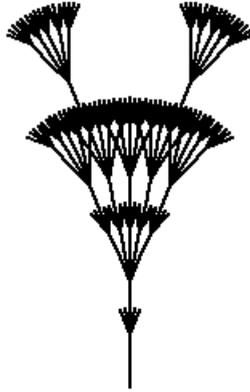


Рис. 4.7. Цветок (Брандон Нельсон) после трех итераций

Куст (рис. 4.8):

Аксиома – $-----F$

Порождающие правила –

$newF = +F - F - [-F + F +] + [+F - F - F]$

Начальный угол – 0

Угол поворота – $\frac{\pi}{8}$

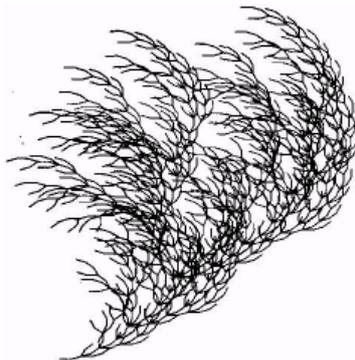


Рис. 4.8. Куст после 4-х итераций

Снежинка Джонг Ву Ким (рис. 4.9):

Аксиома – $[F]+[F]+[F]+[F]+[F]+[F]$

Порождающие правила –

$newF = F[+ + F][-FF]FF[+F][-F]FF$

Начальный угол – 0

Угол поворота – $\pi/3$

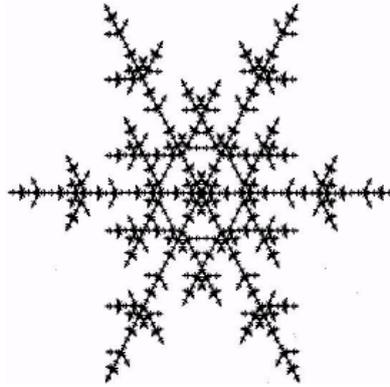


Рис. 4.9. Снежинка после 3-х итераций (Джонг Ву Ким)

4.3. Основные свойства и правила построения кривых Пеано, Гильберта и Госпера

В предыдущих параграфах мы рассмотрели множество непрерывных кривых на плоскости, полученных с помощью L-систем. Все эти кривые объединяет то, что их размерность удовлетворяет условию $1 \leq d < 2$. Возникает естественный вопрос, а существует ли кривая, размерность которой удовлетворяет условию $d = 2$? Ответ на этот вопрос был получен Джузеппе Пеано в 1890 году, ответ был положительный. Пеано построил непрерывную функцию, чья область определения – отрезок, а область значений – квадрат на плоскости.

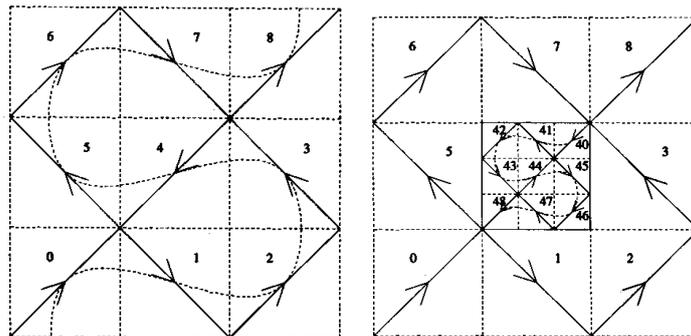


Рис. 4.10. Первые итерации построения кривой Пеано

Линия, соответствующая данной функции, называется *кривой Пеано* или *кривой, заполняющей плоскость*.

Начальным (иницирующим) элементом здесь можно выбрать единичный квадрат, каждая из сторон которого на следующем шаге заменяется генератором (рис. 4.11). Он состоит из девяти отрезков длины $\frac{1}{3}$, соединенных под прямым углом друг к другу. При такой геометрии неизбежны две точки самокасания 2–6 и 5–9.

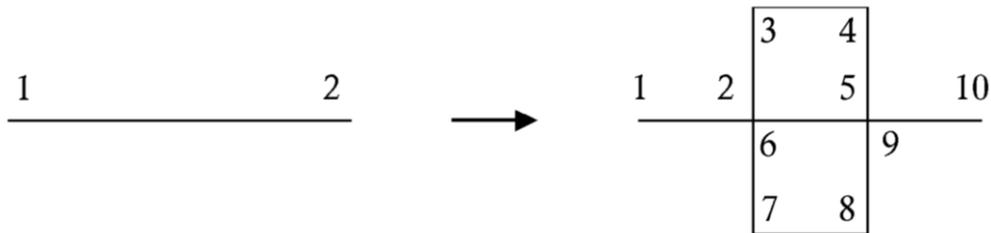


Рис. 4.11. Генератор для кривой Пеано

Затем каждый из отрезков образовавшейся фигуры длиной в $\frac{1}{3}$ преобразуется подобным же образом, и так до бесконечности. В результате возникает самоподобная непрерывная кривая, плотно заполняющая квадратную область с площадью, равной 2. Ее фрактальная размерность

$$D = -\frac{\ln 9}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 9}{\ln 3} = \frac{\ln 3^2}{\ln 3} = \frac{2 \ln 3}{\ln 3} = 2.$$

Данную кривую легко построить с помощью L-систем.

Кривая Пеано, заполняющая плоскость:

Аксиома – F

Порождающие правила –

$$newF = F - F + F + F + F - F - F - F + F$$

Начальный угол – $\frac{\pi}{4}$

Угол поворота – $\frac{\pi}{2}$

Существуют, однако, и кривые Пеано, в которых, в отличие от предыдущего случая, отсутствуют точки самокасания (так называемые самоизбегающие кривые). Одним из примеров такого рода является *кривая Госпера*. Инициатором для нее является отрезок единичной длины, а генератор показан на рис. 4.12. Фрактальная размерность данной кривой также равна 2.

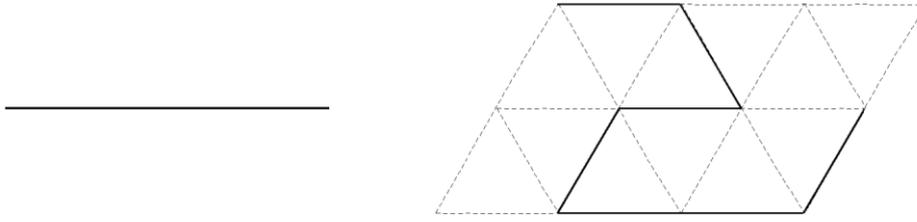


Рис. 4.12. Инициатор и генератор для кривой Госпера

Пунктиром на рис. 4.12 показана треугольная решетка, служащая своеобразной образующей для этого генератора. Следующие три шага построения кривой отображены на рис. 4.13.

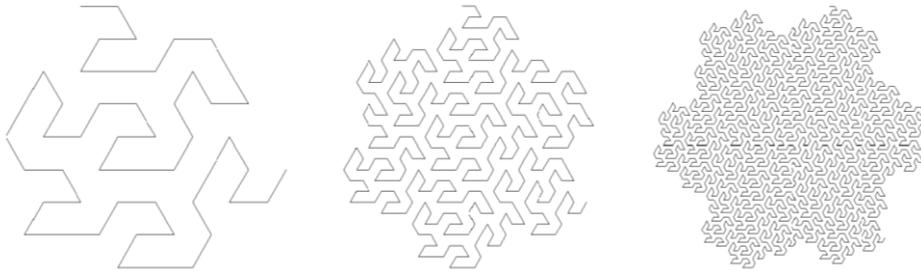


Рис. 4.13. Три итерации в построении кривой Госпера

Кривая Госпера, заполняющая плоскость:

Аксиома – XF

Порождающие правила –

$$newF = F$$

$$newX = X + YF + +YF - FX --FXFX - YF +$$

$$newY = -FX + YFYF + +YF + FX --FX - Y$$

Начальный угол – 0

$$\text{Угол поворота} = \frac{\pi}{3}$$

Интересной отличительной особенностью кривой Госпера является то, что граница области, называемой «островом Госпера», которую она заполняет в пределе бесконечного числа шагов, сама является фрактальной с нецелочисленной

размерностью $D = \frac{\ln 3}{\ln \sqrt{7}} \approx 1.1291$. Такие острова можно использовать для

непрерывного покрытия плоскости, так как они идеально стыкуются друг с другом. Более того, семь таких островов, состыкованных друг с другом (один в центре и шесть вокруг него), снова образуют остров Госпера, в три раза большего

размера. Подобным свойством из правильных многоугольников обладает только квадрат.

К числу других известных кривых, заполняющих плоскость, относятся кривая Гильберта, Серпинского и другие.

Кривая Гильберта, заполняющая плоскость (рис. 4.14):

Аксиома – X

Порождающие правила –

$$newF = F$$

$$newX = -YF + XFX + FY -$$

$$newY = +XF - YFY - FX +$$

Начальный угол – 0

Угол поворота – $\pi/2$

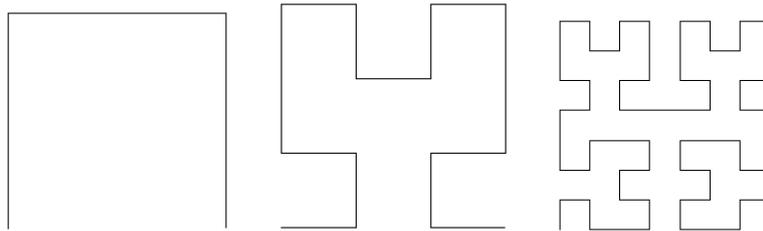


Рис. 4.14. Первые три итерации построения кривой Гильберта

Кривая Серпинского, заполняющая плоскость (рис. 4.15):

Аксиома – $F + XF + F + XF$

Порождающие правила –

$$newF = F$$

$$newX = XF - F + F - XF + F + XF - F + F - X$$

$$newY = -FX - Y$$

Начальный угол – 0

Угол поворота – $\pi/2$

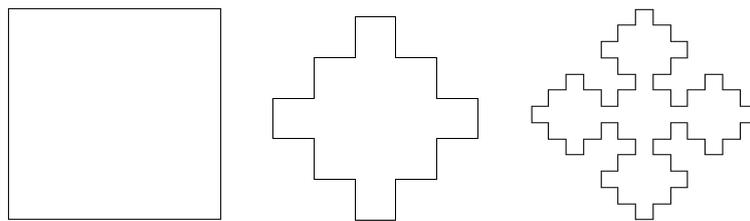


Рис. 4.15. Первые три итерации построения кривой Серпинского

Раздел 2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Глава 5. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

5.1. Предварительные сведения из теории множеств

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. Можно сказать, что множество возникает путем объединения отдельных предметов в одно целое, или множество – это любая определенная совокупность объектов. Объекты, из которых составлено множество, называются его элементами. Элементы множества различны и отличимы друг от друга.

Элементы и множества. Если объект x является элементом множества A , то говорят, что x принадлежит A . Обозначение: $x \in A$. В противном случае говорят, что x не принадлежит A . Обозначение: $x \notin A$. Если все векторы множества A содержатся в множестве B , это будет обозначаться $A \subset B$. Символ \emptyset будем использовать для обозначения *пустого множества* (множества, не содержащего ни одного элемента). При этом для любого множества A всегда справедливо выражение $\emptyset \subset A$.

Объединение и пересечение множеств. Объединение $A \cup B$ двух множеств A и B есть множество всех точек, содержащихся либо в A , либо в B , либо и в A , и в B . Пересечение $A \cap B$ двух множеств A и B есть множество всех точек, содержащихся и в A , и в B .

Дополнение множества. Дополнение множества A до множества X есть множество $X \setminus A$ всех точек из X , не содержащихся в A , то есть $x: x \in X, x \notin A$.

Обозначим через R^n множество всех n -мерных вещественных векторов $X = x_1, x_2, \dots, x_n$. Определим на нем операции векторного сложения и умножения на скаляр:

$$X + Y = x_1, x_2, \dots, x_n + y_1, y_2, \dots, y_n = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n,$$
$$\lambda X = \lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n.$$

Согласно Хаусдорфу, в множестве R установлена *общая метрика*, если каждой паре элементов x, y отнесено неотрицательное число $\rho(x, y)$, называемое рас-

стоянием от x до y . Метрика называется *собственной*, если расстояние $\rho(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям, называемым *аксиомами метрического пространства*:

1. Аксиома тождества. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
2. Аксиома симметрии. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
3. Аксиома треугольника. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Множество R с установленной в нем общей метрикой называется *общим метрическим пространством*; в частности, если метрика собственная, то R называется *метрическим пространством*. Элементы R будем называть точками пространства. Если даны два подмножества $A \supset 0$ и $B \supset 0$ (подмножество не нулевое, похоже на обозначение $a > 0$) общего метрического пространства, то число $\inf \rho(x, y) \quad a \in A, b \in B$ называется *расстоянием от множества A до множества B* и обозначается $\rho(A, B)$. Очевидно, в метрическом пространстве $\rho(A, B) = \rho(B, A)$, так что можно говорить просто о *расстоянии* между A и B .

Когда точки x, y пробегают множество $M \subseteq R$ пространства R , множество чисел $\rho(x, y)$ ограничено снизу. Если это множество ограничено сверху, т.е. существует $\sup \rho(x, y)$, при $x \in M, y \in M$, эта верхняя грань называется *диаметром* множества M и обозначается $d(M)$; множество в этом случае называют *ограниченным*.

Общее топологическое пространство, обладающее хотя бы одной собственной метрикой, называется *метризуемым*.

Для n -мерного евклидовского пространства R^n *расстояние* определяется по формуле $\rho(x, y) = \sqrt{x_1 - y_1^2 + x_2 - y_2^2 + \dots + x_n - y_n^2}$, которое является *метрикой*, которую мы будем называть *евклидовой метрикой*.

Функция $\rho(x, y)$ с такими свойствами называется метрикой, а ее значение расстоянием между точками.

Приведем несколько примеров метрических пространств.

Пример 1. Пусть $X = R$, $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример 2. Пусть $X = C[a, b]$ – множество непрерывных функций на отрезке a, b . Три наиболее важные метрики на этом множестве:

$$\rho(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \quad \rho(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt, \quad \rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt}.$$

Пример 3. X – произвольное множество, $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$, $\rho(x, y) = 0$ при $x = y$. Это – так называемая *дискретная метрика*.

Пример 4. Рассмотрим важный класс метрик в R^n , а именно класс p -метрик. P -метрика является обобщением евклидовой метрики и совпадает с ней при $p = 2$. P -метрика определяется следующим образом:

$$\|x - y\|_p = \left(\sum_i |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}. \text{ Заметим, что } \|x - y\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x - y\|_p = \max_i |x_i - y_i|.$$

Для доказательства неравенства треугольника в некоторых этих примерах необходимо неравенство Минковского (для конечных сумм и интегралов):

$$\begin{aligned} \sum |a_i + b_i|^p &\leq \sum |a_i|^p + \sum |b_i|^p \\ \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что две метрики $d_1(x, y)$ и $d_2(x, y)$, определенные на X , эквивалентны, если существуют такие $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$, что $K_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq K_2 d_1(x, y)$ для всех x и y .

Понятие предела в метрических пространствах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X, ρ – метрическое пространство. Последовательность точек $x_n, x_n \in X$ называется *сходящейся* к $x \in X$ в метрике ρ , если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N > 0$, что для любого $n > N$ выполняется $d(x_n, x) < \varepsilon$.

x_n фундаментальная последовательность

$$x = \lim x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N \rho(x_n, x) < \varepsilon \quad (5.1)$$

Точка x называется *пределом* последовательности x_n .

Заметим, что свойство сходимости не меняется при замене метрики на эквивалентную.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность x_n называется *фундаментальной последовательностью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N > 0$, что для любых $m > N, n > N$ выполняется $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

$\{ \}$ фундаментальная последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n, m > N (\rho(x_n, x_m) < \varepsilon) \quad (5.2)$$

Сходящаяся последовательность является фундаментальной последовательностью, обратное не всегда верно, так как пространство может не содержать предел последовательности x_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к точке этого пространства, называется *полным метрическим пространством*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Точка x называется *предельной точкой* X , если существует последовательность x_n в $X \setminus x$, сходящаяся к этой точке.

Множество, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым*. Множество A со всеми своими предельными точками называется *замыканием множества A* и обозначается \bar{A} . *Внутренность множества A* есть объединение всех открытых множеств, входящих в A (Обозначается: A°). Внутренность множества есть открытое множество. *Границей множества A* называется множество $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка A называется *пределом функции* $f: X, \rho_1 \rightarrow Y, \rho_2$ в точке a если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < \rho_1(a, x) < \delta$ $x \in X$ выполняется $\rho_2(A, f(x)) < \varepsilon$.

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \quad 0 < d_1(a, x) < \delta \Rightarrow d_2(A, f(x)) < \varepsilon$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функция $f: X, d_1 \rightarrow Y, d_2$ называется *непрерывной в точке a* , если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $d_1(a, x) < \delta$, $x \in X$ выполняется $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Используя понятие предела, мы можем сказать, что f непрерывна в a , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Говорят, что функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $B(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ называется шаром с центром в a и радиусом ε .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество D называется открытым в X , если вместе с каждой точкой $x \in D$ в D содержится некоторый шар $B(x, \varepsilon)$.

Пример 1. Шар $B(a, \varepsilon)$ является открытым множеством. Этот факт легко доказать, используя неравенство треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество $\bar{B}(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq \varepsilon\}$ называется *замкнутым шаром с центром в a и радиусом ε* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество D называется *замкнутым*, если $X \setminus D$ открытое множество.

Пример 2. Шар $\bar{B}(a, \varepsilon)$ является замкнутым множеством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка a называется *предельной точкой* множества D , если в любом шаре $B(a, \varepsilon)$ содержится бесконечно много точек из множества D .

Теорема 1. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Теорема 2. (Свойства открытых множеств) Объединение любого числа открытых множеств есть открытое множество. Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Теорема 3. (Свойства замкнутых множеств) Пересечение любого числа замкнутых множеств есть замкнутое множество. Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Покрывания, подпокрывания и компактные множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дано множество X . Семейство множеств $C = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется покрыванием X , если $X \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть дано топологическое пространство X, T , где X — произвольное множество, а T — определённая на X топология. Тогда семейство открытых множеств $C = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset T$ называется (открытым) покрыванием $Y \subset X$, если $Y \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если \tilde{N} — покрывание множества Y , то любое подмножество $D \subset C$, также являющееся покрыванием Y , называется *подпокрыванием*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если каждый элемент одного покрывания является подмножеством какого-либо элемента второго покрывания, то говорят, что первое покрывание вписано во второе. Более точно, покрывание $D = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ вписано в покрывание $C = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, если $\forall \beta \in B \exists \alpha \in A$ такое, что $V_\beta \subset U_\alpha$.

Свойство 1. Любое подпокрывание вписано в изначальное покрывание. Обратное, вообще говоря, неверно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Покривание $C = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множества Y называется *локально конечным*, если для каждой точки $y \in Y$ существует окрестность $U \ni y$, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов C , то есть множество $\{\alpha \in A \mid U_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$ конечно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Понятие покрывания тесно связано с понятием компактности множества. В частности,

- Y называется **компактным**, если любое его покрытие содержит конечное подпокрытие;
- Y называется **паракомпактным**, если в любое его покрытие можно вписать локально конечное покрытие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Множество $K \subset X$ называется *компактом*, если из любого покрытия K открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие.

Пример 1. Множество $a, b \subset \mathbb{R}$ является компактом в силу леммы о конечном покрытии.

Теорема 1. Компакт является замкнутым множеством.

Пусть $K \subset X$ – компакт, пусть a – предельная точка K и $a \notin K$. Для каждой точки $x \in K$ построим окрестность U_x , не содержащую a . Тогда

$K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$. Так как K – компакт, то из этого покрытия можно извлечь ко-

нечное подпокрытие $K \subset \bigcup_k U_{x_k}$. Пусть $O_k(a)$ – окрестность a , не пересе-

кающаяся с U_{x_k} . Пусть $O(a) = \bigcap_k O_k(a)$. $O(a)$ не содержит точек из K ,

что противоречит с тем, что a – предельная точка K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество D ограничено в X, d , если существует точка $a \in X$ и конечное число $r > 0$ такое, что для каждого $x \in D$ выполняется $d(a, x) < r$.

Теорема 2. Компакт является ограниченным множеством.

Рассмотрим покрытие $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(0, n)$. Так как K – компакт, то из этого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие. Откуда следует, что $K \subset B(0, n)$, следовательно, K – ограничено.

Теорема 3. Пусть $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$ – последовательность непустых вложенных компактов, тогда $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Пусть $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$. Рассмотрим множество $G_i = K_1 \setminus K_i$. G_i – открытые множества в K_1 . Заметим, что $K_1 \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$. Так как K_1 – компакт, то можно выделить конечное подпокрытие, то есть существует такой номер m , что $K_1 \subset G_m$, откуда следует, что $K_m = \emptyset$, но это противоречие с условием теоремы.

Теорема 4. Замкнутое подмножество компакта является компактом.

Пусть K – компакт, а F – его замкнутое подмножество. Покроем множество F системой открытых множеств: $F \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Пусть $V = X \setminus F$. Заметим,

что V – открытое множество и $K \subset V \cup \bigcup_{\alpha} U_\alpha$. Т.к. K – компакт, то из этого

покрытия выделим конечное подпокрытие, т.к. $F \subset K$, то $K \subset V \cup \bigcup_{i \in 1..k} U_i$. За-

метим также, что $F \cap V = \emptyset$, поэтому покрытие F – произвольное. И, следовательно, F – компакт.

Теорема 5. (Критерий компактности в R^n) Множество $K \subset R^n$ – компакт тогда и только тогда, когда K замкнуто и ограничено.

Прямое следствие. Верно в силу теорем 1 и 2.

Обратное следствие. Пусть K – замкнуто и ограничено. Так как K – ограничено, то существует промежуток $J = -A, A \times \dots \times -A, A$ такой, что $K \subset J$. Так как J – компакт и K – замкнуто, то по теореме 4 K – компакт.

Приведем без доказательства критерий компактности в произвольных метрических пространствах.

Теорема 6. (Критерий компактности) Множество K – компакт тогда и только тогда, когда из любой последовательности точек x_n из K можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность.

Теорема 7. Пусть X, ρ_1, Y, ρ_2 – метрические пространства, A – компакт в X , $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Тогда $f(A)$ – компакт.

Пусть y_n – последовательность из $f(A)$, а x_n – последовательность из A , причем $y_n = f(x_n)$. Так как A компактно, то из последовательности

x_n можно извлечь сходящуюся к некоторой точке $x \in A$ подпоследовательность x_{n_k} . В силу непрерывности f имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Таким обра-

зом, подпоследовательность y_{n_k} из $f(A)$ сходится к точке $f(x) \in f(A)$.

5.2. Метрика Хаусдорфа

Одним из основных вопросов теории фракталов является вопрос о сходимости некоторой последовательности множеств к фракталу. Для этого необходимо определить предел последовательности множеств, а для этого необходимо ввести соответствующее пространство и метрику.

Пусть X, d – полное метрическое пространство. Определим $H X$ как пространство всех непустых компактных подмножеств X . Таким образом, каждая точка в $H X$ – это компактное подмножество X .

Определим расстояние между $x \in X$ и множеством $B \in H X$ следующим образом:

$$d(x, B) = \min \{d(x, y) \mid y \in B\}. \quad (5.2)$$

Этот минимум существует и конечен, так как B – компакт, а следовательно, B замкнуто и ограничено. Определим расстояние между A и B из $H X$ как

$$d(A, B) = \max \{d(x, B) \mid x \in A\}. \quad (5.3)$$

В силу компактности A , этот максимум существует и конечен. Перечислим (без доказательства) некоторые свойства функции d , которые понадобятся далее:

$$A \subset B, x \in X \Rightarrow d(x, B) \leq d(x, A), \quad (5.4)$$

$$A \neq B \Rightarrow d(A, B) \neq 0 \vee d(B, A) \neq 0, \quad (5.5)$$

$$d(A \cup B, C) = \max \{d(A, C), d(B, C)\}. \quad (5.6)$$

Заметим, что $d(A, B)$ метрику не определяет, так как не выполняются аксиомы метрики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Метрика h , определяемая как $h(A, B) = \max \{d(A, B), d(B, A)\}$, называется *метрикой Хаусдорфа*, а метрическое пространство $H X, h$ – *метрическим пространством Хаусдорфа*.

Барнсли называл $H X, h$ «пространством, где обитают фракталы». Покажем, что $h(A, B)$ действительно определяет метрику.

Теорема 1. Функция $h(A, B)$ является метрикой на $H X$.

Для доказательства необходимо проверить выполнимость аксиом.

1. $h(A, B) \geq 0$. Это следует из определения h , так как величины $d(A, B)$ и $d(B, A)$ неотрицательны.

2. $h(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$. Если $A = B$, то, очевидно, $h(A, B) = 0$. С другой стороны, если $h(A, B) = 0$, то $d(A, B) = d(B, A) = 0$. И вследствие свойств функции d (свойство 2) получаем $A = B$.

3. $h(A, B) = h(B, A)$. Это утверждение следует из определения h .

4. $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$. Сначала покажем, что для любых $A, B, C \in H X$ выполняется $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. Докажем первое ра-

венство. Пусть $a \in A$, тогда $d(a, C) = \min_{c \in C} d(a, c)$. Для каждого $b \in B$:
 $d(a, C) \leq \min_{c \in C} d(a, b) + d(b, c) \leq d(a, b) + \min_{c \in C} d(b, c) \leq d(a, B) +$
 $+ \max_{c \in C} d(b, c) \leq d(a, B) + d(B, C)$. Так как это равенство верно при лю-
 бом $a \in A$, то $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$. Далее, используем, что
 $\max_{a, b} d(a, b) + \max_{c, d} d(c, d) \leq \max_{a, c} d(a, c) + \max_{b, d} d(b, d)$, и получаем: $h(A, C) =$
 $= \max_{a, c} d(a, c), d(c, a) \leq \max_{a, b} d(a, b) + d(b, c), d(c, b) + d(b, a) \leq$
 $\leq \max_{a, b} d(a, b), d(b, a) + \max_{c, a} d(c, a), d(a, c) = h(A, B) + h(B, C)$.

Теперь, имея метрику в $H(X)$, мы можем определить понятие предела:

$$\lim E_n = E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N \quad h(E_n, E) < \varepsilon. \quad (5.7)$$

На практике определить расстояние Хаусдорфа между двумя множествами бывает не просто, но существует другой подход к вычислению расстояния Хаусдорфа, связанный с понятием расширения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для заданного множества A и радиуса $r > 0$ *расширением A радиуса r* (обозначается $A+r$) называется объединение всех замкнутых шаров радиуса r с центром в A :

$$A+r = \bigcup_{x \in A} \bar{B}(r, x). \quad (5.8)$$

Теорема 2. Пусть $A, B \in H(X)$, $\varepsilon > 0$. Расстояние Хаусдорфа удовлетворяет соотношению:

$$h(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B+\varepsilon \quad \& \quad B \subset A+\varepsilon. \quad (5.9)$$

Покажем, что $d(A, B) \leq \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $A \subset B+\varepsilon$. (Доказательство утверждения $d(B, A) \leq \varepsilon \Leftrightarrow B \subset A+\varepsilon$ аналогично). Предположим, что $d(A, B) \leq \varepsilon$. Тогда для любой точки $x \in A$ имеем $d(x, B) \leq \varepsilon$, откуда следует, что $x \in B+\varepsilon$. Поэтому $A \subset B+\varepsilon$.

Обратно, если $A \subset B+\varepsilon$, тогда для каждой точки $x \in A$ существует точка $y \in B$ такая, что $d(x, y) \leq \varepsilon$. Из этого следует, что $d(x, B) \leq \varepsilon$ для всех $x \in A$ и поэтому $d(A, B) \leq \varepsilon$.

Следствиями этой теоремы являются следующие два утверждения.

Теорема 3. Пусть E – компактное множество, E_n – последовательность компактных множеств. Выражение $\lim E_n = E$ справедливо тогда и только то-

гда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для каждого $n < N$ выполняется $E_n \subset E + \varepsilon$ и $E \subset E_n + \varepsilon$.

Теорема 4. Пусть $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$ – последовательность непустых вложенных компактов. Пусть $E = \bigcap_{n \in 1.. \infty} E_n$. Тогда E непустое и существует предел $\lim E_n = E$ в метрике Хаусдорфа.

Множество E непустое в силу теоремы о вложенных компактах. В соответствии с предыдущим следствием необходимо показать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n \in N: E_n \subset E + \varepsilon \ \& \ E \subset E_n + \varepsilon$. Так как множества упорядочены по убыванию, то $E \subset E_n$, следовательно, необходимо рассмотреть первый случай. Множество $E + B_{\varepsilon, 0} = \{x + y \mid x \in E, y \in B_{\varepsilon, 0}\}$ есть объединение шаров, а следовательно, открыто и содержится в $E + \varepsilon$. Если же множество, являющееся пересечением компактных вложенных множеств, содержится в открытом множестве, то существует такой номер, начиная с которого элементы последовательности множеств содержатся в этом открытом множестве (оставим этот факт без доказательства). Таким образом, компактные множества E_n содержатся в $E + \varepsilon$.

Данное следствие имеет непосредственное отношение к фракталам, получаемым последовательным выбрасыванием открытых множеств. Например, множество Кантора, треугольник Серпинского.

Теорема 5. Пространство $H \ R^n$, h – полное.

Пусть A_n – фундаментальная (в метрике h) последовательность множеств в $H \ R^n$, следовательно, существует такая константа $M > 0$, что $h(A_1, A_n) < M$ для $n \in N$ и поэтому $A_n \subset A_1 + M$ (оставим этот факт без доказательства). Пусть $E_n = \overline{A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots}$. Тогда E_n являются замкнутыми и ограниченными множествами, а следовательно, компактными в R^n . Пусть $E = \bigcap_{n \in 1.. \infty} E_n$. Так как множества E_n упорядочены по убыванию, то из второго следствия вытекает, что $E_n \rightarrow E$ в метрике Хаусдорфа при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что E есть также предел последовательности A_n , то есть $\lim E_n = E$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует N_1 такое, что из $n > N_1$ следует $E_n \subset E + \varepsilon$ и $E \subset E_n + \varepsilon$. В частности, из второго условия следует, что $A_n \cup A_{n+1} \cup \dots \subset E + \varepsilon$, то есть $A_n \subset E + \varepsilon$. Так как A_n удовлетворяет критерию Коши в метрике Хаусдорфа, то существует такое целое N_2 , что из

$n, m > N_2$ следует, что $A_n \subset A_m + \varepsilon$ и $A_m \subset A_n + \varepsilon$. Фиксируем $n > N_2$. При любом $m > N_2$ получим $A_m \cup A_{m+1} \cup \dots \subset A_n + \varepsilon$, $E_m = A_m \cup A_{m+1} \cup A_{m+2} \cup \dots \subset A_n + \varepsilon$, $E = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} E_m \subset A_n + \varepsilon$. Таким образом, при $n > \max N_1, N_2$ имеем, что $A_n \subset E + \varepsilon$ и $E \subset A_n + \varepsilon$. Следовательно, $E = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Теорема 6. Пусть A – компактное подмножество R^n , а $H A$ – совокупность всех непустых компактных множеств A , тогда метрическое пространство $H A, h$ компактно.

Сжимающие отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $f : X \rightarrow X$ в метрическом пространстве X, d называется *сжимающим*, если существует такое число $s \in [0, 1)$, что для любых x_1 и x_2 из X выполнено

$$d(f x_1, f x_2) \leq s d(x_1, x_2). \quad (5.10)$$

Константа s называется *коэффициентом сжатия* отображения f .

Преобразования вида $f \circ f \circ \dots \circ f(x) = f^n(x)$ называются итерациями преобразования f . Точка a такая, что $f(a) = a$ называется неподвижной точкой отображения f .

Теорема 1. Пусть $f : X \rightarrow X$ – сжимающее отображение, тогда существует единственная точка a такая, что $f(a) = a$, и для любой точки $x_0 \in X$ последовательность итераций $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0)$ сходится к a .

Покажем, что последовательность x_n фундаментальна. Для этого воспользуемся критерием Коши:

$$x_n \text{ фундаментальна} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n, m > N : d(x_n, x_m) < \varepsilon. \quad (5.11)$$

Имеем $d(x_{n+1}, x_n) = d(f x_n, f x_{n-1}) \leq s d(x_n, x_{n-1}) = d(f x_{n-1}, f x_{n-2}) \leq s^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq s^n d(x_0, x_1)$. Откуда $d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \leq s^{n+k-1} + \dots + s^{n+1} + s^n d(x_1, x_0) \leq \frac{s^n}{1-s} d(x_1, x_0)$.

Откуда при $n > m$ следует: $d(x_n, x_m) \leq \frac{s^m}{1-s} d(x_1, x_0)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем номер N , удовлетворяющий условию:

$$\frac{s^m}{1-s} d(x_1, x_0) < \varepsilon, \quad m > N.$$

Это можно сделать всегда, так как $s < 1$, и, следовательно, $s^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Таким образом, критерий Коши выполняется и последовательность x_n сходится. Обозначим предел этой последовательности через a . Так как f непрерывно, то имеем $f a = f \lim x_n = \lim f x_n = \lim x_{n+1} = a$. Покажем, что точка a единственна. Пусть a_1, a_2 $a_1 \neq a_2$ такие, что $f a_1 = a_1$, $f a_2 = a_2$. Тогда $d a_1, a_2 = d f a_1, f a_2 \leq s d a_1, a_2$. Так как $s < 1$, то получаем противоречие.

Паутинные диаграммы

Пусть $f : R \rightarrow R$ – вещественная функция, отображающая отрезок a, b в a, b . Предположим также, что функция $f x$ дифференцируема на a, b , и $|f' x| \leq s < 1$ на a, b . Таким образом, f – сжимающее отображение (это следует из теоремы Лагранжа). Метод итераций для нахождения неподвижной точки состоит в следующем. Выберем некоторую начальную точку $x_0 \in a, b$. Положим: $x_{n+1} = f x_n \quad n = 1, 2, \dots$. Тогда теорема о сжимающем отображении говорит, что последовательность x_n сойдется к неподвижной точке отображения x_f . Изобразим этот процесс графически с помощью так называемой **паутинной диаграммы**. Паутинная диаграмма строится следующим образом. Начинаем в точке x_0, x_1 , перемещаемся в точку x_1, x_1 , затем в x_1, x_2 . И вообще, на каждом шаге перемещаемся из точки x_{n-1}, x_n в x_n, x_n , а затем в x_n, x_{n+1} . Построение этих шагов на экране и дает графическое представление процесса сходимости при $n \rightarrow \infty$.

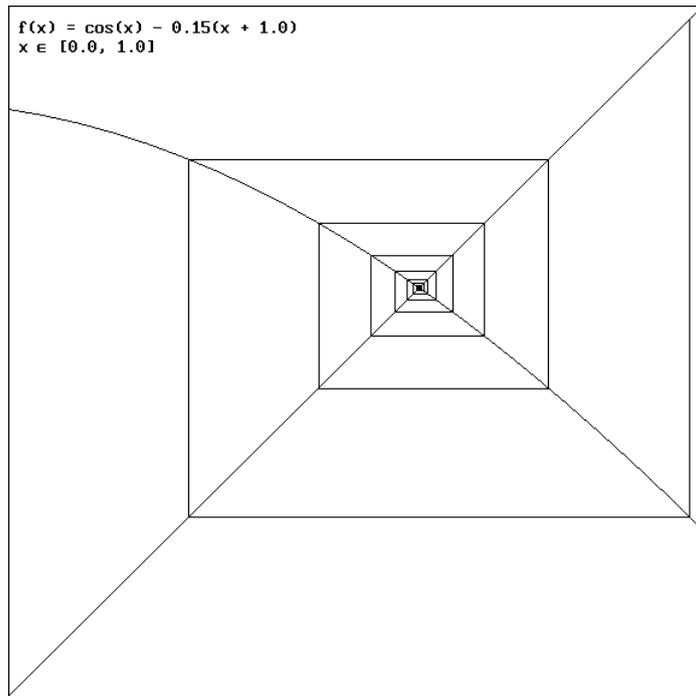


Рис. 5.1. Паутинная диаграмма 1

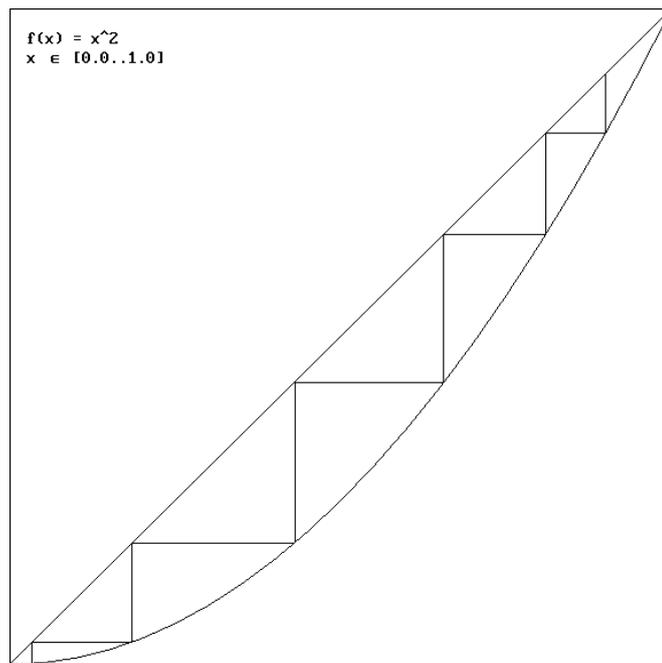


Рис. 5.2. Паутинная диаграмма 2

5.3. Определение и свойства аффинного преобразования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Преобразованием называется взаимнооднозначное отображение множества на себя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение пространства в себя называется *аффинным преобразованием*, если найдутся такие две аффинные системы координат, что координаты любой точки в одной из них являются координатами ее образа в другой.

Заметим, что аффинное преобразование является преобразованием в смысле первого определения.

Допустим, первая из фигурирующих в определении аффинного преобразования f систем координат $Oe_1e_2e_3$ фиксирована. Пусть M_i – концы векторов e_i , отложенных от точки O . Тогда вторая система обязательно имеет вид $O'e'_1e'_2e'_3$, где $O' = f O$, $e'_i = f O f M_i$. Это следует из определения координат. Таким образом, в определении можно брать одну систему координат и говорить, что преобразование аффинно относительно этой системы координат.

Перечислим некоторые свойства аффинных преобразований.

1. Всякое аффинное преобразование порождает взаимнооднозначное отображение на множестве всех векторов.

Здесь и далее первая система координат (СК), в определении аффинного преобразования, будет называться «старой» СК, а вторая СК – «новой».

Пусть $M_1 = x_1, y_1, z_1$, $M_2 = x_2, y_2, z_2$, $M_3 = x_3, y_3, z_3$, $M_4 = x_4, y_4, z_4$ в «старой» СК, причем $\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4}$. При аффинном преобразовании вектору $\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ ставится в соответствие вектор $\overline{M'_1M'_2} = x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1, z'_2 - z'_1$ с теми же координатами, но в «новой» системе координат. Аналогичным образом вектору $\overline{M_3M_4}$ ставится в соответствие вектор $\overline{M'_3M'_4}$. Имеем $\overline{M'_1M'_2} = \overline{M'_3M'_4}$, так как их координаты в «новой» СК совпадают. Таким образом, определение аффинного преобразования на множестве векторов корректно. Взаимнооднозначность преобразования следует из различия координат векторов.

2. Аффинное преобразование множества векторов является линейным преобразованием.

Преобразование f линейно тогда и только тогда, когда для любых векторов m_1 , m_2 и числа λ выполняется: $f m_1 + m_2 = f m_1 + f m_2$ и $f \lambda m_1 = \lambda f m_1$.

При аффинном преобразовании коллинеарные векторы переходят в коллинеарные векторы, а компланарные в компланарные.

Пусть $m_1 \parallel m_2$, если один из них нулевой, то все очевидно. Пусть векторы не нулевые, тогда существует λ такое, что $m_2 = \lambda m_1$, и в силу линейности аффинных преобразований f имеем $f m_2 = f \lambda m_1 = \lambda f m_1$, следовательно, $f m_1 \parallel f m_2$. Утверждение про компланарность доказывается аналогично.

3. Множество всех аффинных преобразований плоскости (пространства) есть подгруппа группы всех преобразований плоскости (пространства).

4. Под действием аффинного преобразования прямая переходит в прямую, а плоскость в плоскость. При этом сохраняется параллельность.

5. При аффинном преобразовании плоскости (пространства) переводящем прямую d в прямую d' , отрезок $M_1 M_2$ прямой d переходит в отрезок $M'_1 M'_2$ прямой d' . А точка M , делящая $M_1 M_2$ в некотором отношении, переходит в точку M' , делящую $M'_1 M'_2$ в том же отношении.

Пусть $M_1 = x_1, y_1, z_1, M_2 = x_2, y_2, z_2$ в «старой» СК. Известно, что $\overline{M_1 M} = \lambda \overline{M M_2}$. Тогда $M = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right)$. По определению аффинных преобразований в «новой» СК получаем следующее: $M'_1 = x_1, y_1, z_1, M'_2 = x_2, y_2, z_2, M' = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right)$, т.е. M' делит $M'_1 M'_2$ в отношении λ .

Так как все внутренние точки отрезка – это точки, делящие отрезок в отношении $\lambda \in (0, 1)$, то внутренние точки отрезка переходят во внутренние.

6. Пусть O, A, B и O', A', B' две тройки точек, каждая из которых не лежит на одной прямой. Тогда существует единственное аффинное преобразование f такое, что $O' = f O, A' = f A$ и $B' = f B$.

7. Пусть O, A, B, C и O', A', B', C' две четверки точек, каждая из которых не лежит в одной плоскости. Тогда существует единственное аффинное преобразование f такое, что $O' = f O, A' = f A, B' = f B$ и $C' = f C$.

Пусть $e_1 = \overline{OA}, e_2 = \overline{OB}, e_3 = \overline{OC}, e'_1 = \overline{O'A'}, e'_2 = \overline{O'B'}, e'_3 = \overline{O'C'}$. Из условия некомпланарности точек следует, что $Oe_1 e_2 e_3$ и $O'e'_1 e'_2 e'_3$ суть базисы. Пусть $Oe_1 e_2 e_3$ – «старая» СК, $O'e'_1 e'_2 e'_3$ – «новая» СК. По определению аффин-

ных преобразований существует такое преобразование, переводящее «старую» систему координат (СК) в «новую» СК. Тогда $O = 0,0,0$ перейдет под действием f в $O' = 0,0,0$. $A = 1,0,0$ в $A' = 1,0,0$ и т. д. Аффинное преобразование единственно, т.к. при фиксировании «старой» СК однозначно определяется «новая» СК.

8. АП плоскости (пространства) сохраняет отношение площадей параллелограммов (отношение объемов параллелепипедов).

Здесь были рассмотрены случаи размерности 2 и 3, хотя все легко обобщается на случай произвольной размерности.

Аналитическое выражение аффинного преобразования

Пусть в пространстве заданы две аффинные системы координат (АСК): $Oe_1e_2e_3$ – «старая» СК и $O'e'_1e'_2e'_3$ – «новая» СК.

Запишем разложение базисных векторов «нового» базиса в «старом» базисе:

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3; \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3; \\ e'_3 &= a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Пусть $M = x, y, z$ в «старой» СК, тогда по определению аффинных преобразований $f M = M' = x', y', z'$ в «новой» СК. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= xe_1 + ye_2 + ze_3, \\ \overline{OO'} &= x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3, \\ \overline{OM'} &= x'e_1 + y'e_2 + z'e_3, \\ \overline{O'M'} &= xe'_1 + ye'_2 + ze'_3. \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \overline{OM'} &= \overline{OO'} + \overline{O'M'} = x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3 + xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3 + \\ &+ \left[x a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + y a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + z a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 \right] = \\ &= e_1 x_0 + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z + e_2 y_0 + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z + e_3 z_0 + a_{13}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Перепиывая, получаем:

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z; \\ y' &= y_0 + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z; \\ z' &= z_0 + a_{13}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Матрица $A = a_{ij}$ называется матрицей аффинного преобразования. Так как аффинное преобразование взаимнооднозначно, то $\det A \neq 0$. Если $\det A > 0$, то преобразование называется собственным. Если $\det A < 0$, то несобственным.

Для двумерного случая и вообще многомерного случая аналитические выражения аналогичны.

Движения и изометрические преобразования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Движением пространства называется аффинное преобразование, для которого «старая» и «новая» СК суть ПДСК.

Найдем условия на матрицу преобразования. Имеем:

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3, \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3, \\ e'_3 &= a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Так как СК есть ПДСК, то $e_i e_j = e'_i e'_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ Или, расписывая,

$$e'_i e'_j = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + a_{i3}e_3 \cdot a_{j1}e_1 + a_{j2}e_2 + a_{j3}e_3 = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + a_{i3}a_{j3} = \delta_{ij}.$$

Таким образом, имеем следующие условия на матрицу $A = a_{ij}$:

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0, \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0, \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (5.17)$$

Матрица, удовлетворяющая таким условиям, называется ортогональной. Ее характеристическое свойство есть $A \cdot A^t = E$.

Движения сохраняют расстояние между точками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Изометрическим преобразованием называется преобразование, сохраняющее расстояние между точками.

Теорема 1. Изометрическое преобразование сохраняет скалярное произведение.

Пусть x, y – произвольные векторы, тогда $f x, f y = \frac{1}{2} |f x|^2 + |f y|^2 + |f x - f y|^2 = \frac{1}{2} |x|^2 + |y|^2 + |x - y|^2 = x, y$.

Теорема 2. Всякое изометрическое преобразование есть движение.

Пусть f – изометрическое преобразование. $Oe_1e_2e_3$ – ПДСК. И $f O = O', f e_i = e'_i$. Покажем, что $Oe'_1e'_2e'_3$ тоже ПДСК. В силу предыдущей теоремы $e_i e_j = e'_i e'_j = \delta_{ij}$, откуда следует, что $Oe'_1e'_2e'_3$ есть ортонормированный базис. Покажем, что f – аффинное преобразование. Пусть $M = x, y, z$ в «старой» СК (т.е. в $Oe_1e_2e_3$). Тогда $\overline{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Откуда (скалярно умножая на e_i) получаем: $x = \overline{OM}e_1, y = \overline{OM}e_2, z = \overline{OM}e_3$. Пусть $M' = f M = x', y', z'$ в $Oe'_1e'_2e'_3$. Откуда получаем (используя предыдущую теорему), что $x' = \overline{O'M'}e'_1 = \overline{OM}e_1 = x, y' = \overline{O'M'}e'_2 = \overline{OM}e_2 = y, z' = \overline{O'M'}e'_3 = \overline{OM}e_3 = z$.

Теорема 3. (О классификации движений)

1. Всякое собственное движение прямой есть сдвиг.
2. Всякое несобственное движение прямой есть отражение прямой от ее некоторой точки.
3. Всякое собственное движение плоскости есть либо сдвиг плоскости на некоторый вектор, либо поворот плоскости относительно некоторой точки плоскости.
4. Всякое несобственное движение плоскости есть отражение плоскости относительно некоторой прямой, соединенной со сдвигом плоскости на вектор коллинеарный этой прямой.
5. Всякое собственное движение в пространстве есть винтовое движение, т.е. сдвиг вдоль некоторой прямой, соединенный с поворотом вокруг этой же прямой.
6. Всякое несобственное движение в пространстве есть либо отражение относительно некоторой плоскости, соединенное со сдвигом на вектор компланарный этой плоскости, либо отражение относительно некоторой плоскости, соединенное с поворотом вокруг прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Эта теорема утверждает, что, например, любое движение на плоскости представимо в виде $T x = R_a x + b$ или $T x = M_i x + b$.

Преобразования подобия

Обобщением изометрии является преобразование подобия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Преобразование S называется преобразованием подобия с коэффициентом подобия r , $r > 0$, если $|Sx - Sy| = r|x - y|$, где x, y – произвольные точки пространства.

Установим общий вид преобразования подобия.

Теорема 1. Преобразование подобия S с коэффициентом подобия $r > 0$ является аффинным преобразованием и может быть представлено в виде $Sx = rQx + b$, где Q – ортогональная матрица.

Пусть $Tx = 1/r(Sx - S0)$. Заметим, что T – изометрия и $T0 = 0$. Поэтому $Tx = Qx$, где Q – ортогональная матрица. Следовательно, $Sx = rQx + S0$.

5.4. Примеры аффинных преобразований

Сдвиг

Преобразование сдвига пространства имеет вид

$$T_a x = x + a, \quad (5.18)$$

где a – некоторый постоянный вектор. Эффект применения T_a к произвольной конфигурации в пространстве заключается в сдвиге всей конфигурации на вектор a . Запишем матричное выражение преобразования для двумерного и трехмерного случаев:

$$T_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

$$T_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

В комплексной записи преобразование плоскости запишется в виде

$$T_a z = z + a. \quad (5.21)$$

Поворот

Рассмотрим преобразование поворота плоскости на угол α против часовой стрелки относительно $0,0$. Оно в матричной форме запишется в виде:

$$R_{\alpha,0} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Или в комплексной записи

$$R_{\alpha,0} z = e^{i\alpha} z. \quad (5.23)$$

Найдем выражение преобразования поворота относительно произвольной точки плоскости. Пусть $M = x_0, y_0$ – некоторая точка плоскости, относительно которой совершается поворот. Тогда совершим преобразования координат так, чтобы точка M в новой системе координат имела координаты $0,0$. Поэтому выражение преобразования координат Θ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Обратное преобразование Θ^{-1} имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Получаем, что $R' = \Theta^{-1} R_{\alpha,0} \Theta$, где R' – поворот на α относительно центра новой системы координат. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} R_{\alpha,M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \Theta^{-1} R_{\alpha,0} \Theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Theta^{-1} R_{\alpha,0} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \Theta^{-1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \left(\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.26)$$

В трехмерном случае преобразования вращения относительно оси Ox записывается в виде:

$$R_{Ox} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Вращение относительно других осей записывается аналогично.

Отражение

Отражение относительно оси Ox задается следующим образом:

$$M_{Ox} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

или в комплексной записи

$$M_{Ox} z = \bar{z}. \quad (5.29)$$

Отражение относительно оси Oy задается следующим образом:

$$M_{Oy} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

или в комплексной записи

$$M_{Oy} z = -\bar{z}. \quad (5.31)$$

Сжатие

Сжатие с коэффициентом c относительно начала координат записывается в виде

$$C_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

или в комплексной записи

$$C_c z = cz. \quad (5.33)$$

Аффинные преобразования и комплексные числа

Аффинное преобразование плоскости можно описать с помощью комплексных чисел и операций над ними.

Векторное пространство R^2 можно рассматривать как множество комплексных чисел с операцией сложения комплексных чисел и умножением на вещественное число, установив соответствие:

$$x, y \leftrightarrow x + iy. \quad (5.34)$$

Тогда любое аффинное преобразование T запишется в виде

$$T z = z' = az + b\bar{z} + c, \quad (5.35)$$

где a, b, c – комплексные постоянные.

Приведем примеры аффинных преобразований, записанных в комплексной форме.

Сдвиг на вектор b запишется как $T z = z + b$. Поворот на угол α : $T z = ze^{i\alpha}$. Отражение относительно действительной оси: $T z = \bar{z}$. Отражение относительно мнимой оси: $T z = -\bar{z}$. Сжатие в r раз: $T z = rz$.

Сжимающие аффинные преобразования

Рассмотрим аффинное преобразование T :

$$T x = x' = Ax + b. \quad (5.36)$$

Оно будет сжимающим в R^n , если для любых x_1 и x_2 выполнено, что $|T x_1 - T x_2| < |x_1 - x_2|$, откуда, подставляя выражение для T , получаем $|Ax_1 + b - Ax_2 + b| < |x_1 - x_2|$, $|Ax_1 - Ax_2| < |x_1 - x_2|$, $|A(x_1 - x_2)| < |x_1 - x_2|$, откуда, заменяя $x_1 - x_2$ на x , получаем $|Ax| < |x|$, для любых x . Так как $|kx| = |k||x|$ и $|kx| = |k||x|$, то мы можем ограничиться рассмотрением векторов x , имеющих единичную длину (единичная сфера S^n). Таким образом, матрица A должна удовлетворять следующему условию:

$$\max_{|x|=1} |Ax| < 1. \quad (5.37)$$

Заметим также, что $|Ax| = \sqrt{Ax, Ax} = \sqrt{Ax^t Ax} = \sqrt{x^t A^t Ax}$. Поэтому $\max_{|x|=1} |Ax| = \max_{|x|=1} \sqrt{x^t A^t Ax} = \sqrt{\max_{|x|=1} x^t A^t Ax}$. Рассмотрим функцию $F x = x^t A^t Ax$. Для отыскания максимума функции $F x$ на единичной сфере воспользуемся методом Лагранжа. (Максимум существует, так как S^n есть компакт в R^n , а функция $F x$ непрерывна на S^n). Функция Лагранжа для $F x$ примет вид:

$$L x, \lambda = F x - \lambda (x^t x - 1) = x^t A^t Ax - \lambda (x^t x - 1). \quad (5.38)$$

В точке максимума дифференциал функции должен равняться 0 при любом приращении аргумента. $\Delta L x = L x + \Delta x, \lambda - L x, \lambda = x + \Delta x^t A^t A x + \Delta x -$

$$-\lambda |x + \Delta x|^2 - x^t A' A x - \lambda x^t x - 1 = x^t A' A \Delta x + \Delta x^t A' A x - \lambda x^t \Delta x + \Delta x^t x + \sigma |\Delta x| = 2x^t A' A \Delta x - 2\lambda x^t \Delta x + \sigma |\Delta x| = 2x^t (A' A - E) \Delta x + \sigma |\Delta x|$$

Откуда получаем: $(A' A - E) x = 0$,
 $|x|=1$

Это означает, что x – собственный вектор матрицы $A' A$, имеющий единичную длину, λ – собственное значение матрицы $A' A$. Следовательно, функция $F(x)$ достигает своего наибольшего значения на одном из собственных векторов матрицы $A' A$, и ее максимальное значение равно собственному числу, которому соответствует этот вектор. Таким образом, получаем, что $\max_{|x|=1} |Ax| = \sqrt{\max_i \lambda_i}$.

Поэтому *аффинное преобразование является сжимающим, когда корень из максимального собственного числа матрицы $A' A$ меньше единицы.*

Что общего между прыгающим по земле мячиком, лазером, планетной системой, бурлящим потоком воды в ручье, биологической популяцией? Общее в том, что все эти объекты могут рассматриваться как динамические системы. Абстрагируясь от конкретной физической природы объекта, о нем говорят как о *динамической системе*, если можно указать такой набор величин, называемых *динамическими переменными* и характеризующих состояние системы, что их значения в любой последующий момент времени получают из исходного набора по определенному правилу. Это правило задает, как говорят, *оператор эволюции системы*.

Например, для прыгающего мячика оператор эволюции определяется законами движения в поле тяжести и удара мячика о поверхность. Мгновенное состояние задается двумя величинами – расстоянием от земли и скоростью. Геометрически оно изображается как точка на фазовой плоскости, где эти две величины отложены, соответственно, по оси абсцисс и ординат. Изменение состояния во времени, или, для краткости, динамика системы, отвечает движению изображающей точки по определенной кривой – фазовой траектории.

Выделяют два класса динамических систем – консервативные (механические колебательные системы в отсутствие трения) и диссипативные. Для диссипативных систем характерно то, что режим динамики, возникающий в системе, предоставленной себе в течение длительного времени, становится не зависящим от начального состояния (при вариации начальных условий в некоторых конечных пределах). Множество точек в фазовом пространстве диссипативной системы, посещаемых в установившемся режиме, называется аттрактором. Простые примеры аттракторов – устойчивое состояние равновесия и предельный цикл, отвечающий режиму периодических автоколебаний (замкнутая фазовая траектория, к которой приближаются все соседние траектории).

6.1. Сведения из теории хаоса

Теория хаоса в последнее время является одним из самых модных подходов к исследованию рынка. К сожалению, точного математического определения понятия хаос пока не существует. Сейчас зачастую хаос определяют как крайнюю непредсказуемость постоянного нелинейного и нерегулярного сложного движения, возникающую в динамической системе.

Следует отметить, что хаос не случаен, несмотря на свойство непредсказуемости. Более того, хаос динамически детерминирован (определен). На первый взгляд непредсказуемость граничит со случайностью – ведь мы, как правило, не можем предсказать как раз случайные явления. И если относиться к рынку как к случайным блужданиям, то это как раз тот самый случай. Однако хаос не случаен, он подчиняется своим закономерностям. Согласно теории хаоса, если вы говорите о хаотичном движении цены, то вы должны иметь в виду не случайное

движение цены, а другое, особенно упорядоченное движение. Если динамика рынка хаотична, то она не случайна, хотя и по-прежнему непредсказуема.

Непредсказуемость хаоса объясняется в основном существенной зависимостью от начальных условий. Такая зависимость указывает на то, что даже самые малые ошибки при измерении параметров исследуемого объекта могут привести к абсолютно неверным предсказаниям. Эти ошибки могут возникать вследствие элементарного незнания всех начальных условий. Что-то обязательно ускользнет от нашего внимания, а значит, уже в самой постановке задачи будет заложена внутренняя ошибка, которая приведет к существенным погрешностям в предсказаниях. Применительно к невозможности делать долгосрочные прогнозы погоды существенную зависимость от начальных условий иногда называют «эффектом бабочки». «Эффект бабочки» указывает на существование вероятности того, что взмах крыла бабочки в Бразилии приведет к появлению торнадо в Техасе.

Дополнительные неточности в результате исследований и расчетов могут вносить самые, на первый взгляд, незаметные факторы воздействия на систему, которые появляются в период ее существования с начального момента до появления фактического и окончательного результата. При этом факторы воздействия могут быть как экзогенные (внешние), так и эндогенные (внутренние).

Ярким примером хаотического поведения является движение бильярдного шара. Если вы когда-либо играли в бильярд, то знаете, что от начальной точности удара, его силы, положения кия относительно шара, оценки месторасположения шара, по которому наносится удар, а также расположения других шаров, находящихся на столе, зависит конечный результат. Малейшая неточность в одном из этих факторов приводит к самым непредсказуемым последствиям – шар может покатиться совсем не туда, куда ожидал бильярдист. Более того, даже если бильярдист все сделал правильно, попробуйте предсказать движения шара после пяти-шести столкновений.

Рассмотрим еще один пример влияния начальных условий на конечный результат. Представим себе, например, камень на вершине горы. Стоит его чуть-чуть подтолкнуть, и он покатится вниз до самого подножия горы. Понятно, что совсем малое изменение силы толчка и его направления может привести к очень значительному изменению места остановки камня у подножия. Есть, правда, одна очень существенная разница между примером с камнем и хаотической системой. В первом факторы воздействия на камень во время его падения с горы (ветер, препятствия, изменения внутренней структуры вследствие столкновений и т.п.) уже не оказывают сильного воздействия на конечный результат по сравнению с начальными условиями. В хаотических системах малые изменения оказывают значительное воздействие на результат не только в начальных условиях, но и прочих факторах.

Один из **главных выводов теории хаоса**, таким образом, заключается в следующем – будущее предсказать невозможно, так как всегда будут ошибки измерения, порожденные в том числе незнанием всех факторов и условий.

То же самое по-простому – малые изменения и/или ошибки могут породить большие последствия.

Еще одним из основных свойств хаоса является экспоненциальное накопление ошибки. Согласно квантовой механике начальные условия всегда неопределенны, а согласно теории хаоса – эти неопределенности будут быстро прирастать и превысят допустимые пределы предсказуемости.

Второй вывод теории хаоса – достоверность прогнозов со временем быстро падает.

Данный вывод является существенным ограничением для применимости фундаментального анализа, оперирующего, как правило, именно долгосрочными категориями.

Первые элементы теории хаоса появились еще в XIX веке, однако подлинное научное развитие эта теория получила во второй половине XX века, вместе с работами Эдварда Лоренца (Edward Lorenz) из Массачусетского технологического института и франко-американского математика Бенуа Б. Мандельброта (Benoit B. Mandelbrot).

Эдвард Лоренц в свое время (начало 60-х годов XX века, работа опубликована в 1963 году) рассматривал, в чем возникает трудность при прогнозировании погоды.

До работы Лоренца в мире науки господствовало два мнения относительно возможности точного прогнозирования погоды на бесконечно длительный срок.

Первый подход сформулировал еще в 1776 году французский математик Пьер Симон Лаплас. Лаплас заявил, что «...если мы представим себе разум, который в данное мгновение постиг все связи между объектами во Вселенной, то он сможет установить соответствующее положение, движения и общие воздействия всех этих объектов в любое время в прошлом или в будущем». Этот его подход был очень похож на известные слова Архимеда: «Дайте мне точку опоры, и я переверну весь мир». Таким образом, Лаплас и его сторонники говорили, что для точного прогнозирования погоды необходимо только собрать больше информации обо всех частицах во Вселенной, их местоположении, скорости, массе, направлении движения, ускорении и т.п. Лаплас думал, чем больше человек будет знать, тем точнее будет его прогноз относительно будущего.

Второй подход к возможности прогнозирования погоды раньше всех наиболее четко сформулировал другой французский математик, Жюль Анри Пуанкаре. В 1903 году он сказал: «Если бы мы точно знали законы природы и положение Вселенной в начальный момент, мы могли бы точно предсказать положение той же Вселенной в последующий момент. Но даже если бы законы природы открыли нам все свои тайны, мы и тогда могли бы знать начальное положение только приближенно. Если бы это позволило нам предсказать последующее положение с тем же приближением, это было бы все, что нам требуется, и мы могли бы сказать, что явление было предсказано, что оно управляется законами. Но это не всегда так; может случиться, что малые различия в начальных условиях вызовут очень большие различия в конечном явлении. Малая ошибка в первых породит огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным, и мы имеем дело с явлением, которое развивается по воле случая».

В этих словах Пуанкаре мы находим постулат теории хаоса о зависимости от начальных условий. Последующее развитие науки, особенно квантовой механики, опровергло детерминизм Лапласа. В 1927 году немецкий физик Вернер

Гейзенберг открыл и сформулировал принцип неопределенности. Этот принцип объясняет, почему некоторые случайные явления не подчиняются лапласовому детерминизму. Гейзенберг показал принцип неопределенности на примере радиоактивного распада ядра. Так, из-за очень малых размеров ядра невозможно знать все процессы, происходящие внутри него. Поэтому, сколько бы информации мы не собирали о ядре, точно предсказать, когда это ядро распадется, невозможно.

6.2. Фрактальная размерность аттрактора

Можно ли получить фрактальные структуры из физических уравнений? Другими словами: могут ли привычные нам уравнения приводить к появлению фракталов? Ответ на этот вопрос положительный и связан, прежде всего, с одной из интенсивно развивающихся в последние 40 лет областей математической физики – динамическим хаосом.

В системах с динамическим хаосом детерминированные уравнения приводят к хаотическим решениям, хаотическим в том смысле, что в них экспоненциально быстро расходятся близлежащие первоначально траектории и возникает неустойчивость, при этом оказалось, что фракталы как геометрические объекты, могут быть успешно применены при описании траекторий хаотических систем. Более того, можно сказать, что фракталы суть геометрические образы хаоса.

До настоящего момента мы изучали фракталы, которые являются статическими фигурами. Этот подход вполне приемлем до тех пор, пока не возникает необходимость рассмотрения таких природных явлений, как падающие потоки воды, турбулентные завихрения дыма, метеосистемы и потоки на выходе реактивных двигателей. В этих случаях один-единственный фрактал соответствует моментальному снимку данного феномена. Структуры, изменяющиеся во времени, мы определяем как динамические системы. Интуитивно понятно, что динамическим соответствием фрактала является хаос. Это означает, что хаос описывает состояние крайней непредсказуемости, возникающей в динамической системе, в то время как фрактальность описывает крайнюю иррегулярность или изрезанность, присущую геометрической конфигурации.

Достаточно скоро стало ясно, что многие хаотические динамические системы, описывающие феномены окружающего нас мира, устроены очень сложно и не могут быть в полной мере представлены традиционными методами математического анализа. По-видимому, нет никакой возможности получить математические выражения для решений в замкнутом виде, даже если использовать специальные функции.

Следует отметить, что хаос не случаен, несмотря на свойство непредсказуемости. Более того, хаос динамически детерминирован (определен). На первый взгляд, непредсказуемость граничит со случайностью – ведь мы, как правило, не можем предсказать как раз случайные явления. И если относиться к рынку как к случайным блужданиям, то это как раз тот самый случай. Однако хаос не случаен, он подчиняется своим закономерностям. Согласно теории хаоса, если вы говорите о хаотичном движении цены, то вы должны иметь в виду не случайное

движение цены, а другое, особенно упорядоченное движение. Если динамика рынка хаотична, то она не случайна, хотя и по-прежнему непредсказуема.

Обычно говорят, что хаос является более высокой формой порядка, однако более правильно считать хаос другой формой порядка – с неизбежностью в любой динамической системе за порядком в обычном его понимании следует хаос, а за хаосом порядок. Если мы определим хаос как беспорядок, то в таком беспорядке мы обязательно сможем увидеть свою, особенную форму порядка. Например, дым от сигарет, сначала поднимающийся в виде упорядоченного столба, под влиянием внешней среды принимает все более причудливые очертания, а его движения становятся хаотичными. Еще один пример хаотичности в природе – лист с любого дерева. Можно утверждать, что вы найдете много похожих листьев, например, дуба, однако ни одной пары одинаковых листьев. Разница предопределена температурой, ветром, влажностью и многими другими внешними факторами, кроме чисто внутренних причин (например, генетической разницей).

Движение от порядка к хаосу и обратно, по всей видимости, является сущностью вселенной, какие бы проявления ее мы не изучали. Даже в человеческом мозгу одновременно присутствуют упорядоченное и хаотическое начала. Первое соответствует левому полушарию мозга, а второе – правому. Левое полушарие отвечает за сознательное поведение человека, за выработку линейных правил и стратегий в поведении человека, где четко определяется «если..., то...». В правом же полушарии царит нелинейность и хаотичность. Интуиция является одним из проявлений правого полушария мозга.

Теория хаоса изучает порядок хаотической системы, которая выглядит случайной, беспорядочной. При этом теория хаоса помогает построить модель такой системы, не ставя задачу точного предсказания поведения хаотической системы в будущем.

Рассмотрим знаменитый пример, весьма наглядно демонстрирующий, что стоит за термином «хаотическая динамика». Эдвард Лоренц (E.N. Lorenz) из Массачусетского технологического института в 1961 году занимался численными исследованиями метеосистем, в частности моделированием конвекционных потоков в атмосфере. Он исследовал следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sigma(-x + y), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = rx - y - yz, \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = -bz + xy. \end{cases} \quad (6.1)$$

где σ, r, b – постоянные положительные параметры. Системе Лоренца присуща существенная зависимость от начальных условий – основная черта хаотической динамики. Существенную зависимость иногда называют эффектом бабочки. Такое название относится к невозможности делать долгосрочные прогнозы погоды.

Какими же инструментами располагает теория хаоса? В первую очередь это аттракторы и фракталы.

Аттрактор (от англ. to attract – притягивать) – геометрическая структура, характеризующая поведение в фазовом пространстве по прошествии длительного времени.

Здесь возникает необходимость определить понятие фазового пространства. Итак, фазовое пространство – это абстрактное пространство, координатами которого являются степени свободы системы (рис. 6.1). Например, у движения маятника две степени свободы. Это движение полностью определено начальной скоростью маятника и положением. Если движению маятника не оказывается сопротивления, то фазовым пространством будет замкнутая кривая. В реальности на Земле на движение маятника влияет сила трения. В этом случае фазовым пространством будет спираль.

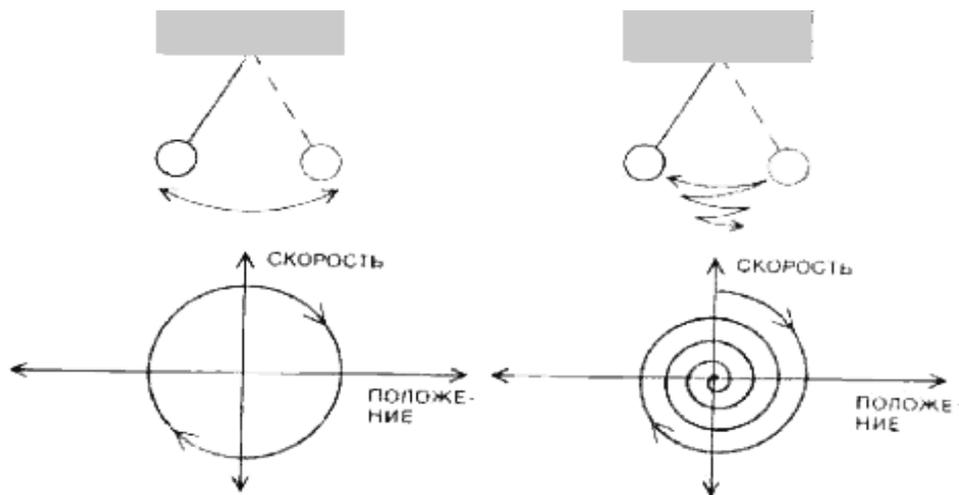


Рис. 6.1. Движение маятника как пример фазового пространства

По-простому, аттрактор – это то, к чему стремится прийти система, к чему она притягивается.

Самым простым типом аттрактора является точка. Такой аттрактор характерен для маятника при наличии трения. Независимо от начальной скорости и положения, такой маятник всегда придет в состояние покоя, т.е. в точку.

Следующим типом аттрактора является предельный цикл, который имеет вид замкнутой кривой линии. Примером такого аттрактора является маятник, на который не влияет сила трения. Еще одним примером предельного цикла является биение сердца. Частота биения может снижаться и возрастать, однако она всегда стремится к своему аттрактору, своей замкнутой кривой.

Третий тип аттрактора – тор. На рис. 6.2. тор показан в верхнем правом углу.

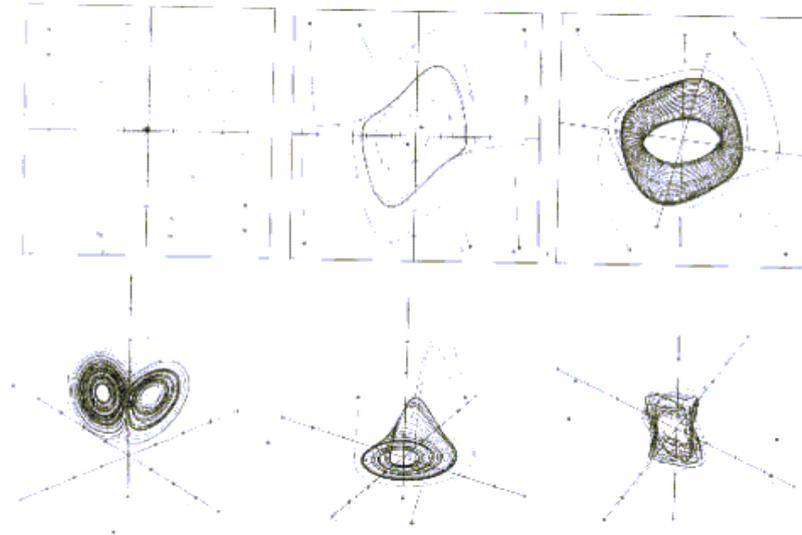


Рис. 6.2. Основные типы аттракторов. Вверху показаны три предсказуемых, простых аттрактора. Внизу три хаотических аттрактора

Несмотря на сложность поведения хаотических аттракторов, иногда называемых странными аттракторами, знание фазового пространства позволяет представить поведение системы в геометрической форме и, соответственно предсказывать его. И хотя нахождение системы в конкретный момент времени в конкретной точке фазового пространства практически невозможно, область нахождения объекта и его стремление к аттрактору предсказуемы.

Проиллюстрируем на примерах, что подразумевается под аттрактором дифференциального уравнения. Кроме того, найдем фрактальную размерность аттракторов конкретных дифференциальных уравнений или приведем оценку этой размерности.

Пример 1. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = -x_1, \\ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = -2x_2. \end{cases} \quad (6.2)$$

Общее решение этой системы задается формулами

$$x_1(t) = c_1 \cdot e^{-t}, \quad x_2(t) = c_2 \cdot e^{-2t}, \quad c_1, c_2 = const. \quad (6.3)$$

Если заданы начальные условия $x_1(0)$ и $x_2(0)$, то траектория (то есть решение системы (6.2)), выходящая из этой точки, задается формулой

$$x_1(t) = e^{-t} \cdot x_1(0), \quad x_2(t) = e^{-2t} \cdot x_2(0).$$

Очевидно, любая траектория при $t \rightarrow \infty$ стремится к точке $(0,0)$. В этом простейшем случае говорят, что точка $(0,0)$ является аттрактором A системы (6.2) (или решений системы (6.2)): $A = (0,0)$. Фрактальная размерность аттрактора A $d_F(A) = 0$.

Пример 2. Аттрактор, являющийся предельным циклом.

Пусть дана система двух дифференциальных уравнений, которая в полярных координатах (ρ, φ) на плоскости R^2 имеет вид:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \rho(1 - \rho^2) \quad (6.4)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = 1 \quad (6.5)$$

Из уравнения (6.5) следует, что

$$\varphi(t) = t + c_1. \quad (6.6)$$

Легко видеть, что окружность

$$\rho(t) = 1 \quad (6.7)$$

является решением уравнения (4). Действительно, $\dot{\rho} = 0$ и правая часть уравнения (4) при $\rho = 1$ обращается в нуль: $\rho(1 - \rho^2) \Big|_{\rho=1} = 0$.

Таким образом, окружность (6), (7) является решением системы (4), (5), и притом периодическим с периодом 2π . Действительно, полярная координата φ обладает этим свойством: точки с полярными координатами $(1, \varphi)$ и $(1, \varphi + 2\pi)$ изображают одну и ту же точку на окружности $\rho = 1$.

Теперь заметим, что если $(\rho(t), \varphi(t))$ – решение системы (4), (5) и $0 < \rho(t) < 1$, то из уравнения (4) следует, что $\dot{\rho}(t) = \rho(t) \cdot (1 - \rho(t)^2) > 0$, то есть функция $\rho(t)$ возрастает, приближаясь к значению $\rho = 1$, а траектория $(\rho(t), \varphi(t)) = (\rho(t), t + c_1)$ совершает спиралеобразное движение внутри окружности $\rho = 1$ (рис. 6.3).

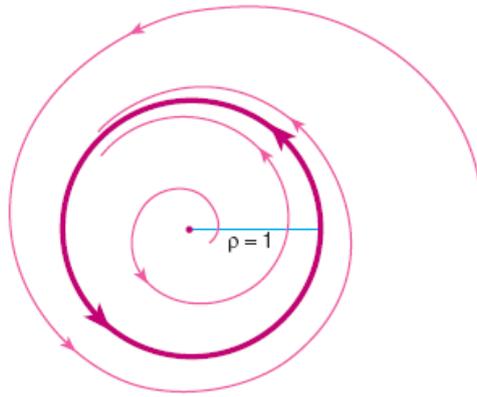


Рис. 6.3. Предельный цикл на плоскости

Если же решение $\rho_1 t, \varphi t = \rho_1 t, t + c_1$ в некоторый момент t имеет $\rho_1 t > 1$, то, согласно уравнению (4), $\dot{\rho}_1 t = \rho_1 t \cdot 1 - \rho_1 t^2 < 0$ и $\rho_1 t$ убывает с возрастанием t . В этом случае кривая $\rho_1 t, \varphi t = \rho_1 t, t + c_1$ спиралеобразно приближается при $t \rightarrow +\infty$ к окружности $\rho = 1$ извне этой окружности.

Таким образом, решения $\rho t, \varphi t$ системы, находящиеся вне и внутри окружности, и сама окружность имеют вид, изображенный на рис.6.1.

Мы показали, что все траектории системы уравнений (кроме начала координат $\rho = 0$, являющегося неподвижной точкой системы (4), (5)) притягиваются (стремятся) при $t \rightarrow +\infty$ к окружности $\rho = 1 = A$. Поэтому эта окружность называется предельным циклом системы (4), (5). Такой предельный цикл (притягивающий) называют аттрактором системы (4), (5). Фрактальная размерность этого аттрактора равна 1: $d_F A = 1$.

Пример 3. Оценка фрактальной размерности аттрактора системы уравнений Лоренца.

При изучении аппроксимации системы уравнений Бусинеска, описывающей конвекцию жидкости, подогреваемой снизу, возникла система обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца, который впервые ее вывел и изучал. Эта система имеет вид (6.1). Можно показать, что любые решения $u t = x t, y t, z t$ системы (6.1) при $t \geq 0$ ограничены в трехмерном пространстве. Точнее, имеет место оценка:

$$|u t|^2 \leq e^{-2t} \cdot |u 0|^2 + c \cdot 1 - e^{-2t}, \quad (6.8)$$

где $|u|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$, $l = \min 1, \sigma$, c – некоторая постоянная, выражающаяся через l, b и σ . Из (8) следует, что при ограниченных начальных условиях: $|u(0)| \leq M$, траектории (решения) $u(t) = x(t), y(t), z(t)$ системы (1), выходящие из $u(0) = x(0), y(0), z(0)$ ограничены при всех $t \geq 0$:

$$|u(t)|^2 \leq R M = M^2 + c, \quad \forall t \geq 0. \quad (6.9)$$

Следуя общей теории аттракторов из дифференциальных уравнений из (8) и (9) выводится, что система уравнений Лоренца (1) обладает аттрактором A (рис. 6.4). Точнее, существует такое замкнутое ограниченное множество A в R^3 , которое притягивает любые семейства траекторий системы (1). Это означает, что при $|u(0)|^2 = |x(0)|^2 + |y(0)|^2 + |z(0)|^2 \leq M_1$ (где M_1 любая фиксированная константа) соответствующее таким $u(0)$ семейство траекторий $u(t)$, $u(t) = x(t), y(t), z(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно стремится к множеству A , называемому аттрактором: $u(t) \rightarrow A$ при $t \rightarrow +\infty$. Доказано, что, например, при значениях $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ фрактальная размерность $d_F A \leq 2,538\dots$

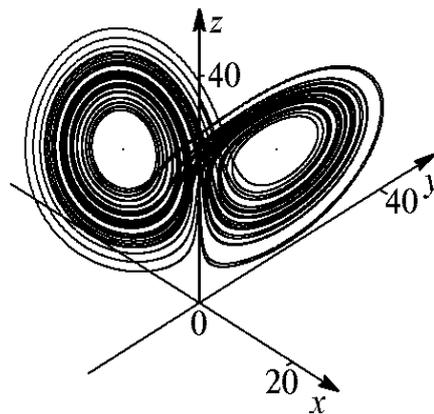


Рис. 6.4. Фазовый портрет аттрактора Лоренца для «классического» набора параметров: $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$

Заметим, что примеры 1 и 2 имели аттракторы (точка и окружность), для описания которых не требуется введения понятия фрактальной размерности. Но, как показывает пример 3, уже в трехмерном пространстве R^3 поведение траекторий системы (с виду довольно простой) на самом деле достаточно сложно и фрактальная размерность притягивающего все решения множества (аттрактора)

может быть больше двух, но меньше трех – размерности самого фазового пространства.

В таких ситуациях (то есть при большом значении фрактальной размерности аттрактора) говорят, что наблюдается явление, подобное явлению турбулентности течений жидкости.

Пример 4. Модель *Отображения Эно*. (Henon map)¹.

Модель (отображение) Эно с дискретным временем задается системой:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases} \quad (6.10)$$

Здесь x_n, y_n – динамические переменные, n играет роль времени, a, b – параметры системы. Эта модель может быть получена при рассмотрении динамики ротатора с затуханием при воздействии на него периодических толчков.

Оказалось, что, начиная с некоторых критических значений коэффициентов a и b , в системе возникает хаотическая динамика, а сами полученные наборы точек обнаруживают самоподобную структуру (рис. 6.5).

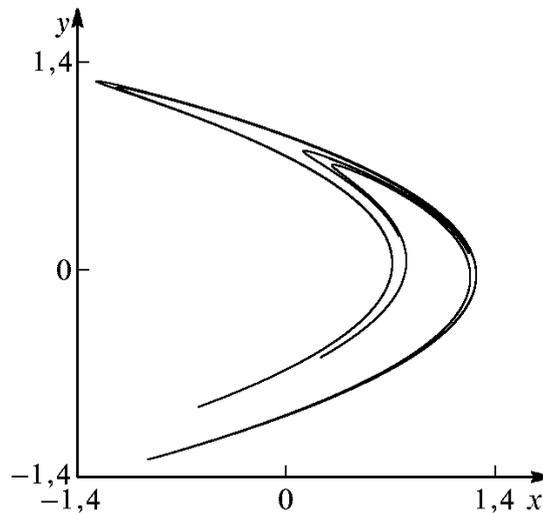


Рис. 6.5. Странный аттрактор отображения Эно при $a = 1.4, b = -0.3$

На рис. 6.6,а показан весь аттрактор Эно. Выделенный на рис.6.6,а прямоугольник дан в увеличенном виде на рис.6.6,б. Он как бы состоит из трех групп, каждая из которых содержит три, две и одну линии. Еще раз повторив процедуру увеличения, убеждаемся в существовании самоподобия аттрактора Энона (рис. 6.6,в).

¹ Мишель Эно, французский астрофизик, предложил это отображение в 1976 г. как абстрактный пример динамической системы, обладающей странным аттрактором.

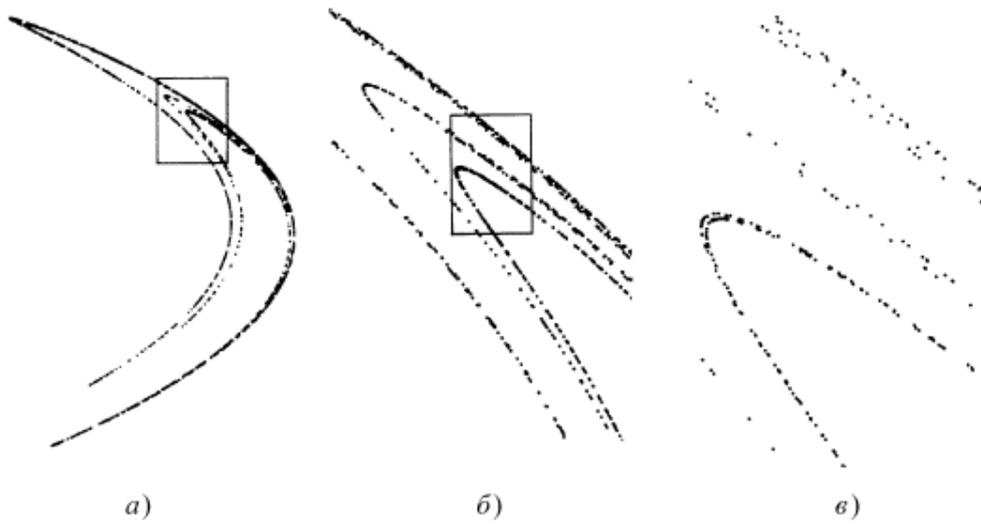


Рис. 6.6. Аттрактор Эно при $a = 1.4, b = -0.3$ и его увеличения

Этот аттрактор имеет дробную размерность

$$d_F A \approx 1,26... \quad (6.11)$$

при выбранных нами условиях.

7.1. Система итерируемых функций (СИФ)

Как уже не раз отмечалось, многие геометрические фракталы строятся путем бесконечного повторения нескольких простых операций, например, замены одного объекта некоторой комбинацией других, ему подобных. Возникает естественный вопрос, а нельзя ли эту «процедуру замены» перевести на язык математических формул. Так в середине 80-х годов появился метод **Систем Итерируемых Функций** – СИФ (Iterated Function System – IFS) как простое средство получения фрактальных структур. Математические аспекты метода были разработаны Джоном Хатчинсоном, а сам метод стал широко известен благодаря американскому математику Майклу Барнсли, работавшему в технологическом институте штата Джорджия. Данный подход предоставляет хорошую теоретическую базу для математического исследования многих классических фракталов, а также их обобщений.

Пусть T_1, T_2, \dots, T_N – конечный набор сжимающих отображений в X, d с коэффициентами сжатия s_1, s_2, \dots, s_N , $s_n \in [0, 1]$. Определим отображение T , действующее в пространстве $H(X)$, следующим образом:

$$T(E) = T_1(E) \cup T_2(E) \cup \dots \cup T_N(E) = \bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} T_i(E),$$

для любого $E \in H(X)$. Таким образом, T отображает $H(X)$ в $H(X)$ и является сжимающим отображением на $H(X)$, h с коэффициентом сжатия $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Системой итерируемых функций будем называть полное метрическое пространство X, d и конечное множество сжимающих отображений $T_n : X \rightarrow X$; и введем следующее обозначение: $(X, d; T_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$.

Основной задачей теории СИФ является ответ на вопрос, когда заданная СИФ порождает предельное множество E

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{0n}(E_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n,$$

где последовательность E_n порождается итерационной схемой:

$$\begin{aligned}
& E_0 - \text{произвольное компактное множество,} \\
& E_1 = T(E_0), \\
& \vdots \\
& E_n = T(E_{n-1}), \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Отметим, что сходимость подразумевается в метрике Хаусдорфа. Если предел существует, то его называют аттрактором СИФ. При этом аттрактор часто оказывается фрактальным множеством. Для того чтобы применить теорему о сжимающих отображениях необходимо показать, что $H(X, h)$ – полное метрическое пространство, что образ компакта компактен и что T – сжимающее отображение.

Теорема 1. Преобразование T является сжимающим в метрическом пространстве $H(X, h)$ с коэффициентом сжатия $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$.

Заметим, что для любого $F \in H(X)$ выполняется $e \in F + r$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $f \in F$, что $d(e, f) \leq r$. Следовательно, если $A \subset B + r$, то $T_i A \subset T_i B + s_i r$. Следовательно $T A \subset T B + sr$. Аналогично, $T B \subset T A + sr$. Неравенство $h(E, F) \leq r$ эквивалентно следующей записи: $E \subset F + r$ & $F \subset E + r$. Пусть $r = h(A, B)$. Таким образом, $h(T A, T B) \leq sh(A, B)$.

Следующая теорема суммирует основные результаты о сходимости систем итерируемых функций.

Теорема 2. Пусть $(X, d; T_m)_{m \in 1..M}$ – система итерируемых *сжимающих* отображений. Для произвольного начального компактного множества $E_0 \in H(X)$ последовательность $E_n = T^{0n} E_0$ сходится в метрике Хаусдорфа к единственному множеству E . Множество E называется аттрактором СИФ. Обратно, множество E можно представить в виде:

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{0n} E_0.$$

Следует иметь в виду, что результат применения систем итерируемых функций, называемый аттрактором, не всегда является фракталом.

Существует два подхода к реализации СИФ:

- детерминированный,
- рандомизированный.

Для моделирования фрактала с помощью детерминированного алгоритма требуется обработка больших массивов нулей и единиц. Единица означает, что соответствующий пиксель принадлежит изображению, а нуль означает, что со-

ответствующий пиксель не принадлежит изображению. Для реализации на компьютере детерминированного СИФ – алгоритма предпочтительнее такие языки программирования, как Си, Паскаль, Фортран или другие, т.е. языки, допускающие компиляцию, так как алгоритм требует больших вычислений, а откомпилированная программа всегда работает быстрее, чем ее версия со встроенным интерпретатором.

В рандомизированном алгоритме можно не хранить большие массивы данных в памяти компьютера, но когда требуется построить изображение хорошего качества, требуются тысячи точек, из-за чего данный подход неэкономичен, в плане затраченного времени на построение изображения.

В реальном мире важную роль играет случайный фактор и фракталы, порождаемые стохастическими процессами, называются случайными фракталами. Примерами таких фракталов могут служить распространение эпидемий, лесные пожары, случайные резисторные цепи, полимерные связи. Детерминированность фракталов, полученных с помощью L-систем или СИФ, естественно ограничивает их применение для моделирования естественных объектов.

7.2. Детерминированный подход к построению фрактала

Пусть СИФ задана аффинными преобразованиями:

$$T_i(x) = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Все коэффициенты хранятся в матрице C размера $n \times 6$:

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & f_n \end{bmatrix}$$

Как мы уже убедились, многие регулярные фракталы строятся путем бесконечного повторения нескольких простых операций, скажем, замены одного элемента некоторой комбинацией других, ему подобных. Так, например, салфетка Серпинского получается при замене исходного большого треугольника тремя треугольниками в два раза меньшего размера, расположенными друг относительно друга так, как показано на рис. 7.1 в центре. Затем эта же операция повторяется с каждым из этих трех маленьких треугольников, и так далее до бесконечности. Возникает естественный вопрос, а нельзя ли эту «процедуру замены» перевести на язык математических формул.

Сущность этого метода на примере уже упомянутой выше салфетки Серпинского заключается в следующем.

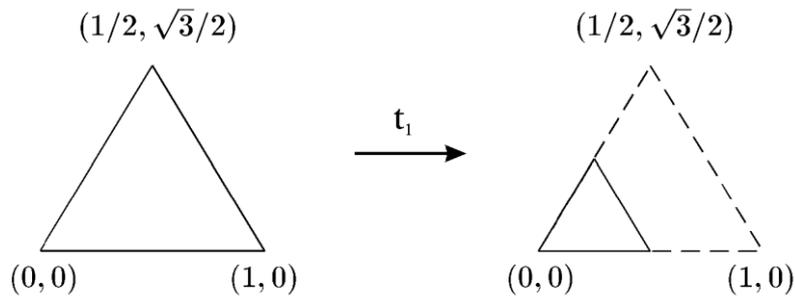


Рис. 7.1. Преобразование t_1 . В скобках даны декартовы координаты вершин

Поместим исходный равносторонний треугольник с длиной стороны, для определенности равной единице, на комплексную плоскость z так, как показано на рис. 7.1 слева. Теперь зададимся вопросом, каким линейным преобразованием t_1 на комплексной плоскости он переводится в равносторонний треугольник в два раза меньшего размера, показанный на рис. 7.1 справа? Ответ достаточно прост. Поскольку левое основание обоих треугольников лежит в начале координат $z=0$, то функция $f_1 z$, осуществляющая это преобразование, определяется выражением

$$t_1: \quad f_1 z = \frac{1}{2}z \quad (7.1)$$

Если теперь сместить этот маленький треугольник по горизонтали вправо на величину, равную $1/2$, то получим преобразование t_2 переводящее исходный треугольник в треугольник, изображенный на рис. 7.2 справа. Соответствующая этому преобразованию функция $f_2 z$, очевидно, равна:

$$t_2: \quad f_2 z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \quad (7.2)$$

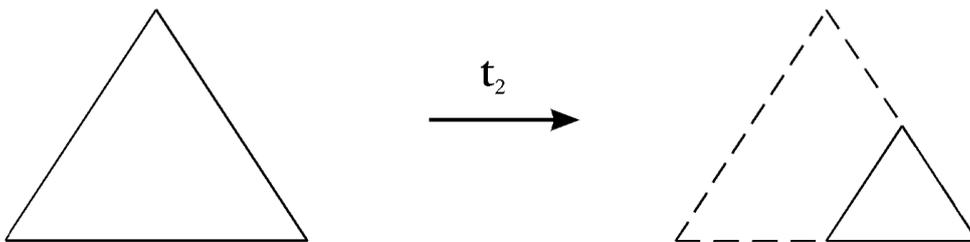


Рис. 7.2. Преобразование t_2

Наконец, последний, третий, маленький треугольник получается с помощью преобразования t_3 , показанного на рис. 7.3. Отвечающая ему функция $f_3 z$ получается из $f_1 z$ трансляцией на комплексный вектор $\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$t_3 : \quad f_3 z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (7.3)$$

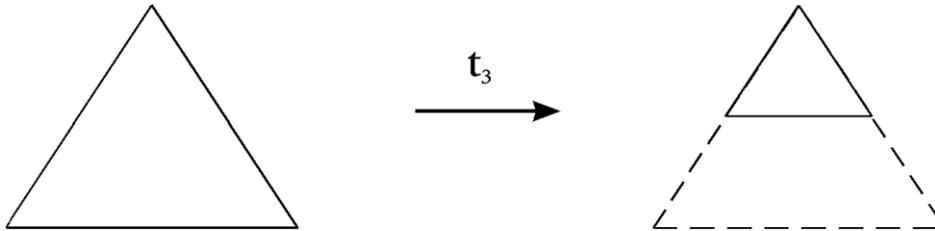


Рис. 7.3. Преобразование t_3

В итоге три вышеназванные линейные функции $f_1 z$, $f_2 z$, $f_3 z$ осуществляют искомое преобразование исходного треугольника в три треугольника в два раза меньшего размера. Возникает вопрос, а что будет, если теперь каждый из этих трех маленьких треугольников в свою очередь подвергнуть этим трем преобразованиям. Тогда возникнет уже 9 треугольников с размером в 4 раза меньше исходного. Непосредственной проверкой можно убедиться, что это приводит к картинке, изображенной на рис. 7.4 справа.

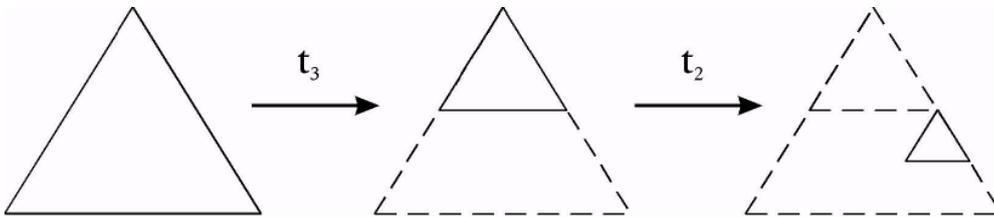


Рис. 7.4. Преобразования t_3 и t_2

Например, выполняя сначала преобразование t_3 , а затем преобразование t_2 , мы в итоге получаем треугольник со стороной $1/4$, показанный на рис. 7.4 справа, и т.д. Общий случай показан на рис. 7.5 справа, где изображены все эти треугольники с обозначением результирующего преобразования – генеалогического кода, при помощи которого они были получены из исходного треугольника. Слева показан первый шаг итерационной процедуры. Большой треугольник, в

который «вписаны» подобным образом три маленьких треугольника в два раза меньшего размера, мы будем ниже называть ячейкой.

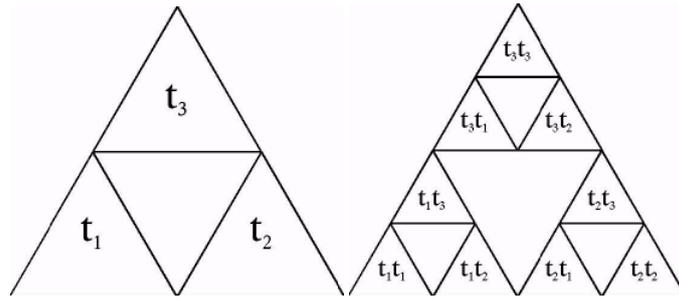


Рис. 7.5. Два первых поколения итераций системы из трех линейных отображений

Комбинация $t_j t_i$, стоящая в каждом из девяти маленьких треугольников, означает, что этот треугольник был получен из исходного сначала применением преобразования t_j , а затем к полученному треугольнику было применено преобразование t_i . Правило построения этой последовательности легко угадывается. На первом месте справа стоит первое преобразование. Оно соответствует позиции данного треугольника в его ячейке в соответствии с обозначениями на рис. 7.5 (слева). На втором месте стоит второе по счету преобразование, которое соответствует позиции уже этого большого треугольника в его ячейке, и т. д. Отметим очевидную некоммутативность двух (разных) преобразований, т.е. генеалогические коды $(t_1 t_2)$ и $(t_2 t_1)$ соответствуют разным треугольникам.

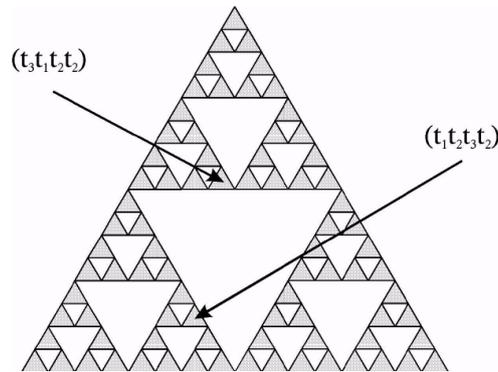


Рис. 7.6. 4-е поколение итераций

На рис. 7.6 приведено 4-е поколение итераций, состоящее из $3^4 = 81$ треугольников, и показан генеалогический код двух из них. Ясно, что, действуя подобным образом, мы в точности воспроизводим алгоритм построения салфетки Серпинского. Поэтому после бесконечного числа шагов мы придем, в конце концов, к множеству точек, образующих этот фрактал.

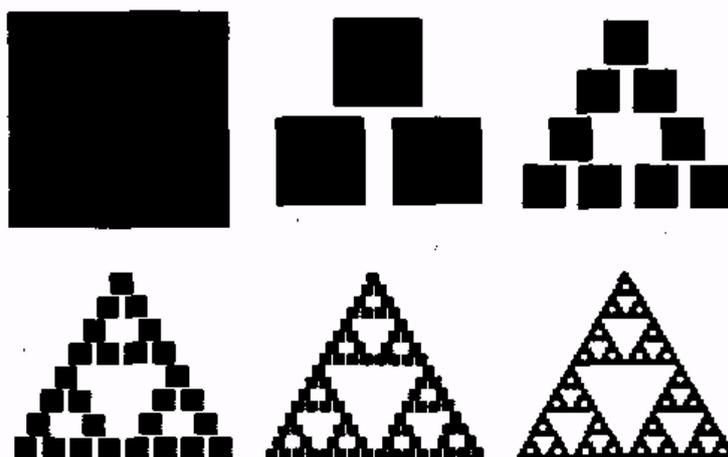


Рис. 7.7. Построение фрактала «ковер Серпинского» с помощью детерминированного алгоритма

Сам по себе этот факт безусловно интересен. Но, с другой стороны, что мы при этом узнали нового? Несколько другим способом получен уже известный фрактал, и все? Оказывается, что далеко не только это. Принципиально новое заключается в том, что для получения точно такого же предельного результата мы могли бы стартовать с любой фигуры, необязательно имеющей форму равностороннего треугольника. Это, например, мог быть круг или квадрат или любая другая замысловатая (и даже несвязная) фигура, произвольным образом расположенная на плоскости (рис. 7.7). На каждом шаге уменьшаясь в размерах в два раза и утраиваясь в количестве, эти фигуры, в конце концов, превратились бы в неразличимые глазом бесформенные точки, образующие фрактал – салфетку Серпинского. Причина такого поведения предельно проста. Она заключается в том, что салфетка является своеобразным аттрактором для этой системы из трех линейных преобразований $f_1 z$, $f_2 z$, $f_3 z$, называемых в литературе Системой Итерируемых Функций или сокращенно СИФ. Поскольку салфетка – аттрактор, то процесс его построения можно было начать даже с одной-единственной точки!

7.3. Метод случайных итераций, или игра в хаос

Укажем два главных отличия рандомизированного метода от детерминированного. Во-первых, начальное множество содержит всего одну точку. Во-вторых, на каждом шаге используется только одно аффинное преобразование из всей совокупности преобразований, задающих СИФ. Это преобразование выбирается случайным образом. Полученное множество также содержит ровно одну точку, которая выводится на экран и используется для вычисления следующей итерации.

Рассмотрим следующую незамысловатую игру, которую М. Барнсли назвал игрой в хаос. Возьмем уже знакомый нам равносторонний треугольник с верши-

нами в точках А, В и С. Выберем внутри этого треугольника произвольным образом начальную точку. Бросим теперь игральную кость, представляющую собой кубик, на 6 гранях которого проставлены буквы А, В и С. Пусть каждая буква присутствует на двух из них, тогда вероятность выпадения любой буквы одинакова и равна $1/3$. Допустим, что в результате первого броска выпала буква А. Соединим мысленно нашу начальную точку с вершиной треугольника А отрезком прямой и на его середине поставим точку (рис. 7.8). Пусть теперь она будет играть роль начальной. После чего повторим вышеописанную процедуру с бросанием кубика и проставлением точки в середине соответствующего отрезка. Допустим, на втором шаге выпала буква С, потом В, затем опять С и т.д. В результате на каждом шаге мы будем получать все новые и новые точки. Спрашивается, как распределятся внутри треугольника эти точки после достаточно большого числа шагов?

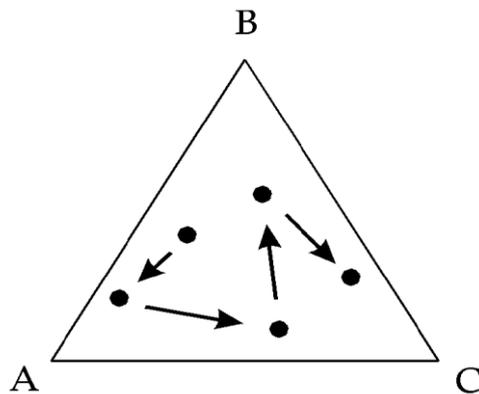


Рис. 7.7. Игра в хаос. Первые 4 шага

На рис. 7.9 (слева направо), показаны результаты этой игры соответственно с 5000, 10 000 и 50 000 точек. Невероятно, но факт – по мере увеличения числа точек все явственнее проступает структура треугольника Серпинского. Видно, что, хотя каждый раз выбор вершины треугольника происходит чисто случайным образом, возникающее множество точек на плоскости отнюдь не случайно и обладает ярко выраженной фрактальной структурой.

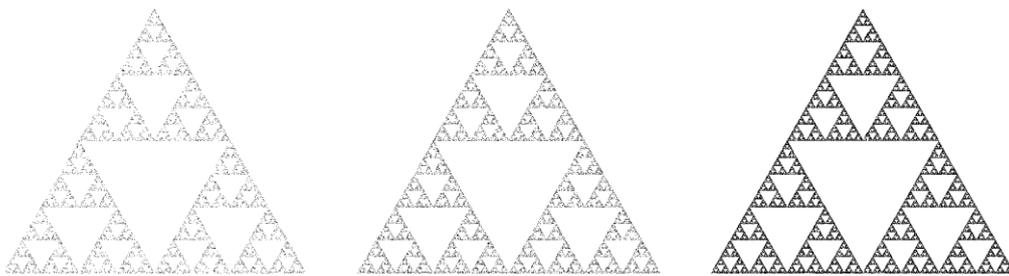


Рис. 7.9. Игра в хаос. Результат

Связь этой простой игры в хаос с системой итерируемых функций, рассмотренной в предыдущем параграфе, легко прослеживается. Действительно, можно заметить, что, по сути, на каждом шаге к начальной точке z применялось (случайным образом выбранное) одно из трех вышеописанных линейных преобразований $f_1 z, f_2 z \text{ è } f_3 z$. Если обозначить координаты вершин треугольника А, В, С на комплексной плоскости через z_a, z_b, z_c соответственно, то, поскольку

$$z_a = 0, z_b = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_c = 1, \text{ видно, что}$$

$$\begin{aligned} f_1 z &= \frac{z + z_a}{2} = \frac{1}{2}z, \\ f_2 z &= \frac{z + z_c}{2} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \\ f_3 z &= \frac{z + z_b}{2} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Таким образом, треугольник Серпинского, являясь аттрактором для этой системы итерируемых функций, возникает и при чисто случайном выборе последовательности преобразований $t_i t_j t_k \dots$. Можно показать, что изображающая точка в результате бесконечной цепочки случайных итераций сколь угодно близко подойдет к каждой точке этого фрактального множества. Рис. 7.10 поясняет эту мысль.

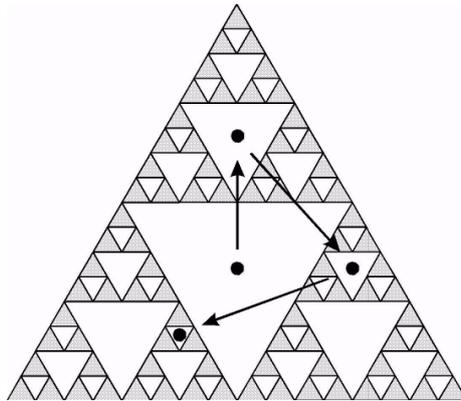


Рис. 7.10. Как появляется аттрактор

Возьмем, например, начальную точку в центре самого большого исключенного треугольника. На следующем шаге изображающая точка оказывается в центре одного из трех треугольников поменьше.

Эти треугольники представляют собой геометрическое место точек, которые находятся на половине расстояния до соответствующих вершин от точек боль-

шого центрального треугольника. При следующей итерации точка попадает в центр еще меньшего исключенного треугольника и т. д. В конце концов, уже после небольшого числа итераций точка попадет в исключенный треугольник столь малого размера, что его можно для всех практических целей считать точечным.

Разумеется, для этой игры было совершенно несущественно, что исходный треугольник являлся равносторонним. С равным успехом ее можно было провести в треугольнике любой формы (рис. 7.11).

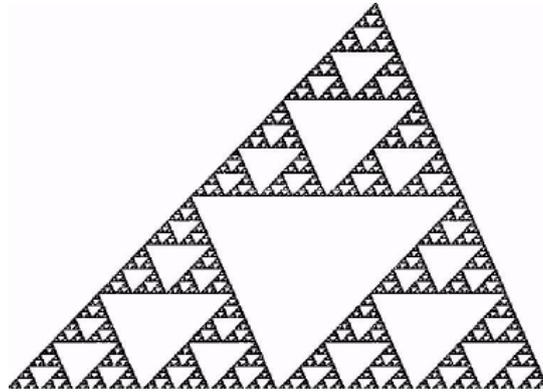


Рис. 7.11. Скошенный треугольник Серпинского

А что будет, если мы теперь несколько изменим правила игры? Например, будем проставлять точку не на середине отрезка, а на расстоянии в $1/3$ от соответствующей вершины. Результат показан на рис.7.12. Получившееся множество точек можно назвать двумерным аналогом канторовского множества исключенных средних третей. Нетрудно подсчитать, что фрактальная размерность соответствующего аттрактора равна единице.

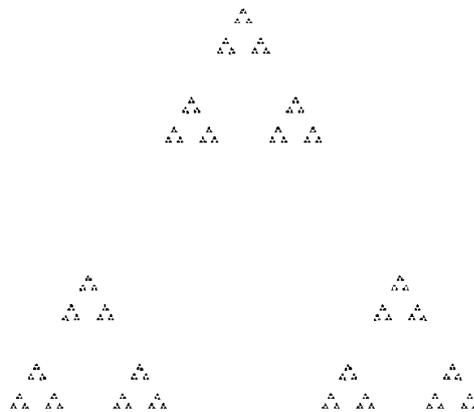


Рис. 7.12. Фрактальная пыль, $D = 1$

В качестве исходной фигуры можно выбрать и любой другой многоугольник. Например, квадрат. Однако в случае квадрата нас ожидает сюрприз. Если проводить игру по тем же правилам, что и для треугольника Серпинского (т.е. ставить новую точку на середине отрезка), то точки равномерно заполнят весь квадрат. Но если, например, взять правильный шестиугольник и ставить точку не в середине отрезка, а на расстоянии в $1/3$ от соответствующей вершины, то эти точки в процессе итераций образуют множество, которое условно можно назвать шестиугольником Серпинского. Он показан на рис. 7.13.

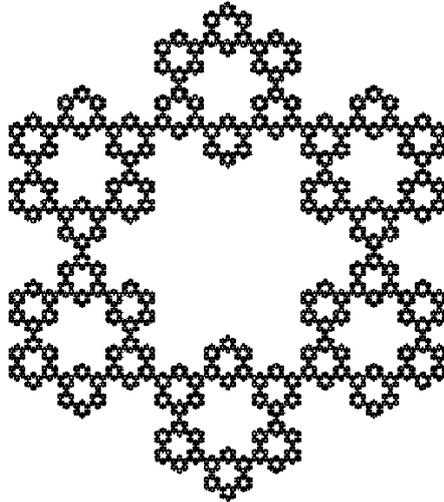


Рис. 7.13. Шестиугольник Серпинского

Как видно, он состоит из 6 одинаковых частей, каждая из которых подобна целому, но имеет размер в три раза меньше исходного. Поэтому его фрактальная размерность $D = \ln 6 / \ln 3 = 1.6309$. Кстати, именно в этом случае игра в хаос будет настоящей игрой в кости, так как теперь на шести гранях игрального кубика можно поставить цифры от одного до шести, соответствующие каждой из вершин шестиугольника. Заметьте также, что внутренняя граница этой фигуры представляет собой нам уже известный фрактал – снежинку Коха. Систему итерируемых функций для этой и ей подобных задач легко написать в общем виде, пользуясь заданными алгоритмами игры.

Так, для произвольного n -угольника в случае, когда следующая точка ставится на расстоянии в l/m от соответствующей вершины, где l – расстояние до нее начальной точки, а m – некоторое (не обязательно целое) число, превышающее единицу, эта система имеет вид

$$f_i z = \frac{1}{m} z + \frac{m-1}{m} z_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (7.5)$$

Здесь z_i – комплексные координаты вершин многоугольника.

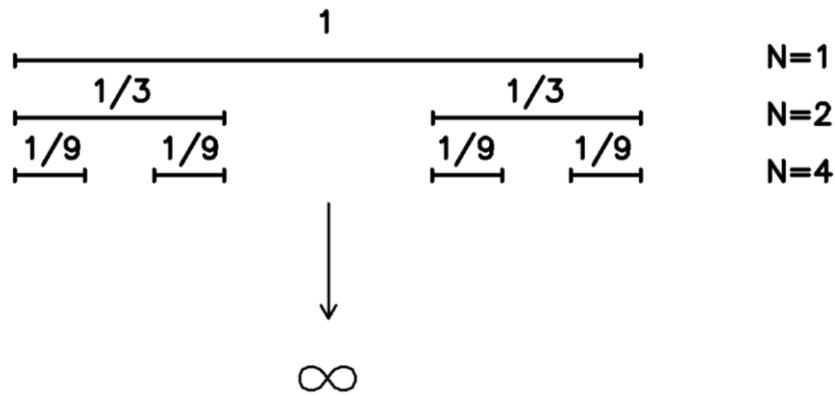


Рис. 7.14. Канторовское множество

Например, для $n = 2$, $z_1 = 0, z_2 = 0$ и $m = 3$ получаем СИФ для уже известного канторовского множества исключенных средних третей.

7.4. Игры с поворотами

Как видно во всех рассмотренных выше случаях, каждое линейное преобразование включало в себя сжатие в m раз (одинаковое для обеих осей X и Y) и параллельный перенос на некоторый комплексный вектор. Наши возможности существенно расширятся, если в систему преобразований мы включим еще и повороты. В качестве примера найдем СИФ для кривой Коха.

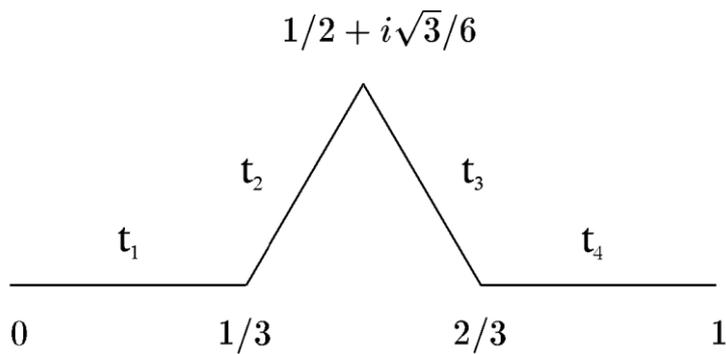


Рис. 7.15. Генератор для кривой Коха

Инициатором для кривой Коха является отрезок единичной длины, который на следующем шаге преобразуется в генератор, изображенный на рис. 7.15. Числа показывают координаты соответствующих вершин на комплексной плоскости.

сти. Система итерируемых функций, осуществляющих данное преобразование, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f_1 z &= \frac{1}{3}z, & f_2 z &= \frac{1}{3}e^{i\pi/3}z + \frac{1}{3}, \\
 f_3 z &= \frac{1}{3}e^{-i\pi/3}z + \frac{3+i\sqrt{3}}{6}, & f_4 z &= \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}.
 \end{aligned}
 \tag{7.6}$$

Первое преобразование t_1 , осуществляемое функцией $f_1 z$, есть просто сжатие в 3 раза исходного отрезка $(0, 1)$. Второе преобразование t_2 включает в себя такое же сжатие, поворот против часовой стрелки вокруг начала координат на угол в 60° и последующий сдвиг по горизонтали вправо на $1/3$. Третье преобразование t_3 сжимает в три раза исходный отрезок, поворачивает его на угол 60° по часовой стрелке и затем смещает параллельно самому себе на комплексный вектор $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$. Наконец, четвертое преобразование сжимает отрезок в 3 раза и смещает его по горизонтали вправо на $2/3$. Заметим, что порядок выполняемых операций здесь важен.

Если теперь этим четырём преобразованиям подвергнуть сам генератор, то получим конструкцию, изображённую на рис. 7.16. Она состоит из 16 отрезков длиной $1/9$, и для каждого из них показана последовательность операций, с помощью которых он был получен из исходного единичного отрезка K .

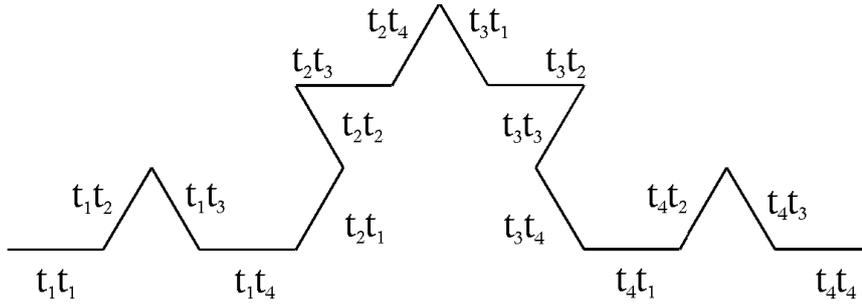


Рис. 7.16. Положения элементов $t_i t_j K$

Саму кривую Коха можно получить, повторяя этот процесс до бесконечности. Для этого удобно, как и ранее, воспользоваться методом случайных итераций (игрой в хаос). Каждому из 4 преобразований (7.6) припишем одинаковую вероятность $p_i = 0.25$. После этого, начав с некоторой точки z_0 в комплексной плоскости и выбирая случайным образом последовательность преобразований, будем получать все новые и новые точки — $z_1 = f_i z_0$, $z_2 = f_j z_1$, $z_3 = f_k z_2$ и т.д.

В итоге после примерно 150000 итераций приходим к множеству точек, изображенное на рис.7.17.

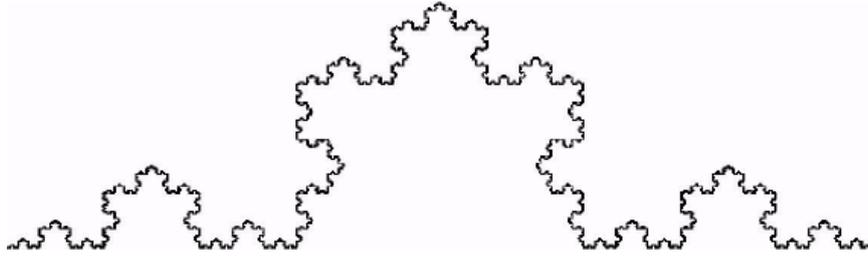


Рис. 7.17. Кривая Коха, полученная методом случайных итераций системы функций (7.6)

Рассмотрим еще одну игру с поворотами. Пусть на плоскости у нас имеются всего две точки А и В. Выберем случайным образом начальную точку z_0 и одну из этих двух точек. Пусть, например, на первом шаге «выпала» точка А. Мысленно соединяем ее с начальной отрезком прямой линии, длина которого пусть будет равна l , и перемещаемся вдоль этого отрезка в точку, отстоящую от А на расстоянии $l/\sqrt{2}$. Поворачиваемся затем вокруг А по часовой стрелке на угол в 45° и ставим в этом месте новую точку, которая теперь будет играть роль начальной. После чего опять случайным образом выбираем одну из точек А или В и повторяем весь процесс сначала. Результат этой игры для $5 \cdot 10^4$ и 10^6 точек показан на рис. 7.18.

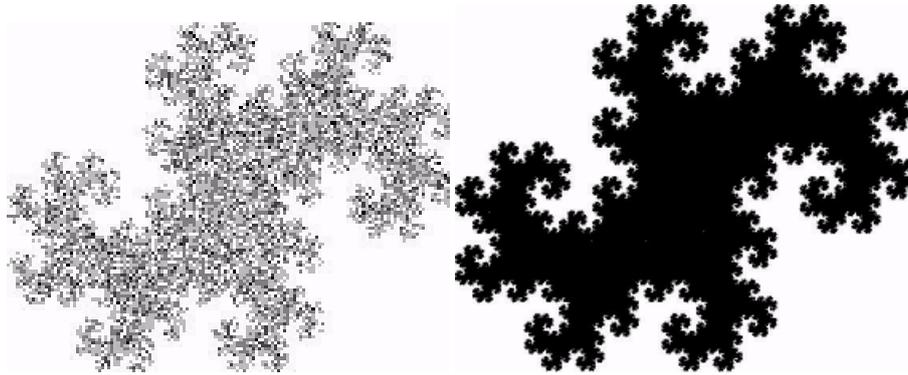


Рис. 7.18. Двойной дракон Хартера-Хейтуэя с $5 \cdot 10^4$ и 10^6 точек

Видно, что точки в процессе итераций плотно заполняют на плоскости некоторую область с весьма причудливыми очертаниями. Что-то подобное мы уже видели! Действительно, это изображение очень похоже на дракон Хартера-Хейтуэя. Отсутствуют только характерные «осиные талии» – перемычки, соединяющие разные части дракона. Может быть, наш дракон немного потолстел? Оказывается, причина вовсе не в этом, а в том, что здесь изображен не один, а

два совершенно одинаковых дракона Хартера-Хейтуэя, один из которых повернут на 180° относительно другого. Они располагаются один над другим так, что выпуклости одного в точности попадают во впадины другого. Их стыковка настолько идеальна, что между ними не существует никаких пробелов. Поэтому эту фигуру и называют двойным драконом. Одним из интересных геометрических свойств двойного дракона является то, что его можно покрыть четырьмя уменьшенными копиями его самого.

Систему итерируемых функций, соответствующую двойному дракону, можно легко написать. Пусть координаты точек А и В на комплексной плоскости соответственно равны: $z_1 = i - 1$ и $z_2 = i + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f_1 z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (z - z_1) e^{-iz/4} + z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} z e^{-iz/4} - 1, \\ f_2 z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (z - z_2) e^{-iz/4} + z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} z e^{-iz/4} + i. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Поскольку точки в процессе итераций с этими двумя функциями плотно заполняют на плоскости некоторую область, фрактальная размерность соответствующего аттрактора равна двум. Это естественно, так как совпадает с фрактальной размерностью кривой Пеано для одинарного дракона. Однако граница этой области фрактальна и имеет дробную размерность. Можно показать, что генератором для такой границы может служить следующая конструкция (рис. 7.19).

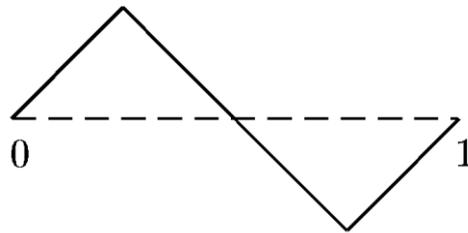


Рис. 7.19. Генератор контура двойного дракона

Она образована из одного большого отрезка длиной $l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и двух маленьких с длинами $l_2 = l_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} = l_1^3$, расположенных параллельно друг другу и перпендикулярно большому. Поскольку в нашем распоряжении имеется два масштаба, то фрактальная размерность контура D определяется при этом из уравнения

$$l_1^D + 2l_2^D = 1. \quad (7.8)$$

Оно эквивалентно кубическому уравнению для величины $x = 2^{D/2}$

$$x^3 - x^2 - 2 = 0, \quad (7.9)$$

которое имеет один вещественный корень $x_0 \approx 1.69562$. Отсюда находим, что $D = 1.5236$.

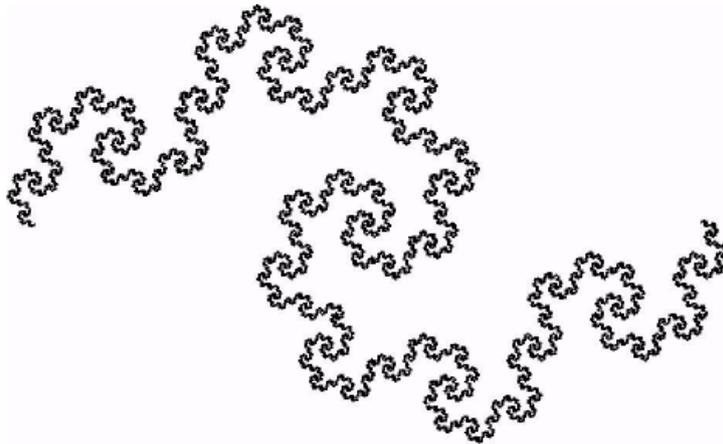


Рис. 7.20. Контур двойного дракона

Система итерируемых функций, осуществляющая преобразование единичного отрезка $(0, 1)$ в выше обозначенный генератор, выглядит следующим образом.

$$\begin{aligned} f_1 z &= \frac{1}{\sqrt{2}} z e^{-i\pi/4} + \frac{1}{4} + i \frac{1}{4}, \\ f_2 z &= \frac{1}{2\sqrt{2}} z e^{i\pi/4}, \\ f_3 z &= \frac{1}{2\sqrt{2}} z e^{i\pi/4} + \frac{3}{4} - i \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Если теперь в методе случайных итераций выбирать эти преобразования с одинаковой вероятностью (равной $\frac{1}{3}$), то результирующее множество точек будет неоднородным вдоль границы, будет представлять собой мультифрактал. Однако однородность распределения будет гарантирована в случае выбора вероятностей в соответствии с формулой (7.8), полагая

$$p_1 = l_1^D \approx 0.59 \quad p_2 = p_3 = l_2^D \approx 0.201 \quad (7.11)$$

Тогда мы получим рис. 7.20.

Найдем теперь систему итерируемых функций для самого дракона Хартера-Хейтуэя. На рис. 7.21 изображен принцип построения дракона. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC (изображенный на рисунке пунктиром) заменяется на следующем шаге на два ему подобных треугольника ADB и BEC. Зная координаты концов этих отрезков (они показаны в круглых скобках), можно вычислить коэффициенты двух линейных преобразований, которые осуществляют эту замену.

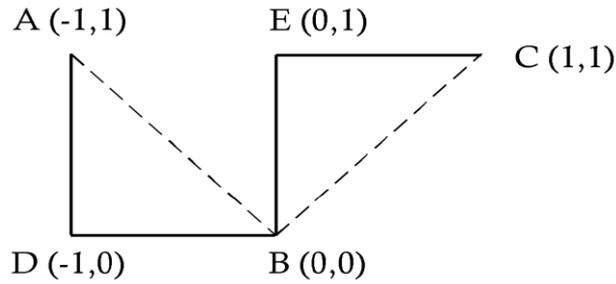


Рис. 7.21. Генератор для построения СИФ дракона Хартера-Хейтуэя

Первое преобразование переводит треугольник ABC в треугольник ADB, причем вершины треугольников переходят друг в друга по правилу $A \rightarrow A$, $B \rightarrow D$ и $C \rightarrow B$. Оно соответствует повороту треугольника ABC вокруг начала координат (т.е. точки B) по часовой стрелке на угол 45° , сжатию вдоль осей X и Y в $\frac{\pi}{2}$ раз и трансляции на единицу влево:

$$f_1 z = \frac{1}{\sqrt{2}} z e^{-i\pi/4} - 1 \quad (7.12)$$

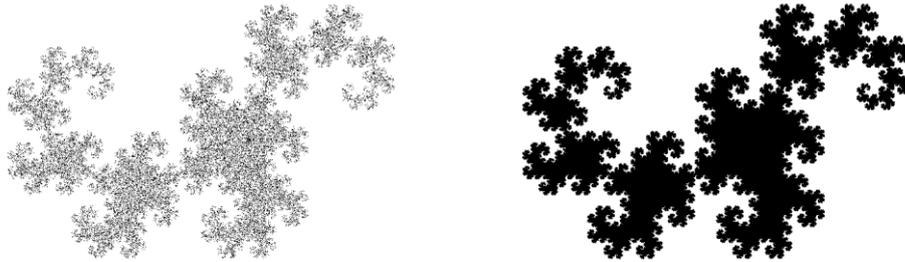


Рис. 7.22. Дракон Хартера-Хейтуэя, слева $3 \cdot 10^4$ итераций, справа – 10^6

Второе преобразование переводит треугольник ABC в треугольник ECB происходит по правилу $A \rightarrow C$, $B \rightarrow E$ и $C \rightarrow B$. Это соответствует функции

$$f_2 z = \frac{1}{\sqrt{2}} z e^{-i3\pi/4} + i \quad (7.13)$$

Оно соответствует повороту треугольника ABC вокруг точки B на угол в 135° по часовой стрелке, сжатию вдоль осей X и Y в $\sqrt{2}$ раз и трансляции на единицу вверх в положительном направлении оси Y.

Эти два линейных комплексных преобразования и составляют систему итерированных функций, аттрактором для которой является дракон Хартера-Хейтуэя. В этом нетрудно убедиться с помощью рандомизированного метода СИФ, выбирая эти два преобразования случайным образом, с одинаковой вероятностью 0,5, что и изображено на рис. 7.22.



Рис. 7.23. Гирлянда «волков», полученная с помощью формул (7.12) и (7.14)

Интересная модификация возникает, если мы второе преобразование выберем так, чтобы переход треугольника ABC в треугольник BEC происходил по правилу $A \rightarrow B$, $B \rightarrow E$ и $C \rightarrow C$. Это соответствует функции

$$\tilde{f}_2 z = \frac{1}{\sqrt{2}} z^* e^{i\pi/4} + i \quad (7.14)$$

вместо (7.13). Здесь звездочка означает операцию комплексного сопряжения. Казалось бы, невинная затея, и результат не должен от этого измениться. Рис. 7.23, однако, свидетельствует об обратном.

7.5. Сжимающие аффинные преобразования

Рассмотренные выше линейные преобразования на комплексной плоскости являются частными случаями более общего аффинного преобразования плоскости

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + by_n + e, \\ y_{n+1} &= cx_n + dy_n + f. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Его можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

Так, например, согласно уравнению (7.4) преобразование t_3 можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Видно, что оно сводится к двукратному сжатию вдоль осей X и Y и сопровождается трансляцией на некоторый вектор.

Преобразование, соответствующее функции (7.12), можно записать таким образом:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

Оно сводится к сжатию в $\sqrt{2}$ раз по обоим осям, повороту на 45° и к трансляции.

Наконец, преобразование, задаваемое функцией (7.14), соответствует такому же сжатию, отражению в горизонтальной плоскости, повороту на угол в 45° и трансляции

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

В общем же случае аффинное преобразование на плоскости задается шестью независимыми действительными числами. Два числа e и f описывают обычную трансляцию, а четыре числа a, b, c, d задают произвольное линейное преобразование при неизменном положении начала координат $(0,0)$.

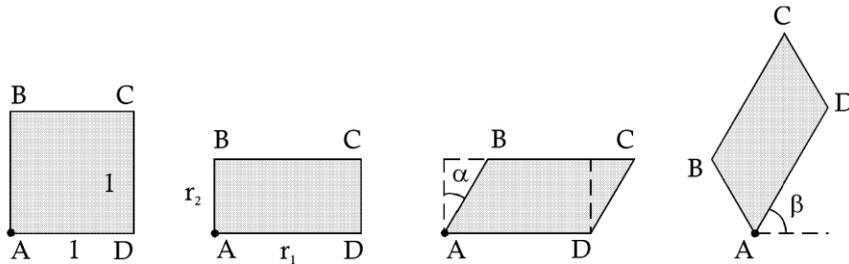


Рис. 7.24. Действие аффинного преобразования на единичный квадрат ABCD при $e = f = 0$

Если при аффинном преобразовании не меняется направление обхода произвольного контура, то его, согласно рис. 7.24, можно представить себе как произведение 3 преобразований

$$\hat{A} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \hat{T}_3 \cdot \hat{T}_2 \cdot \hat{T}_1 \quad (7.20)$$

Первое переводит единичный квадрат в произвольный прямоугольник со сторонами r_1 и r_2 и описывается диагональной матрицей

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

Это соответствует простому масштабированию двух координатных осей. Второе преобразование описывает скос этого прямоугольника в горизонтальном направлении на угол α и превращение его в параллелограмм со сторонами r_1 , $r_2/\cos\alpha$ и углом $\pi/2 - \alpha$ между ними.

$$\hat{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

И наконец, третье преобразование есть простой поворот получившегося параллелограмма на угол β вокруг начала координат

$$\hat{T}_3 = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

Поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей, то нетрудно видеть, что $\det \hat{A} = r_1 \cdot r_2$ и положителен. Это является признаком того, что преобразование не меняет направления обхода контура. Действительно, во всех четырех случаях направление обхода параллелограмма ABCD все время происходит по часовой стрелке.

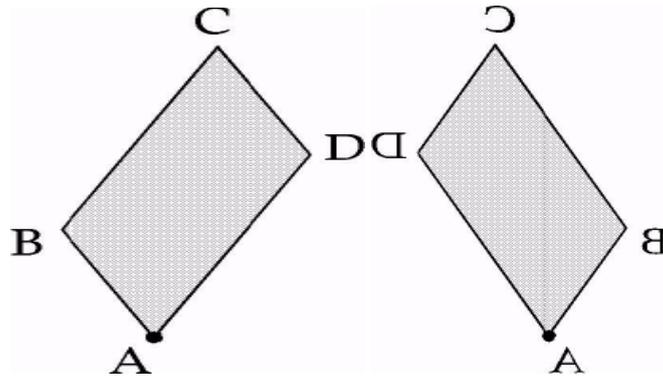


Рис. 7.25. Отражение в вертикальной плоскости меняет направление обхода

Если же определитель аффинного преобразования отрицателен, то это значит, что преобразование включает в себя еще и операцию отражения в вертикальной \hat{T}_v или в горизонтальной \hat{T}_h плоскости.

$$\hat{T}_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

В этом случае, как видно из рис. 7.25, направление обхода контура ABCD меняется на противоположное. Таким образом, в зависимости от знака $\det \hat{A}$ четыре коэффициента аффинного преобразования a, b, c, d можно всегда выразить через

два масштабных фактора r_1 , r_2 и два угла α и β . Они характеризуют форму, размеры, ориентацию и направление обхода получившегося параллелограмма. Фактически аффинное преобразование описывает переход от прямоугольной декартовой к произвольной косоугольной (правой или левой) системе координат.

Неподвижной точкой аффинного преобразования называется точка, которая остается на месте под воздействием данного преобразования. Она называется **притягивающей**, если, начав с произвольной точки на плоскости, мы в процессе итераций будем все время к ней приближаться. Если длина произвольного отрезка при аффинном преобразовании уменьшается, то оно называется **сжимающим**. Сжимающие аффинные преобразования играют ключевую роль в системах итерируемых функций. Можно показать, что именно в этом случае они имеют своим аттрактором фрактальное множество.

В применении же к одному аффинному преобразованию это означает, что неподвижная точка отображения (7.15) является притягивающей. Действительно, применяя последовательно шаг за шагом это преобразование к произвольному отрезку конечной длины, мы путем последовательных сжатий в конце концов придем к отрезку сколь угодно малой длины, и в пределе бесконечного числа шагов этот отрезок вырождается в точку. Эта точка, очевидно, и будет неподвижной точкой (аттрактором) нашего отображения.

Неподвижные точки каждого отображения, входящего в систему итерируемых функций, очевидно, принадлежат фрактальному множеству. Нетрудно убедиться, что в случае треугольника Серпинского этими точками являются вершины треугольника. Выясним, в каком случае аффинное преобразование является сжимающим. Пусть x_0, y_0 – притягивающая неподвижная точка отображения (7.15). Иными словами, имеет место равенство

$$\begin{aligned} x_0 &= ax_0 + by_0 + e, \\ y_0 &= cx_0 + dy_0 + f. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться тогда в том, что

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_0 &= a x_n - x_0 + b y_n - y_0, \\ y_{n+1} - y_0 &= c x_n - x_0 + d y_n - y_0. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Поскольку неподвижная точка x_0, y_0 по условию является притягивающей, это означает, что расстояние до нее при каждой итерации сокращается, т.е.

$$x_{n+1} - x_0^2 + y_{n+1} - y_0^2 < x_n - x_0^2 + y_n - y_0^2. \quad (7.27)$$

Воспользовавшись (7.27), получаем, что для этого должно выполняться условие

$$F_{u,v} \equiv au + bv^2 + cu + dv^2 < 1 \quad (7.28)$$

при любых u и v таких, что $u^2 + v^2 = 1$. Здесь под u и v понимаются величины

$$u = \frac{x_n - x_0}{\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}}, \quad v = \frac{y_n - y_0}{\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}}. \quad (7.29)$$

Физический смысл функции $F(u, v)$ заключается в том, что она описывает относительное уменьшение квадрата длины расстояния до неподвижной точки после каждой итерации. Можно показать, что точно так же при каждой итерации меняется и квадрат длины произвольного отрезка. Поэтому $\sqrt{F(u, v)}$ есть не что иное, как **коэффициент сжатия** аффинного преобразования для отрезка заданной ориентации (характеризуемой единичным вектором с компонентами u и v).

Очевидно, что функция $F(u, v)$, будучи по определению величиной сугубо положительной, на единичной окружности в плоскости u, v меняется в ограниченных пределах. Следовательно, она достигает там своего минимального и максимального значений. Аффинное преобразование будет сжимающим, если максимальное значение этой функции окажется меньше единицы.

Нахождение этих значений является задачей на условный экстремум функции двух переменных. С помощью метода неопределенных множителей Лагранжа она сводится к нахождению безусловного экстремума функции

$$F(u, v) + \lambda(1 - u^2 - v^2), \quad (7.30)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Приравняв нулю частные производные по u и v от этой функции, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 u + ab + cd v - \lambda u &= 0, \\ ab + cd u + b^2 + d^2 v - \lambda v &= 0. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Ее можно записать в матричной форме

$$\hat{A}^T \hat{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (7.32)$$

где \hat{A}^T – транспонированная матрица.

Таким образом, для обеспечения экстремума функции $F(u, v)$ на единичной окружности вектор $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ должен быть собственным вектором матрицы $\hat{A}^T \hat{A}$, а соответственно, величина λ – ее собственным значением. Поскольку

характеристическое уравнение квадратное, то в общем случае имеется два таких значения.

Умножая первое из уравнений (7.31) на u , а второе на v и затем складывая, получим, что экстремальное значение функции $F(u, v) = \lambda$. Максимуму, очевидно, соответствует максимальное собственное значение $-\lambda_{\max}$, а минимуму – минимальное, λ_{\min} . Длина произвольного отрезка L после применения аффинного преобразования (7.16) оказывается заключенной в интервале

$$\sqrt{\lambda_{\min}} L \leq L' \leq \sqrt{\lambda_{\max}} L. \quad (7.33)$$

Поэтому преобразование будет сжимающим при условии $\lambda_{\max} < 1$. Коэффициент сжатия при этом обычно определяется наибольшей величиной, $\sqrt{\lambda_{\max}}$.

7.6. Лист папоротника

Одним из наиболее ярких примеров среди различных систем итерируемых функций, несомненно, является открытая М. Барнсли система из четырех сжимающих аффинных преобразований, аттрактором для которой является множество точек, поразительно напоминающее по форме изображение листа папоротника. Ее можно представить в виде табл. 7.1.

Таблица 7.1

Аффинное преобразование с коэффициентами a, b, c, d, e, f

| a | b | c | d | e | f | p |
|-------|-------|-------|------|---|------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0,16 | 0 | 0 | 0,01 |
| 0,85 | 0,04 | -0,04 | 0,85 | 0 | 1,6 | 0,85 |
| 0,2 | -0,26 | 0,23 | 0,22 | 0 | 1,6 | 0,07 |
| -0,15 | 0,28 | 0,26 | 0,24 | 0 | 0,44 | 0,07 |

Каждая строчка этой таблицы соответствует одному аффинному преобразованию с коэффициентами a, b, c, d, e, f в соответствии с выражением (7.16). В последнем столбце таблицы приведены вероятности p , в соответствии с которыми в методе случайных итераций выбирается то или иное преобразование.

Результат действия этой системы функций на некоторую начальную точку для разного числа итераций приведен на рис. 7.26.



Рис. 7.26. Лист папоротника.

Слева направо показано 2000, 4000, 10000, 50000 и 200000 итераций

Видно, как с ростом числа итераций действительно возникает все более и более четкое изображение листа папоротника, удивительным образом напоминающее существующее в природе растение. Это множество точек бесконечно самоподобно, как и полагается всякому фракталу. Как следует из рис. 7.27, увеличенные малые фрагменты изображения подобны целому. Для разрешения этих фрагментов необходимо только, чтобы число итераций было достаточно велико.

Таким образом, чем больше используемое разрешение, тем больше точек требуется внести в память компьютера для того, чтобы построить соответствующее изображение. С другой стороны, запоминать координаты этих точек вовсе не требуется, так как они каждый раз могут быть заново получены с использованием системы функций, заданных табл. 7.1.



Рис. 7.27. Увеличенный фрагмент листа папоротника

В результате всего 28 чисел содержат всю необходимую информацию об этом нетривиальном рисунке. Возникает мысль, а нельзя ли подобным образом «кодировать» и другие изображения. Эта идея, будучи реализованной на практике, позволила бы сжимать изображения в десятки или даже в сотни раз. И действительно, в 1988 г. она была успешно воплощена Барнсли и Слоаном в созданной ими совместно компании по кодированию и сжатию графической информации с помощью соответствующим образом подобранной системы функций.

Давайте разберем более подробно этот замечательный пример и дадим по возможности наглядную геометрическую интерпретацию числам, приведенным в табл. 7.1. Для этой цели на рис. 7.28 показано действие этой системы функций на квадрат $ABCD$ (изображенный на рисунке пунктиром), повернутый на 45° так, что одна из его диагоналей совпадает с вертикальной осью y , а другая параллельна горизонтальной оси x (на рисунке, чтобы избежать громоздкости, сами оси не показаны, также не показаны все вершины A_i возникающих параллелограммов). Начало координат при этом совпадает с точкой A .

Первое преобразование соответствует сжатию этого квадрата в вертикальный отрезок прямой, длина которого составляет 16% от диагонали квадрата. Он обозначен на рисунке цифрой 1. Как мы убедимся ниже, это будущий "стебель" всех листьев папоротника.

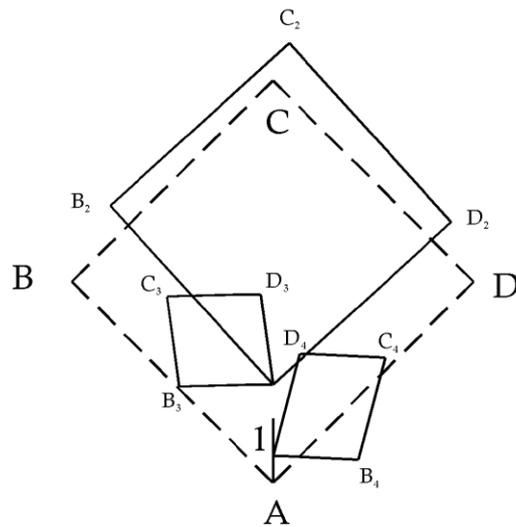


Рис. 7.28. Действие системы функций (табл. 7.1) на квадрат $ABCD$

Второе преобразование превращает квадрат $ABCD$ в квадрат $A_2B_2C_2D_2$, который имеет размер в 85% от оригинала, повернут по часовой стрелке относительно вершины A на угол в $2,7^\circ$ и смещен по вертикали вверх на расстояние в 1,6 условных единиц.

Третье аффинное преобразование переводит квадрат $ABCB$ в параллелограмм $A_3B_3C_3D_3$. Для этого сторона квадрата AB сжимается в 3,07 раза и поворачивается вокруг точки A на угол в $46,25^\circ$ против часовой стрелки. Сторона же квадрата AD этим преобразованием сжимается примерно в 3,12 раза и поворачивается в том же направлении на угол в $52,6^\circ$. После чего образовавшийся (близкий к ромбу) параллелограмм сдвигается вертикально вверх на 1,6 условных единиц.

Наконец, четвертое преобразование трансформирует исходный квадрат в параллелограмм $A_4B_4C_4D_4$. Для этого сторона AB сжимается в 3,29 раза и пово-

рачивается по часовой стрелке вокруг начала координат на угол примерно в $137,7^\circ$. Сторона же AD сжимается в 2,74 раза и поворачивается на угол в $30,4^\circ$, но против часовой стрелки! Затем получившийся параллелограмм смещается на 0,44 условные единицы по вертикали вверх.

Заметим, что в результате четвертого преобразования направление обхода вершин параллелограмма $A_4B_4C_4D_4$ меняется на противоположное по сравнению с исходным квадратом ABCD. Другими словами, четвертое преобразование содержит в себе операцию отражения (например, в вертикальной плоскости) и переводит в итоге правую систему координат в левую. Смысл этого действия для получения правильного изображения листа папоротника мы выясним несколько позже.

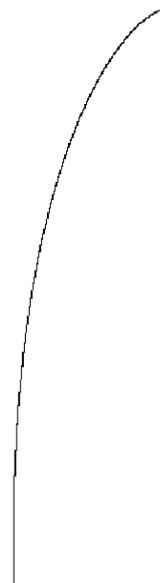
Давайте теперь исключим первое преобразование из нашей системы функций. В результате получим СИФ вида (табл. 7.2) всего с тремя функциями и исправленными вероятностями (которые в сумме всегда должны давать единицу). Изображение, полученное итерациями этой СИФ, показано ниже на рис. 7.29,а.

Таблица 7.2

| a | b | c | d | e | f | p |
|-------|-------|-------|------|---|------|------|
| 0,85 | 0,04 | -0,04 | 0,85 | 0 | 1,6 | 0,86 |
| 0,2 | -0,26 | 0,23 | 0,22 | 0 | 1,6 | 0,07 |
| -0,15 | 0,28 | 0,26 | 0,24 | 0 | 0,44 | 0,07 |



а



б

Рис. 7.29. Лист без стебля (а) и стебель без листьев (б)

Как видно, в нем отсутствует стебель. Это и понятно. Ведь за формирование стебля как раз и ответственно первое и второе аффинные преобразования (табл. 7.3). Действительно, если мы теперь оставим только их, то получим стебель, изображенный на рис. 7.29,а.

Таблица 7.3

| a | b | c | d | e | f | p |
|------|------|-------|------|---|-----|------|
| 0 | 0 | 0 | 0,16 | 0 | 0 | 0,05 |
| 0,85 | 0,04 | -0,04 | 0,85 | 0 | 1,6 | 0,95 |

Довольно очевидно, что за слабый изгиб листа папоротника вправо ответственен поворот на угол в 2.7° , фигурирующий во втором преобразовании. Если мы теперь исключим этот поворот, то получим систему функций вида (табл. 7.4)

Таблица 7.4

| a | b | c | d | e | f | p |
|-------|-------|------|------|---|------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0,16 | 0 | 0 | 0,01 |
| 0,85 | 0 | 0 | 0,85 | 0 | 1,6 | 0,85 |
| 0,2 | -0,26 | 0,23 | 0,22 | 0 | 1,6 | 0,07 |
| -0,15 | 0,28 | 0,26 | 0,24 | 0 | 0,44 | 0,07 |

Соответствующее этой системе изображение аттрактора приведено на рис. 7.30,а. Как и следовало ожидать, в нем уже нет изгиба, лист папоротника получился прямой. Если теперь трансляцию в четвертом преобразовании сделать такой же, как и в третьем, т.е. использовать систему функций, то получим изображение, приведенное на рис. 7.30,б. Таким образом, трансляция в третьем и четвертом преобразовании задает относительное положение листьев папоротника по обе стороны от стебля.

Таблица 7.5

| a | b | c | d | e | f | p |
|-------|-------|------|------|---|-----|------|
| 0 | 0 | 0 | 0,16 | 0 | 0 | 0,01 |
| 0,85 | 0 | 0 | 0,85 | 0 | 1,6 | 0,85 |
| 0,2 | -0,26 | 0,23 | 0,22 | 0 | 1,6 | 0,07 |
| -0,15 | 0,28 | 0,26 | 0,24 | 0 | 1,6 | 0,07 |

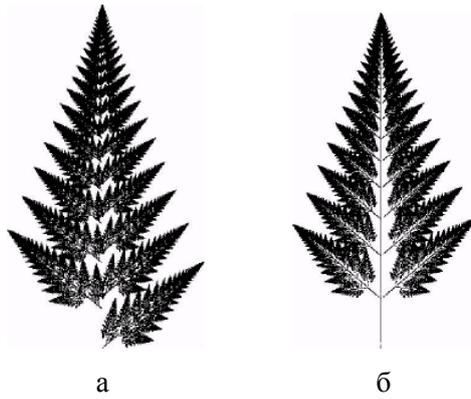


Рис. 7.30. Прямой лист папоротника: а – табл. 7.4, б – табл. 7.5

Кажется, теперь мы начинаем понимать, как работает система функций (табл. 7.1). Первые два преобразования формируют стебель, второе и третье формируют листья с одной стороны, а второе и четвертое – с другой стороны стебля (рис. 7.31). Относительное положение листьев определяется трансляцией.



Рис. 7.31. Аттрактор второго и третьего (а) и второго и четвертого (б) преобразований системы функций (табл. 7.1)

Нам осталось разобраться, зачем нужно отражение в четвертом преобразовании. Для этого воспользуемся упрощенной версией системы функций (табл. 7.1). А именно, для третьего и четвертого преобразований используем матрицы $\hat{A}_{3,4}$ соответственно:

$$\hat{A}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

Первая из них соответствует сжатию в 3 раза по обеим осям и повороту против часовой стрелки на угол 60° . Вторая в дополнение к первой содержит еще и операцию отражения в вертикальной плоскости, т.е. замену $x \rightarrow -x$. В итоге вместо (табл.7.1) мы приходим к системе функций

Таблица 7.6

| a | b | c | d | e | f | p |
|---------|---------|--------|--------|---|------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0,16 | 0 | 0 | 0,01 |
| 0,85 | 0,04 | -0,04 | 0,85 | 0 | 1,6 | 0,85 |
| 0,1667 | -0,2887 | 0,2887 | 0,1667 | 0 | 1,6 | 0,07 |
| -0,1667 | 0,2887 | 0,2887 | 0,1667 | 0 | 0,44 | 0,07 |

Результат действия этой системы функций показан на рис. 7.32 слева.

Если же теперь для четвертого преобразования мы вместо поворота на $+60^\circ$ и последующего отражения в вертикальной плоскости используем поворот на -60° (т.е. по часовой стрелке), то получим систему функций

Таблица 7.7

| a | b | c | d | e | f | p |
|--------|---------|---------|--------|---|------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0,16 | 0 | 0 | 0,01 |
| 0,85 | 0,04 | -0,04 | 0,85 | 0 | 1,6 | 0,85 |
| 0,1667 | -0,2887 | 0,2887 | 0,1667 | 0 | 1,6 | 0,07 |
| 0,1667 | 0,2887 | -0,2887 | 0,1667 | 0 | 0,44 | 0,07 |

Результат ее итераций показан на рис. 7.32,а.

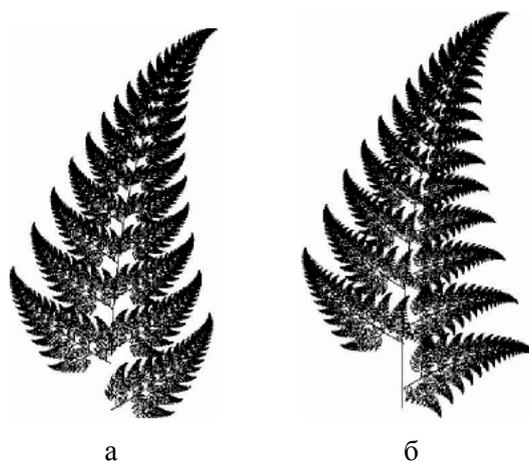


Рис. 7.32. Лист папоротника с правильным изгибом (а) и с неправильным (б)

Сравнивая два изображения, мы понимаем, что отражение приводит к правильному изгибу тех листьев, которые расположены с правой стороны от стебля. Если бы во втором преобразовании не содержалось этого изгиба, то лист папоротника был бы прямой и результат действия обоих преобразований (табл. 7.6) и (табл. 7.7) тогда, очевидно, был бы одинаков.

Меняя параметры аффинных преобразований, входящих в систему функций (табл. 7.1), можно получить различные модификации листа папоротника (рис. 7.33). Часто они оказываются совсем не похожими на своего «родителя».

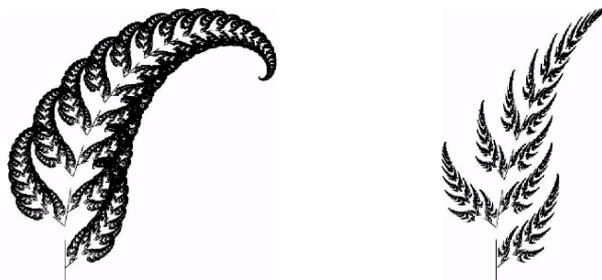


Рис. 7.33. Представители «семейства папоротниковых»

И в завершение параграфа приведем СИФ для растения, которое особенно популярно в канун празднования нового года. Это, безусловно, елка, и построить ее можно по образу и подобию листа папоротника, надо только, чтобы ее ветки смотрели не вверх, как листья у папоротника, а вниз (рис. 7.34). Левая елка получена с помощью системы функций (табл. 7.8), где в качестве третьего и четвертого преобразований использованы соответственно повороты на $+120^\circ$ и -120° со сжатием в 3 раза по обоим осям.

Таблица 7.8

| a | b | c | d | e | f | p |
|---------|---------|---------|---------|---|-----|------|
| 0,1 | 0 | 0 | 0,16 | 0 | 0 | 0,01 |
| 0,85 | 0,04 | -0,04 | 0,85 | 0 | 1,6 | 0,73 |
| -0,2357 | -0,2357 | 0,2357 | -0,2357 | 0 | 1,6 | 0,13 |
| -0,2357 | 0,2357 | -0,2357 | -0,2357 | 0 | 1,6 | 0,13 |

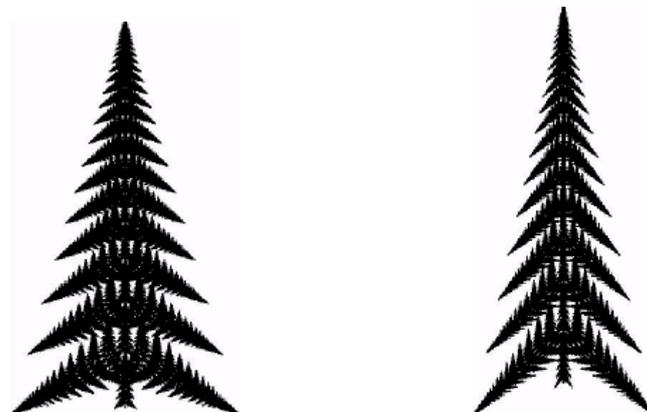


Рис. 7.34. Елки

Правая елка получена с помощью системы функций (табл. 7.9), где, в отличие от предыдущего случая, поворот в двух последних преобразованиях произведен на угол $\pm 3\pi/4$. Используются также несколько другие значения вероятностей. Кроме того, для большей правдоподобности изображения в обоих случаях мы несколько утолщили «ствол».

Таблица 7.9

| a | b | c | d | e | f | p |
|---------|---------|---------|---------|---|-----|------|
| 0,1 | 0 | 0 | 0,16 | 0 | 0 | 0,01 |
| 0,85 | 0,04 | -0,04 | 0,85 | 0 | 1,6 | 0,85 |
| -0,1667 | -0,2887 | 0,2887 | -0,1667 | 0 | 1,6 | 0,07 |
| -0,1667 | 0,2887 | -0,2887 | -0,1667 | 0 | 1,6 | 0,07 |

ВИДЫ РАЗМЕРНОСТЕЙ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ

В конце 1910 года великий голландский физик Хендрик А. Лоренц, выступая с докладом на Вольфскелевских чтениях в Геттингене, высказал некоторое предположение. Суть высказанного Лоренцом предположения состоит в том, что число резонансов $N_3 f$, вплоть до некоторой большой частоты f , зависит только от объема V резонатора и не зависит от его формы.

Один из слушателей, молодой человек по имени Герман Вейль, вскоре доказал, что при большой частоте f для резонаторов с достаточно гладкими, но в остальном произвольными границами асимптотически справедливо соотношение $N_3 f = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{f}{c} \right)^3$, где c - скорость звука.

Что произойдет, если отбросить требование Вейля о гладкости границ? Что, если периметр резонатора представляет собой фрактал с фрактальной размерностью $D > 1$? М.В. Бери высказал предположение, что $|\Delta N f| = \left(L \frac{f}{c} \right)^D$, где L - постоянная длины, а D - размерность Хаусдорфа для периметра.

Предположение Бери о том, что D в действительности представляет собой размерность Хаусдорфа, в некоторых случаях оказывается неверным. Как показали Липидус и Флекингер-Пелле, правильной фрактальной размерностью в этом случае является размерность Минковского - еще одна нетривиальная размерность, введенная для других целей Германом Минковским и обобщенная на фракталы Булиганом. Размерность Минковского не всегда совпадает с размерностью Хаусдорфа.

8.1. Вычисление размерности с помощью подсчета клеток

Предложенный Хаусдорфом рецепт - покрытие фрактала дисками - далеко не всегда представляет собой удобный способ измерения фрактальной размерности, так же как и способ «сосиски» Минковского (рассмотренный нами во второй главе).

Следует отметить, что описанным ниже способом вычисляется не только размерность Минковского, но и Хаусдорфа, хотя для некоторых множеств (например, для счетных множеств) эти размерности, вычисленные аналитически, могут отличаться. Но в большинстве важных случаев эти размерности совпадают.

Для многих реальных фракталов метод определения размерности путем подсчета числа клеток, содержащих контур фрактала, оказывается более пред-

почтительным. Для того чтобы определить размерность фрактала таким способом, мы накладываем на него квадратную решетку (рис.8.1) и подсчитываем число клеток N_ε , в которые попадает наш фрактал. Когда расстояние ε между параллельными линиями квадратной сетки становится достаточно малым, величина $\frac{\ln N_\varepsilon}{\ln 1/\varepsilon}$ сходится к конечному значению – размерности Хаусдорфа D .

Разберём алгоритм на примере двумерного случая. Эта процедура используется для анализа изображений.

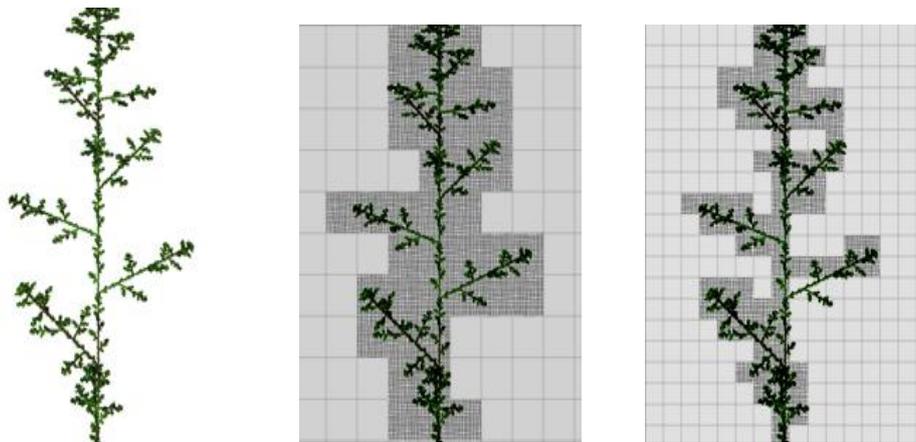


Рис. 8.1. Определение размерности, путем подсчета клеток

Построив сетки для разных значений ε , получаем табл. 8.1.

Таблица 8.1

| ε | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|
| N | 917 | 354 | 206 | 141 | 102 | 82 | 66 | 56 | 49 |

В двукратно логарифмическом масштабе строим зависимость числа клеток N от размера клеток ε . Расчет углового коэффициента наклона прямой ведем с помощью метода наименьших квадратов.

Первый недостаток этого метода – график получается не идеально ровным. Наклон этого графика вычисляется методом наименьших квадратов. В данном примере наклон (рис.8.2) равен -1.3388, то есть $D = 1.3388$.

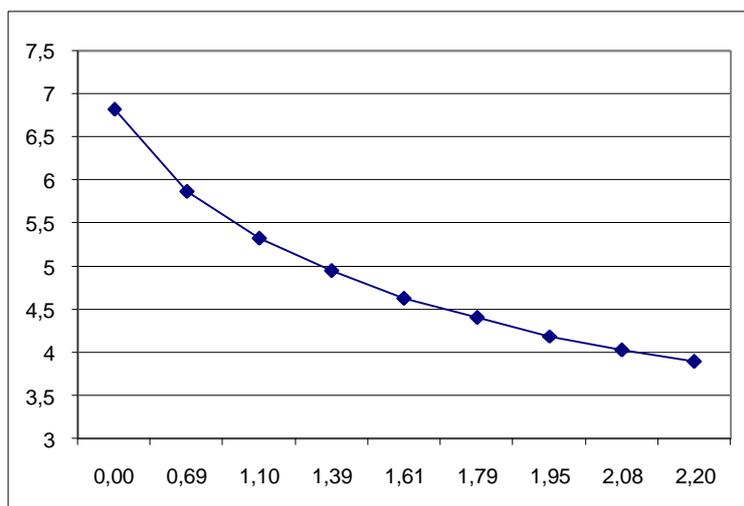


Рис. 8.2. График прямой в двукратно логарифмическом масштабе

Еще одним недостатком этого метода является то, что используемое покрытие не минимально. Поиск минимального покрытия – нетривиальная задача. Затраты на его вычисление могут оказаться огромными, а полученное улучшение небольшим.

Одним из эффектов вычислений может служить следующее ступенчатое поведение графика (рис. 8.3).

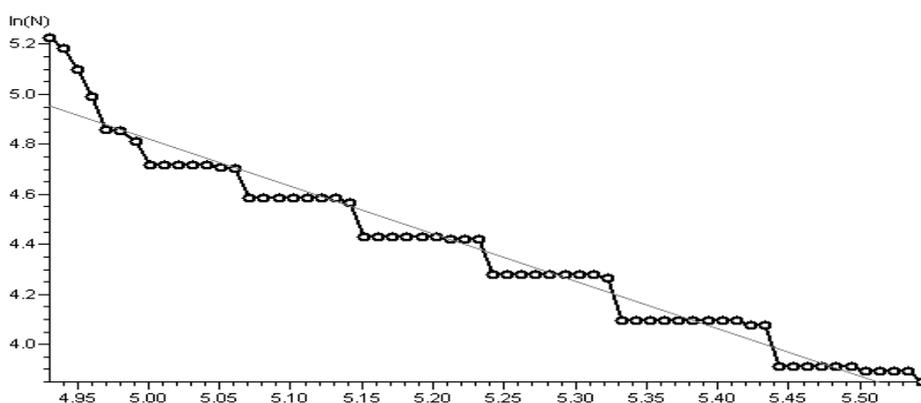


Рис. 8.3. Ступенчатое поведение графика

Этот эффект проявляется при плавном изменении ϵ между итерациями. На приведенном рисунке разница ϵ между соседними точками составляет 1%. Эффект проявляется для всех типов фракталов и зависит от алгоритма подсчета размерности.

Для наглядности рассмотрим простой случай, когда покрытие состоит из одного и двух квадратов.

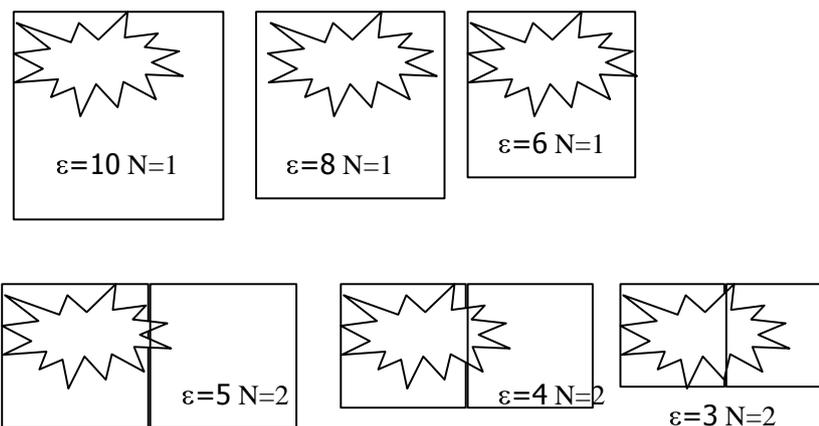


Рис. 8.4. Наглядное представление покрытия фрактала одной и двумя клетками

Для клеточных моделей существуют естественные ограничения $1 \leq \varepsilon \leq L$. Для векторных моделей ограничение менее строгое $0 < \varepsilon \leq L$. Это означает, что ε можно достаточно близко приближать к 0, эта близость ограничена только точностью вычислений конкретной ЭВМ. Это приводит еще к одной проблеме. Если модель состоит из конечного количества векторных объектов, то начиная с некоторого момента ε может стать намного меньше размера любого объекта. Это приводит к тому, что наклон графика становится равным топологической размерности объектов. То есть проблема состоит в том, чтобы выбрать нужный диапазон для ε , который имеет физический смысл. От выбора диапазона зависит получаемая величина. Интуитивно можно предположить, что $\delta \geq \varepsilon \geq L$, где средняя δ – длина объектов, составляющих множество, а L – размер всего ансамбля. Выбор диапазона может быть договорным для разных типов явлений, пока не будет создана точная математическая теория для фракталов, задаваемых в ЭВМ.

8.2. Вычисление размерности с помощью точечного метода

Точечный метод является альтернативой к предыдущему методу. Рассмотрим сетку, покрывающую весь фрактал. Ее узлы будем называть ячейками. Каждую ячейку, имеющую непустое пересечение с фракталом, будем считать за одну точку. Ясно, что именно эта схема реализуется при графическом выводе фрактала на экран как массива пикселей. В этом параграфе «подсчет числа точек в клетке» означает подсчет числа ячеек (или пикселей) в клетке. Это не то же самое, что считать действительное число геометрических точек в клетке – ведь их бесконечно много. Точечный метод принципиально отличается от клеточного; в первом подсчитывается число точек в клетке, а во втором – число клеток, необходимых для покрытия фрактала. Для упрощения вычислений будем считать клетки квадратными. Размер L клетки означает число ячеек по каждой сто-

роне. Ограничимся нечетными значениями L ; в этом случае центральная ячейка клетки будет равноудалена от всех сторон. Сначала вычислим вероятности $P_{m,L}$ того, что клетка размера L содержит m точек (ячеек) фрактала. Для этого вокруг каждой точки фрактала, считая ее центральной, построим клетку размера L и подсчитаем число точек, попавших в нее. Предположим, что фрактал содержит M точек. Тогда $P_{m,L}$ равно числу клеток, содержащих m точек, $m = 1, \dots, M$, деленному на M . Заметим, что сумма всех вероятностей равна единице:

$$\sum_{m=1}^M P_{m,L} = 1.$$

Как и в предыдущем алгоритме, N_L есть число клеток размера L , необходимых для покрытия фрактала. Как подсказывает интуиция, число клеток размера L , содержащих m точек, равно $\frac{M}{m} P_{m,L}$. Поэтому оценка числа клеток, покрывающих все изображение, равна

$$\langle N_L \rangle = \sum_{m=1}^K \frac{M}{m} P_{m,L} = M \sum_{m=1}^K \frac{1}{m} P_{m,L},$$

где K – возможное число точек в клетке. Следовательно,

$$\tilde{N}_L = \sum_{m=1}^K \frac{1}{m} P_{m,L},$$

также пропорционально L^{-d} и может быть использовано для оценки фрактальной размерности d .

Практически, как в клеточном, так и в точечном методе не удастся определить размерность Хаусдорфа или Минковского с точностью более одного или двух десятичных разрядов, что, конечно, не всегда приемлемо. Тем не менее, численная оценка размерности может применяться для распознавания образов. Например, с помощью фрактальной размерности можно отличить контур дерева от очертания гор на фоне неба.

8.3. Мультифракталы и обобщенные размерности Реньи

Дадим общее определение мультифракталов. Рассмотрим фрактальный объект, занимающий некую ограниченную область A размера L в Евклидовом пространстве размерности d . Пусть на каком-то этапе его построения он представляет собой множество точек из $N \gg 1$, как-то распределенных в этой области. Мы будем предполагать, что в конце концов $N \rightarrow \infty$. Примером такого множества может служить треугольник Серпинского, построенный методом случай-

ных итераций (РСИФ). Каждый шаг итерационной процедуры добавляет к этому множеству одну новую точку.

Множество точек может представлять собой некоторую популяцию, состоящую из особей одного вида, распределенных по области A . Такой популяцией могут быть, например, народонаселение или сеть метеостанций. Обе популяции неравномерно распределены по поверхности Земли. Пространственное распределение энергии, распределение ошибок в канале связи, распределение примесей в жидких средах, масс в веществе – примеры таких популяций. Важно отметить, что неравномерное распределение особей остается в силе независимо от линейного масштаба.

Разобьем всю область A на кубические ячейки со стороной $\varepsilon \ll L$ и объемом ε^d . В дальнейшем нас будут интересовать только занятые ячейки, в которые попала хотя бы одна точка. Пусть номер занятых ячеек i изменяется в пределах $i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$, где N_ε – суммарное количество занятых ячеек, которое, конечно, зависит от размера ячеек ε .

Пусть $n_i \varepsilon$ – количество точек в ячейке с номером i , тогда величина

$$p_i \varepsilon = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i \varepsilon}{N} \quad (8.1)$$

есть вероятность того, что наугад взятая точка из нашего множества содержится в i -й ячейке. То есть эта вероятность характеризует относительную заселенность ячеек. По правилу нормировки вероятностей:

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} p_i \varepsilon = 1. \quad (8.2)$$

Введем в рассмотрение так называемую **обобщенную статистическую сумму** $Z(q, \varepsilon)$, характеризуемую показателем степени q , который может принимать любые значения в интервале $-\infty < q < +\infty$

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} p_i^q \varepsilon. \quad (8.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Спектром **обобщенных фрактальных размерностей** Реньи D_q , характеризующих распределение точек в области A , определяется с помощью соотношения

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (8.4)$$

где функция $\tau(q)$ имеет вид

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (8.5)$$

Для обычного однородного фрактала все эти размерности совпадают. То есть если $D_q = D = const$, значит, не зависит от q , то рассматриваемое множество точек представляет собой обычный, регулярный фрактал, который характеризуется всего лишь одной величиной – фрактальной размерностью D . Напротив, если функция D_q как-то меняется с q , то рассматриваемое множество точек является **мультифракталом**.

Таким образом, мультифрактал в общем случае характеризуется нелинейной функцией $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N \varepsilon} p_i^q \varepsilon \approx \varepsilon^{\tau(q)}. \quad (8.6)$$

Следует иметь в виду, что в реальной ситуации мы всегда имеем конечное, хотя и очень большое число дискретных точек N , поэтому при проведении компьютерного анализа конкретного множества предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ надо выполнять, помня, что ему всегда предшествует предел $N \rightarrow \infty$.

В случае обычного регулярного фрактала во всех занятых ячейках содержится одинаковое количество точек

$$n_i \varepsilon = \frac{N}{N \varepsilon}, \quad (8.7)$$

т.е. фрактал является **однородным**. Для этого случая очевидно, что относительная населенность всех ячеек тоже одинакова. Тогда обобщенная статистическая сумма принимает вид

$$Z(q, \varepsilon) = N \varepsilon^{1-q}. \quad (8.8)$$

Учтем теперь, что, согласно определению фрактальной размерности, число занятых ячеек при достаточно малом ε ведет себя следующим образом

$$N \varepsilon \approx \varepsilon^{-D}. \quad (8.9)$$

Подставляя это в формулу (8.8) и сравнивая с (8.6), мы приходим к выводу, что в случае обычного фрактала функция

$$\tau(q) = q - 1 - D, \quad (8.10)$$

т.е. является линейной. Тогда все $D_q = D$ и действительно не зависят от q . Для фрактала, все обобщенные фрактальные размерности D_q которого совпадают, часто используется термин **монофрактал**.

Если распределение точек по ячейкам неодинаково, то фрактал является неоднородным, т.е. представляет из себя мультифрактал, и для его характеристики

необходим целый спектр обобщенных фрактальных размерностей D_q , число которых, в общем случае, бесконечно.

Так, например, при $q \rightarrow +\infty$ основной вклад в обобщенную статистическую сумму (8.3) вносят ячейки, содержащие наибольшее число частиц n_i в них и, следовательно, характеризующиеся наибольшей вероятностью их заполнения p_i . Наоборот, при $q \rightarrow -\infty$ основной вклад в сумму (8.3) дают самые разреженные ячейки с малыми значениями чисел заполнения p_i . Таким образом, функция D_q показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек A .

8.4. Фрактальная D_0 и информационная D_1 размерности

Выясним теперь, какой физический смысл имеют обобщенные фрактальные размерности D_q для некоторых конкретных значений q . Так, при $q = 0$ из выражения (8.3) следует, что

$$Z_{0,\varepsilon} = N \varepsilon. \quad (8.11)$$

С другой стороны, согласно формулам (8.6) и (8.4),

$$Z_{0,\varepsilon} \approx \varepsilon^{\tau_0} = \varepsilon^{-D_0}. \quad (8.12)$$

Сопоставляя эти два равенства, мы приходим к соотношению $N \varepsilon \approx \varepsilon^{-D_0}$. Это означает, что величина D_0 представляет собой обычную хаусдорфову размерность множества A . Она является наиболее грубой характеристикой мультифрактала и не несет информации о его статистических свойствах.

Выясним теперь смысл величины D_1 . Поскольку при $q = 1$, в силу условия нормировки вероятности (8.2), статистическая сумма равна

$$Z_{1,\varepsilon} = 1, \quad (8.13)$$

то $\tau_1 = 0$. Таким образом, мы имеем неопределенность с помощью очевидного равенства

$$Z_{q,\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N\varepsilon} p_i^q = \sum_{i=1}^{N\varepsilon} p_i \exp\left[q-1 \ln p_i \right]. \quad (8.14)$$

Теперь, устремляя $q \rightarrow 1$, раскладывая экспоненту и учитывая условие нормировки (8.2), получаем

$$Z_{q \rightarrow 1, \varepsilon} \approx \sum_{i=1}^{N \varepsilon} [p_i + q-1 p_i \ln p_i] = 1 + q-1 \sum_{i=1}^{N \varepsilon} [p_i \ln p_i]. \quad (8.15)$$

В результате мы приходим к следующему выражению:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N \varepsilon} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}. \quad (8.16)$$

С точностью до знака числитель в этой формуле представляет собой *энтропию* фрактального множества $S \varepsilon$:

$$S \varepsilon = - \sum_{i=1}^{N \varepsilon} p_i \ln p_i. \quad (8.17)$$

Такое определение энтропии множества полностью идентично используемому в термодинамике, где под p_i понимается вероятность обнаружить систему в квантовом состоянии i . В результате величина обобщенной фрактальной размерности D_1 связана с энтропией соотношением

$$D_1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S \varepsilon}{\ln \varepsilon}. \quad (8.18)$$

В термодинамике энтропия есть мера беспорядка в системе. Простой пример, где молекулы газа, помещенные вначале в одну половину сосуда, заполняют весь сосуд, когда перегородка убирается, показывает, что в этом процессе беспорядок, а следовательно, энтропия возрастает. Этот рост беспорядка связан с ростом нашего незнания о состоянии системы, поскольку до удаления перегородки мы знали о расположении молекул больше.

Основываясь на подобных соображениях, Клод Шеннон обобщил понятие энтропии S , известное в термодинамике, на абстрактные задачи теории передачи и обработки информации. Для этих задач энтропия стала мерой количества информации, необходимой для определения системы в некотором положении i . Другими словами, она является мерой нашего незнания о системе.

Поясним эти соображения на простом примере. Допустим, имеется ящик с двумя отделениями, в одном из которых находится точка. Однако мы не знаем, в каком. Спрашивается, сколько вопросов с ответом да или нет надо задать, чтобы определить местоположение точки? Ответ очевиден – один вопрос. Эту информацию принимают за единицу и называют ее *бит*.

Для обнаружения точки в ящике с четырьмя возможными состояниями требуется уже два вопроса, и, соответственно, мера нашего незнания о системе рав-

на двум битам. Эту информацию можно записать как логарифм по основанию два от числа возможных состояний системы

$$I = \log_2 4. \quad (8.19)$$

Теперь становится понятно, что справедливо логарифмическое соотношение между максимальным количеством информации I и числом состояний M

$$I = \log_2 M. \quad (8.20)$$

Так, например, чтобы определить положение точки на шахматной доске с $64 = 2^6$ клетками, требуется шесть (6) вопросов.

В предыдущем случае ящика с двумя состояниями количество информации в один бит можно выразить также следующим образом:

$$I = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right). \quad (8.21)$$

Учитывая, что $\frac{1}{2} = p_1 = p_2$ -- есть вероятность обнаружить систему в одном из ящиков, эту формулу можно переписать следующим образом:

$$I = -\sum_i p_i \log_2 p_i. \quad (8.22)$$

В таком виде она справедлива и в случае ящика с $M = 2^n$ состояниями, где все вероятности $p_i = \frac{1}{M}$ одинаковы. Более того (и это как раз и составляет результат, полученный Шенноном), эта формула остается справедливой и в случае неравных вероятностей p_i , однако ее нужно тогда понимать в смысле среднего значения по большому числу испытаний. Отсюда уже остается всего один шаг до соотношения между энтропией S_ε и количеством информации I .

Возвращаясь к исходной задаче о распределении точек на фрактальном множестве A , можно сказать, что поскольку, как следует из (8.18),

$$S_\varepsilon \approx \varepsilon^{-D_1}, \quad (8.23)$$

то величина D_1 характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке. В связи с этим обобщенную фрактальную размерность D_1 часто называют **информационной** размерностью. Она показывает, как информация, необходимая для определения местоположения точки, возрастает при стремлении размера ячейки ε к нулю.

8.5. Корреляционная D_2 размерность

Рассмотрим еще один частный случай, $q = 2$, и покажем, какой физический смысл имеет обобщенная фрактальная размерность D_2 . Для нее справедливо следующее выражение:

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N \varepsilon} p_i^2}{\ln \varepsilon}. \quad (8.24)$$

Определим парный корреляционный интеграл

$$I \varepsilon = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n,m} \Theta \varepsilon - |r_n - r_m|, \quad (8.25)$$

где суммирование проводится по всем парам точек нашего фрактального множества с радиус-векторами r_n и r_m , Θx – ступенчатая функция Хэвисайда, $\Theta x = 1$, если $x \geq 0$ и $\Theta x = 0$, если $x < 0$. Сумма в выражении (8.25) определяет число пар точек n, m , для которых расстояние между ними меньше, чем ε . Поэтому, поделенная на N^2 , она определяет вероятность того, что две наугад взятые точки разделены расстоянием меньшим, чем ε .

Эту же вероятность можно определить и по-другому. Величина p_i , согласно своему определению (8.1), представляет собой вероятность попадания точки в i -ю ячейку с размером ε . Следовательно, величина p_i^2 представляет собой вероятность попадания в эту ячейку двух точек. Суммируя p_i^2 по всем занятым ячейкам, мы получаем вероятность того, что две произвольно выбранные точки из множества A лежат внутри одной ячейки с размером ε . Следовательно, расстояние между этими точками будет меньше или соизмерно ε . Таким образом, с точностью до численных коэффициентов, принимая во внимание равенство (8.24), получаем

$$I \varepsilon \approx \sum_{i=1}^{N \varepsilon} p_i^2 \approx \varepsilon^{D_2}. \quad (8.26)$$

Мы приходим к выводу, что обобщенная размерность D_2 определяет зависимость корреляционного интеграла $I \varepsilon$ от ε в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. По этой причине величину D_2 называют *корреляционной* размерностью.

Другие подходы к измерению размерности

Существует зависимость поведения некоторых объектов от размерности пространства, в котором они определены. Этот принцип является еще одним подходом к измерению размерности в пространстве, определяемым фракталом.

Таким примером может служить случайное броуновское движение. Можно рассмотреть броуновское движение внутри фрактала и посчитать зависимость расстояния до центра от времени. В работе профессора Шломо анализируется подобное движение в клеточной двумерной модели фрактала и возможные экспоненты для разных величин.

Можно отметить, что одним из таких интуитивно понятных процессов является расширение шара. Если определить понятие шара в пространстве определенным фракталом, то можно посмотреть зависимость его объема от радиуса и тем самым вычислить степенные показатели этого расширения. То же самое можно проделать и с площадью шара. Можно отслеживать соотношения периметра и площади.[feder]

Гармоническая мера

При описании физических явлений бывает важно знать эффективную площадь взаимодействия объекта со средой. Если объект фрактальный, то площадь как таковая не существует. Для такого описания существует так называемая гармоническая мера – распределение вероятности того, что частица, начав движение с бесконечности, коснется определенной области объекта. [8] Эта мера моделируется с помощью компьютера.

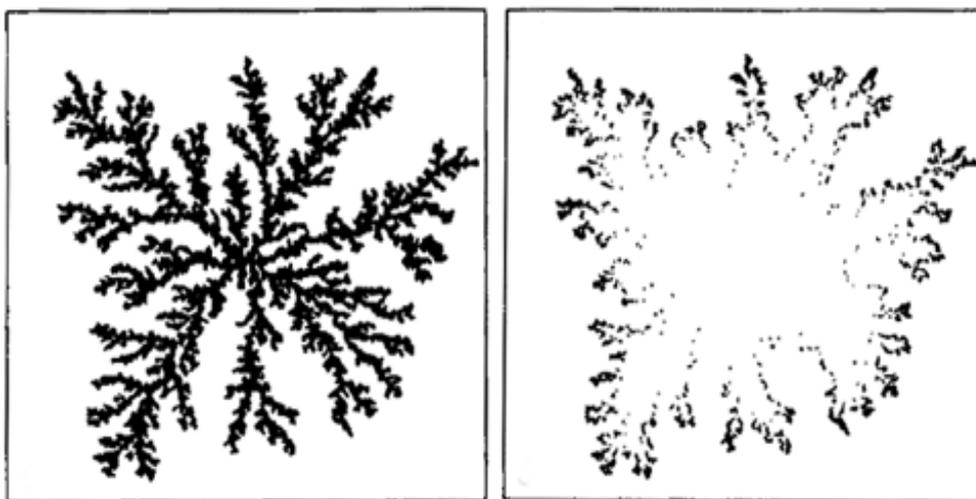


Рис. 8.5. Исходный объект и гармоническая мера

Существует проблема выбора траектории движения частиц. При разных траекториях мера может получиться разной. Так, если траектория будет изломана определенным образом, то у частиц будет больше шансов достичь малодоступные участки фрактала.

Физический смысл фрактальных величин

Для физических процессов зачастую важны такие показатели, как площадь взаимодействия. Например, при горении бензиновой смеси в двигателе внутреннего сгорания смесь, поступающая в двигатель, представлена в виде набора капелек и струек бензина разной величины.

Большинство описаний используют усредненное описание смеси. Скажем, соотношение объема топлива к объему цилиндра ничего не говорит о пространственном распределении смеси. Она может быть одинакова как для пара, так и для небольшой лужицы бензина, находящейся на дне цилиндра. То есть информация о площади взаимодействия смеси с воздухом напрямую не используется.

С другой стороны, стоит вопрос, какова же эта площадь, если распределение напоминает собой стохастический фрактал? Величина площади как таковая не существует, так как она сильно зависит от точности измерения, как в случае береговой линии. Вместо площади можно измерить различные фрактальные величины. Экспериментально можно выяснить, для какой размерности эффективность горения смеси максимальна. И исходя из этого строить теорию, которая будет обладать предсказательной силой.

Подобные рассуждения могут возникнуть при исследовании искрового разряда. На момент описания реферата почти все подходы к описанию разряда носят интегральный, усредняющий характер. Искровые разряды зачастую изломаны и ветвятся. Если какие-то параметры зависят от длины искры или молнии, то они могут быть вычислены через фрактальные характеристики форм каналов.

БИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ



БЕЛОУСОВ Борис Павлович **(19.02.1893 – 12.06.1970)**

БЕЛОУСОВ Борис Павлович – советский химик. Родился в Москве в семье банковского служащего, шестой ребенок в семье. Вместе с братьями рано был вовлечен в революционную деятельность и в возрасте 12 лет арестован. Его матери предложили на выбор: либо сибирская ссылка, либо эмиграция. Семья оказалась в Швейцарии в большевистской колонии. Будущему ученому довелось играть в шахматы с В.И. Лениным. Борис удивлялся его азарту, тому, как он всячески поносит своего противника, пытаясь его де-

морализовать. На этом для Белоусова революционно-политическая деятельность закончилась. В партию он так и не вступил. В Цюрихе началось его увлечение химией, но возможности получить образование не было, поскольку надо было платить за обучение. В начале первой мировой войны Борис вернулся в Россию, желая добровольно вступить в армию, но по состоянию здоровья его не взяли.

Белоусов поступает на работу в химическую лабораторию металлургического завода Гужона (ныне завод «Серп и молот»). Лабораторию эту идейно возглавлял В.Н. Ипатьев, что предопределило направление исследований будущего ученого: разработка способов борьбы с отравляющими веществами, составы для противогазов.

Став военным химиком, Белоусов с 1923 г. по рекомендации академика П.П. Лазарева преподает химию командирам Красной армии в Высшей военнo-химической школе РККА (Рабоче-крестьянская Красная армия, 1918–1946), читает курс лекций по общей и специальной химии в школе усовершенствования командного состава РККА. В 1933 г. Белоусов – старший преподаватель Военной Краснознаменной академии химической защиты имени С.К. Тимошенко.

Специфика научной деятельности Белоусова была такова, что ни один из его научных трудов никогда и нигде не был опубликован. Академик А.Н. Теренин назвал Белоусова выдающимся химиком. В его отзыве, написанном в связи с возможностью присуждения Белоусову докторской степени без защиты диссертации, отмечается, что «Б.П. Белоусовым начато совершенно новое направление газового анализа, заключающееся в изменении цвета пленочных гелей при сорбции ими активных газов. Задача заключалась в создании специфических и универсальных индикаторов на вредные газообразные соединения с обнаружением их в исключительно малых концентрациях. Эта задача была

блестяще выполнена... был разработан ряд оптических приборов, позволяющих автоматически или полуавтоматически производить качественный анализ воздуха на вредные газы... В этой группе работ Б.П. Белоусов проявил себя как ученый, по-новому ставящий проблему и решающий ее совершенно оригинальным путем. Помимо этих исследований Б.П. Белоусову принадлежит ряд столь же оригинальных и интересных научных работ, которые не оставляют сомнения в том, что он безусловно заслуживает присуждения ему степени доктора химических наук без защиты диссертации». Непростой характер Бориса Павловича проявился и здесь, он «не хотел никаких дипломов».

Тем не менее военному химику Белоусову было присвоено звание комбрига, эквивалентное званию генерал-майора. Правда, в 1935 г. он уходит в долгосрочный отпуск, а в 1938 г. подает в отставку. Этим, возможно, объясняется то, что сам Белоусов не пострадал в период массовых репрессий 1937–1938 гг. Однако потеря многих сослуживцев и друзей наложила неизгладимый отпечаток на его характер. Неизвестно точное название секретного медицинского института, в котором работал в последующие годы Белоусов. Но, по словам сослуживцев, у него были замечательные открытия в области создания препаратов, снижающих влияние радиации, его ценили: не имея все-таки высшего образования, ученый заведовал лабораторией и по письменному указанию И.В. Сталина получал оклад доктора наук.

Проанализировав циклические реакции, открытые в послевоенные годы биохимиками, Белоусов решил осуществить химическую аналогию биологических циклов. Исследуя окисление лимонной кислоты броматом в присутствии катализатора, он обнаружил концентрационные колебания реагентов – так была открыта колебательная реакция. В 1951 г. и 1955 г. Белоусов предпринимает попытки опубликовать свое открытие в журналах «Кинетика и катализ» и «Журнал общей химии». Отзывы на его статьи были категорично отрицательными и, как потом выяснилось, столь же категорично ошибочными. Известно, что это так повлияло на ученого, что он просто выбросил лабораторную пропись реакции и забыл о ней.

Через несколько лет, когда биохимики заинтересовались открытой Белоусовым реакцией, ему пришлось искать исходные компоненты и их пропорции путем последовательного перебора. Можно сказать, что открытие было сделано Белоусовым дважды – первый раз случайно, второй раз в результате системного поиска. Но активно участвовать в работе научного коллектива он больше не хотел. Все, что удалось коллегам, это уговорить Белоусова еще раз попытаться опубликовать свою статью. В результате единственная прижизненная публикация ученого появилась в «Сборнике рефератов по радиационной медицине» за 1958 г.

Но и когда пришло признание и международное научное сообщество назвало колебательную реакцию именем Белоусова-Жаботинского, попытки привлечь отставного комбрига к ее дальнейшему изучению были безуспешными. Те, кто его знал в последние годы, утверждали, что творческая активность Белоусова оставалась очень высокой. Он покинул институт незадолго до своей смерти – 12 июня 1970 г. До присуждения Белоусову Ленинской премии оставалось 10 лет.

Симон Шноль и его книга «Герои и злодеи российской науки». Б.П. Белоусов и его колебательная реакция

Колебательная реакция Белоусова-Жаботинского широко известна не только в научном мире. Ее знают школьники, студенты, просто любознательные люди. Вы смотрите на стакан с красно-лиловой жидкостью, а он вдруг становится ярко-синим. А потом снова красно-лиловым. И снова синим. И вы невольно начинаете дышать в такт колебаниям. А когда жидкость налита тонким слоем, в ней распространяются волны изменения окраски. Образуются сложные узоры, круги, спирали, вихри, или все приобретает совершенно хаотический вид.

Эта реакция известна уже более 40 лет. Ее открыл в 1951 году Борис Павлович Белоусов [1,2]. Анатолию Марковичу Жаботинскому принадлежит решающий вклад в изучение этой реакции, в то, что это замечательное явление стало общенаучным достоянием [18]. Реакция именуется особо почетным образом двумя инициалами: BZ-reaction.

Открытие Белоусова практически завершило почти 150-летний поиск колебательных режимов в химических процессах. Периодические процессы вообще, по-видимому, одна из основ для построения теорий в самых различных отраслях. Периодичность – регулярное повторение чего-либо во времени и (или) в пространстве – убеждает нас в познаваемости мира, в причинной обусловленности явлений. В сущности, периодичность – основа мировоззрения детерминизма. Понимание ее природы позволяет предсказывать события, скажем, затмения или появление комет. А такие предсказания – главное доказательство силы науки.

История BZ-reaction – яркая иллюстрация старой загадки: что было раньше курица или яйцо? Что первично – феномен, требующий теоретического объяснения, или теория, предсказывающая появление неизвестного ранее феномена? На самом деле, это «порочный круг». Мы замечаем и объявляем феноменом лишь то, что понимаем, для чего уже существует теория. Но для построения теории должен быть «заказ» – наличие необъясненного феномена.

Разрыв этого порочного круга требует огромных интеллектуальных и нравственных усилий исследователя-первопроходца. Инерция «здорового смысла» – причина множества трагических судеб, печальной «традиции посмертной славы», когда замечательные открытия оказываются преждевременными, не признанными при жизни их авторов.

Открытие Белоусова в этом ряду. Оно наглядно демонстрирует эту трудность восприятия «очевидности», того, что в буквальном смысле слова видно очам и, тем не менее, не видится окружающими. Однако начнем с самого начала.

Старая Москва, конец позапрошлого века. Семья банковского служащего – отец, Павел Николаевич, и мать, Наталья Дмитриевна, воспитывающие шестерых сыновей. Прямая аналогия с купеческими семействами Вавиловых, Кольцовых, Четвериковых. Много великих людей вышло из таких, как потом с пренебрежением говорили, мещанских, купеческих семей. Владимир Иванович Вернадский когда-то с удивлением отметил, что нравственные и интеллектуальные достоинства российских дворян почти не сказались на развитии науки. Имея

свободу, благоухание в парках, они занимались поэзией, музыкой, художествами, а строгий интеллектуальный труд требовал иного склада: бульдозерного, работающего! Вернадский удивился и... не нашел ответа. Так вот, шестеро детей, начало века... Старший, Александр, 17 лет, уже революционер. Планы увлекательные: взрывать, стрелять, скрываться. Он пропитан Марксом, упорно его изучает и «Капитал», конечно, уже прочел. А книжка эта замечательная, высочайших литературных достоинств, эмоциональных, художественных и, разумеется, научных. Блестящая романтическая мысль, покоровшая столь многих.

Саша Белоусов, вдохновленный идеей мировой справедливости, нашел прекрасную аудиторию в своих братьях, всех вовлек в революционную работу, в том числе и 12-летнего Бориса. А революционная работа, как всем ясно, связана с химией. Химия, самая лучшая наука для ниспровержения существующего строя, учит делать бомбы. Лабораторию соорудили прямо на чердаке московского дома на Малой Полянке. Братья были увлечены по-настоящему. Делать бомбы в 12 лет – это же наслаждение! Да еще испытывать их! И чтобы не знала мама! Детство Бориса Белоусова – это мечта (для Тома Сойера и Гекльберри Финна).

О детстве и юности братьев мне рассказала дочь Александра Павловича Белоусова Мобби Александровна. Она родилась на пароходе, между Японией и Соединенными Штатами, когда ее родители выполняли партийное поручение по сбору средств в Америке и других странах для будущей революции. Замечательная женщина, а ее сын, Борис Рафаэлович Смирнов, стал «ключом» ко всей рассказываемой истории.

В 1905 году, во время 1-й русской революции, Саша Белоусов, связанный с верхушкой большевистской фракции, возглавил бригаду боевиков. Когда революция была задавлена, Александру удалось скрыться. Первым арестовали Сергея, он назвался именем какого-то члена партии, который был ценнее для дела, чем этот мальчик. И погиб в Сибири.

Кроме Сергея арестовали еще двух братьев – Владимира (14 лет) и Бориса (12 лет). Их отправили в тюрьму для особо важных преступников. Александр был арестован через год, но сумел бежать из сибирской ссылки.

Борис в те годы еще спал в обнимку с большим плюшевым медведем. Пришлось жандармам принести его в тюрьму юному революционеру.

Матери вскоре предложили: либо всех сошлем в Сибирь, либо отправляйтесь в эмиграцию. Естественно, она предпочла Швейцарию. Выехали в большевистскую колонию, ведь брат был большевиком. Борис оказался в окружении большевиков там, где «в тяжелых условиях эмиграции» они готовили то, что потом устроили.

Веселое воспоминание Бориса Павловича, как он играл в шахматы с Лениным. Ленин, чтобы победить, всячески поносил своего противника, пытаясь его деморализовать. Это очень обижало Бориса: что же он так ругается... Таким было его единственное соприкосновение с вождями.

Больше он никогда не занимался революционно-политической деятельностью. И в партию никогда не вступал. Как ему удалось при этом достичь больших военных чинов в Советском Союзе? Но, может быть, поэтому он остался жив в 37-м: большевики тогда чаще убивали своих.

Александр Павлович стал экономистом. Во время войны он завершал работу над книгой по экономике, оставаясь в Ленинграде. И умер в блокаду, а книга его погибла.

В Цюрихе Борису надо было платить за обучение. Была другая возможность обучаться бесплатно, но без диплома, со справкой о прослушанных курсах. Не сохранилось никаких документальных подтверждений, но, как я понял, в это время его главное увлечение по-прежнему химия. Когда началась мировая война, он приехал в Россию призываться в армию. Добровольно. И удивительная история: его не взяли. Не хватило веса. Таких тощих в рекруты не брали.

Оставалась химия. Сейчас говорят, в России было три великих химика: Ломоносов, Менделеев и Ипатьев. Ипатьев, создатель теоретических основ промышленной химии, в 30-м году, предвидя арест, сумел уехать за границу и поселился в США. В Америке ему посвящены труды, симпозиумы и т.п. В России же его почти не знают. Белоусов поступил на работу в химическую лабораторию металлургического завода Гужона (в советское время завод «Серп и Молот»), идейно руководимую Ипатьевым. Поступить к Ипатьеву в лабораторию означало заняться военной химией. Борис Павлович усовершенствовал там свое образование и стал настоящим военным химиком.

Еще до революции он разрабатывал способы борьбы с отравляющими веществами, думал над особыми составами для противогазов. После революции стал военным, с 23-го года по рекомендации академика П.П. Лазарева преподавал химию командирам Красной Армии в Высшей Военно-химической школе РККА, читает курс лекций по общей и специальной химии в школе Усовершенствования командного состава РККА, а в 1933 году становится старшим преподавателем Военно-химической академии имени К.Е. Ворошилова. Однако основное содержание его жизни – научные исследования. Он автор множества научных трудов. Но в силу их специфики ни одной строчки трудов Белоусова, даже их краткого изложения, никогда и нигде не было опубликовано. Все шло в виде закрытых инструкций, приказов с грифом «совершенно секретно». В моем архиве есть копия некогда секретного отзыва академика Александра Николаевича Теренина, где он называет Бориса Павловича выдающимся химиком. Отзыв был написан в связи с возможностью присуждения ему степени доктора химических наук без защиты диссертации. В отзыве отмечается, что: «...Б.П. Белоусовым начато совершенно новое направление газового анализа, заключающееся в изменении цвета пленочных гелей при сорбции ими активных газов. Задача заключалась в создании специфических и универсальных индикаторов на вредные газообразные соединения, с обнаружением их в исключительно малых концентрациях. Эта задача была блестяще выполнена... был разработан ряд оптических приборов, позволяющих автоматически или полуавтоматически производить качественный анализ воздуха на вредные газы... В этой группе работ Б.П. Белоусов проявил себя как ученый, по-новому ставящий проблему и решающий ее совершенно оригинальным путем. Помимо этих исследований Б.П. Белоусову принадлежит ряд столь же оригинальных и интересных научных работ, которые не оставляют сомнения в том, что он безусловно заслуживает присуждения ему степени доктора химических наук без защиты диссертации». Но Б.П. ничего не хотел, никаких дипломов, «от этого не становятся умнее».

Его произвели в комбриги – высокое для химика военное звание, эквивалентное званию генерал-майора. В период массовых репрессий 37-38-го годов были арестованы и убиты очень многие кадровые военные в званиях от майора и выше, погибли многие сослуживцы и друзья Белоусова. Его не арестовали, может быть, потому, что еще в 35-м он ушел из армии в долгосрочный отпуск, а после 38-го в отставку?

Борис Павлович стал работать в секретном медицинском институте, где занимались, в основном, токсикологией. Сначала был заведующим лабораторией. Потом спохватились, что нет университетского диплома, и перевели на должность старшего лаборанта, не освободив от обязанностей заведующего лабораторией. По многим качествам он оставался военным человеком. Раздражала новая среда, сложные взаимоотношения, с эмоциями, чувствами, обидами. Характер у него всегда был непростой, а с годами стал совсем сложный.

Директор института, тем не менее, понимал, с кем имеет дело. Сейчас этого не постичь, но тогда все главные и не очень главные бумаги имели подпись Сталина. Синим толстым карандашом. На это же имя было написано письмо о том, что в секретном нашем учреждении работает заслуженный человек, зарплата у него низкая, как у старшего лаборанта, поскольку не имеет диплома о высшем образовании, а на самом деле он заведует лабораторией. На этом письме Сталин начертал: «Платить, как заведующему лабораторией, доктору наук, пока занимает должность». Толстым синим карандашом. Недруги примолкли: сам Сталин велит платить. Длилось это, правда, недолго, Сталин вскоре умер. В эти годы главной стала лучевая проблема, противолучевые средства. У Белоусова были замечательные открытия в области противолучевых препаратов. Работавшая с ним Людмила Тихоновна Туточкина рассказала мне как-то о его предложении использовать в качестве противолучевых средств производные хитина. Хитиновый покров насекомых – это своеобразная лучевая ловушка. Хитин можно, например, выделить из панцирей крабов, его много в криле. Результаты этих работ тоже погребены где-то в секретных отчетах.

В это время в биохимии были открыты циклические реакции: одно вещество превращается во второе, второе в третье, третье в четвертое, потом в пятое, а из него образуется опять первое. Борис Павлович подумал, что это замечательная вещь и надо ее исследовать, что хорошо бы сделать химическую аналогию биохимических циклов.

Вот тут-то и начинается «химия детства». Это только «живой» химик может сразу придумать. Вспомнить, что в 1905 году он брал бертоллетову соль, что ее аналог $KBrO_3$: там хлор, а тут бром. Можно устроить реакцию, в которой исходный компонент цикла Кребса лимонная кислота будет окисляться этим аналогом бертоллетовой соли. Бром окрашен, поэтому он будет виден, когда выделится в ходе реакции. Это была удача.

Чтобы ускорить реакцию, Борис Павлович добавил в раствор каталитические количества соли церия. Церий – элемент переменной валентности, он катализирует окисление, переходя из четырех в трехвалентное состояние. В растворе, в довольно концентрированной серной кислоте, сначала действительно появилась желтая окраска, но потом почему-то исчезла и вдруг возникла снова, а потом опять исчезла... Так была открыта колебательная химическая реакция в

растворе. (А желтый цвет, как позднее показал Жаботинский, не от брома, а от церия).

Действительно ли Б.П. Белоусов первым открыл химические колебательные реакции? Лауреат Нобелевской премии И. Пригожин считает работу Бориса Павловича научным подвигом XX века. Думаю, это несколько завышенная и субъективная оценка, тем не менее... Некоторым же авторам популярность VZ-reaction кажется несправедливой, а роль Белоусова преувеличенной.

В очень экзальтированной статье Б.В. Вольтер пишет [25]: «...Честь открытия химических колебаний не принадлежит нашему, XX веку... В 1828 году Т. Фехнер изложил результаты исследования колебаний электрохимической реакции. В 1833 году В. Гершель публикует... исследование колебаний в каталитической гетерогенной реакции. Наиболее интересна публикация М. Розеншельда в 1834 году. Ее автор совершенно случайно заметил, что небольшая колба, содержащая немного фосфора, в темноте испускает довольно интенсивный свет... это свечение регулярно повторялось каждую седьмую секунду... приводится детальное описание мерцаний колбы. Сорок лет спустя (1874 год) эти эксперименты с «мерцающей колбой» продолжил француз М. Жубер.... Еще через двадцать лет... А. Центнершвер исследовал влияние давления воздуха на периодические вспышки фосфора... Особенно яркая страница в истории химических колебаний связана с «кольцами Лизеганга» (1896 г.)... И все-таки открытие Лизеганга, имевшее большой резонанс в научных химических кругах, не было первым. И до него изучались химические волны, а в 1855 году вышла книга Ф. Рунге, в которой были собраны многочисленные примеры таких экспериментов». Не принадлежит, если на то пошло, честь открытия химических колебательных реакций и XIX веку. Еще в XVII веке периодические вспышки при окислении паров фосфора наблюдал Роберт Бойль[22].

Знал ли Б.П. Белоусов об этих работах? Знал ли он брошюру Р.К. Кремана «Периодические явления в химии», изданную в Штутгарте в 1913 году? Думаю, знал, тем более что свободно владел немецким и французским языками. Не мог он не знать и книги академика П.П. Лазарева [4], который, будучи биофизиком, увлекся идеей химических колебательных процессов как основы физиологических периодических явлений. Не мог он не знать и замечательной книги Ф.М. Шемякина и П.Ф. Михалева «Физико-химические периодические процессы», изданной в Москве в 1938 году[7].

Не могли не знать эти работы и высокообразованные рецензенты. Почему же были отвергнуты статьи Б.П. Белоусова, посланные им в 51-м и 55-м годах в очень солидные химические журналы («Журнал общей химии» и «Кинетика и катализ»)? Дело, видимо, в «инерции предыдущего знания».

Все наблюдавшиеся до этого случаи колебаний в химических реакциях можно было объяснить пространственными эффектами, например, перепадом температуры на стенках колбы или диффузионными ограничениями скоростей реакции. Подобные «пространственные» причины колебаний нельзя исключить ни в опытах со свечением паров фосфора, ни, тем более, в явлениях типа колец Лизеганга.

Но главным препятствием было... знание равновесной термодинамики. Не мог образованный человек представить себе в беспорядочном тепловом движе-

нии огромного числа молекул макроскопическую упорядоченность, все молекулы то в одном, то в другом состоянии! Будто признать существование вечного двигателя. Этого быть не может. И в самом деле не может этого быть. Не может быть вблизи состояния равновесия, а только его и рассматривала термодинамика тех лет. Однако никаких ограничений на сложные, в том числе колебательные, режимы нет для неравновесных химических систем, когда реакции еще не завершились и концентрации реагентов не достигли равновесного уровня. Но это обстоятельство ускользало от внимания химиков.

Всем ясно, термодинамика не просто раздел физики. Триумф равновесной термодинамики, созданной гигантами Карно, Майером, Гельмгольцем, Больцманом, Планком, Гиббсом, Нернстом, определил мировоззрение нескольких поколений исследователей.

Потребовалось чрезвычайное интеллектуальное напряжение, чтобы вырваться из «железных оков полного знания» и исследовать поведение систем вдали от равновесия, чтобы создать термодинамику неравновесных процессов. В этом жизненный подвиг Онсагера и Пригожина. К этому времени уже существовало общее доказательство возможности колебаний в однородной, гомогенной системе, когда пространственные неоднородности несущественны. В 1910 году А. Лотка [3] придумал систему уравнений, описывающую колебания концентраций реагентов в системе полного перемешивания, где возможен автокатализ. В этой первой модели Лотки колебания были затухающими. Через 10 лет он предложил систему с двумя последовательными автокаталитическими реакциями, и в этой модели колебания уже могли быть незатухающими [5]. Значит, колебания в гомогенном растворе в принципе возможны. Сложилась характерная для жизни нового знания ситуация, есть строгая теория Лотки-Вольтерры – колебания в гомогенных химических системах возможны и есть общее мнение они невозможны, так как противоречат основам науки. Вот почему экспериментальное, бесспорное доказательство существования колебательных режимов в гомогенных растворах, в системах полного перемешивания приобрело такое большое значение. Тут следует отметить коренное различие позиций физиков и химиков. Одно из наиболее ярких достижений физики и математики XX-го века – создание теории колебаний. Большие, общепризнанные заслуги принадлежат здесь советским физикам – школе академика Л.И. Мандельштама. В 28-м году аспирант Мандельштама А.А. Андронов выступил на съезде русских физиков с докладом «Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний» [6]. Он не сомневался в возможности химических колебательных реакций и был инициатором направленного поиска таких реакций в эксперименте.

В начале 30-х годов в Институте химической физики Академии наук были обнаружены колебания свечения в «холодных пламенах», аналогичные колебательной люминесценции паров фосфора, которые заинтересовали замечательного физика Д.А. Франк-Каменецкого. В 39-м он объяснил эти колебания на основании кинетической модели Лотки 20-го года [8]. В 41-м в большой статье в журнале «Успехи химии» [9] он специально рассмотрел возможность колебательных режимов в гомогенных химических системах, хотя «холодные пламена», строго говоря, нельзя отнести к гомогенным химическим реакциям. Причины те же: перепады температуры и пространственные градиенты концентрации.

Механизмом колебаний в этой сложной системе вместе с Франк-Каме-нецким занялся воспитанник андроновской школы И.Е. Сальников [10], и в 47-м он представил в Институт химической физики диссертацию, которая называлась «К теории периодического протекания гомогенных химических реакций» [12]. И диссертацию отвергли! Кто был наиболее непримиримым хранителем незыблемых истин, наиболее образованным человеком в аудитории? Не знаю. Сработала «инерция предыдущего знания». Барьер «здорового смысла» химиков преодолен не был.

Сальников успешно защитил эту диссертацию в следующем году в Горьком в институте Физики, руководимом А.А. Андроновым.

В 1951 году генерал Белоусов послал статью об открытой им колебательной реакции в «Журнал общей химии» [1,2]. И получил обидную отрицательную рецензию: «такого быть не может». В статье был описан легко воспроизводимый процесс. Все реактивы вполне доступны. Но если вы твердо убеждены в невозможности результата, то проверять его пустая трата времени. Внук Бориса Павловича, Борис Смирнов, уговаривал деда: «Возьми реактивы, поезжай в редакцию покажи им...» Генерал считал все это оскорбительным, не соответствующим нормам научной этики, и не поехал. Хотел бы я знать, кто автор рецензии? Но... редакционная тайна. Есть у меня подозреваемые, но нет доказательств.

А Белоусов продолжал изучать свою замечательную реакцию. Колебания – желтый, бесцветный не очень яркие. Ученик и сотрудник Бориса Павловича А.П. Сафронов посоветовал ему добавить в раствор комплекс железа с фенантролином. Окраска резко изменилась. Лилово-красная переходила в ярко-синюю. Это было прекрасно.

Теперь, думаю, пора рассказать о том, как я стал участником этой истории. В Московский университет я поступил в 1946 году, как это ни странно, со своим происхождением, с репрессированным отцом, да и национальность не подходящая... Но в 46-м это еще было можно. В 47-м стало труднее. А потом щель захлопнулась.

Кафедра биохимии. Мои учителя профессор Сергей Евгеньевич Северин и противные тетки, очень хорошие тетки на самом деле, которые мучают бедных благородных студентов, чтобы они точно все делали. Приносишь результат. «Нет, – говорят эти тетки совершенно хладнокровно, – неправильно у вас, в четвертом знаке ошибка». И снова! «Нет», – говорят эти тетки. А уже одиннадцатый час, ночь, есть хочется, круги в глазах... И они ведь сидят несытые, злодейки-тетки. Как я им благодарен! Вот истинная лаборатория. Попробуйте не сделать задачу... Жесткое образование – хорошее дело.

В 1951 окончил я университет, получил диплом с отличием. На работу куда не берут. Сергей Евгеньевич – он занимает высокий пост академика-секретаря биологического отделения Академии медицинских наук – знает множество вакантных мест по специальности биохимия. Рекомендует меня, пишет мне рекомендательные письма, звонит по телефону, ему обещают. И ничего не выходит. В отделах кадров есть четкие указания. Сергей Евгеньевич и сам знает, что ничего не выйдет, в «нормальные» учреждения меня не возьмут. Возьмут в «ненормальные», им не страшны недостатки анкет.

Атомная программа и в ней тема: радиоактивные изотопы в биологических и медицинских исследованиях. Работа опасная, норм безопасности практически еще нет. Лучевая нагрузка большая. Опасаться ее «непатриотично». Моя жизнь тогда зависела от точности и аккуратности работы с радиоактивными веществами.

А после трех часов дня все сотрудники уходят, и я свободен заниматься своей биохимией. Ставлю опыты по измерению ферментативной (АТФ-азной) активности растворов мышечных белков. Я знал, что не делаю ошибки больше, чем один процент. Ну, полтора. И вдруг пробы отличаются вдвое [14]. Можно было сойти с ума. Но я почему-то никак не схожу. Спрашиваю как-то у своей, очень симпатичной знакомой, врача-психиатра: «Лиза, ну почему я с ума не схожу?» Удивляется. Какой странный вопрос. Она знает, почему сходят с ума, а вот почему нет, не знает. И ничего лучше не придумав, отвечает: «Генетика такая». Не убежден.

Я чуть было действительно не сдвинулся: пробу делаю такой, а она у меня другая. Я все наливаю точно и аккуратно, а результат не тот. Пришлось сделать странный вывод – существует несколько дискретных состояний изучаемых мною молекул белка, и все молекулы сразу, синхронно переходят из одного состояния в другое и обратно. Так это же колебания... Тогда я думал, что первым увидел колебания в биохимических реакциях. А это очень, как бы сказать, неудобно. Всем нужно доказывать, что такое в принципе может быть. Трудно чувствовать себя пионером. Прошло несколько лет. Большим психологическим утешением стала для меня в 1958 году статья Христиансена, великого датского химика, о возможности колебательных режимов в химических и, более того, в биохимических процессах [16]. С.Е. Северин поместил мою статью «О самопроизвольных переходах препаратов актомиозина из одного состояния в другое» в редактируемый им журнал «Вопросы медицинской химии» [14], и я послал письмо и отгиск Христиансену. Он обрадовался, что его предположения подтвердились, и отметил это в своем обзоре 61-го года [17].

Но я по-прежнему чувствовал себя неуверенно и всюду пытался узнать о похожих явлениях. Тогда я еще ничего не знал о попытках найти колебательные режимы в химических и биохимических реакциях. Не знал статей Франк-Каменецкого, Лотки, Сальникова. А мои консультанты математики вообще принципиально никакую литературу не читали, полагаясь лишь на мощь своего интеллекта.

И однажды кто-то мне сказал: «А знаешь, есть тут один старик, он вот перед тобой стакан с жидкостью поставит, и она будет то синей, то красной...» «А ты сам-то знаешь его?» «Нет, я только слышал». «Ну, вспомни, кто тебе сказал?» «Нет, не помню». Это свойство секретных учреждений – никто ничего не должен знать о работах, «выходящих за пределы твоей компетенции». Можно работать рядом в комнате и ничего не знать о соседях. Предпринял следствие, пошел по цепочке, но она все время обрывалась. И длилось это долго. Но всегда, докладывая на семинарах и в разных собраниях свои работы, я заканчивал вопросом: «Не знает ли кто-нибудь этого таинственного человека?»

Все годы, с того момента, когда в моих опытах стал проявляться необъяснимо большой «разброс результатов», я рассказывал об этом Льву Александровичу Блюменфельду. О нем нужно написать специальный очерк, столько в его

судьбе отразилось и сконцентрировалось в нашей истории. Как приятно и полезно для психики сомневающегося в себе автора рассказывать ему о своих странных результатах. Начинаешь верить, что в них есть что-то важное, не только ошибки...

В Москве, на Петровке, рядом с уголовным розыском, есть церковь, маленькая прекрасная церковь, которая в те времена принадлежала почему-то Институту химической физики. Кошунство, но факт. В этой церкви, в алтарной части, у Блюма был кабинет, а там, где когда-то шла служба, теперь проходили семинары. В этой церкви я и делал доклад «О самопроизвольных изменениях (колебаниях) АТФ-азной ферментативной активности в препаратах актомиозина», закончив его уже традиционно: (как в Древнем Риме: «А в остальном я полагаю, что Карфаген должен быть разрушен») «А в остальном, я безуспешно ищу человека... и не нахожу». И вдруг встал Борис Смирнов, он был тогда аспирантом Блюма, и говорит: «А это мой дядя». Как потом оказалось, не дядя, а двоюродный дед. Два Бориса очень дружили, и даже химиком младший стал под влиянием деда. Я ахнул: «Боря, как же...» «Это его реакция, – говорит Борис, – все это чистая правда». Дальше все стало разворачиваться с колоссальной скоростью. Я Борису: «Мне надо побыстрее прочесть что-нибудь». Он мне: «Дед видеть тебя не захочет. А реакцию передаст». Да, действительно, обычный листок бумаги с рецептом: лимонной кислоты столько-то, калия бромноватокислого столько-то, сульфата церия столько-то и серная кислота 1:3, концентрированная. И добавить фенантролин с железом. Записан и номер телефона. Я позвонил Борису Павловичу, дрожащим голосом, в нервном напряжении говорю ему что-то. Он меня очень мрачно обрывает: «Вы рецепт получили и ладно».

В лаборатории у меня стоял бесценный шкаф с реактивами. Там было все, но фенантролина не было. Приготовил растворы, и вот это нечто, бело-желтое, заколебалось! Колоссальное впечатление. Но нет железа с фенантролином. А надо, и хочется, чтобы сине-красное... Звоню Блюму: «Лев Александрович, нет ли у вас?..» «У нас есть все», – прерывает он, гордый собой. Я поехал. Там девушка, лаборантка (бывают же такие красавицы!), снимает с полки банку и дает мне. Я, все-таки в какой-то степени химик, говорю: «Странно, что он такой белый. Он должен быть сиреневым». «А у нас, – отвечает красавица, – все такое очищенное, что никаких сиреневых примесей уже нет». Я восхитился: шутка ли, очистить фенантролин до совершенно белого. А это был не фенантролин, что имело потом драматические последствия...

В том же 1958 году Л.А. Блюменфельду предложили организовать кафедру биофизики на физическом факультете МГУ. Мне было лестно, что Блюм поставил условие: взять Шноля в качестве лектора-биохимика. Но ему было сказано: «Мы не можем покупать кога в мешке!». Два года я читал курс «на общественных началах» (как говорили в то время), а с 60-го уже будучи в штате. Оказалось, что реакция Белоусова легко понимается физиками. Один за другим сотрудники стали бегать к нам в комнаты, рассказывать другим, началось паломничество. Шутники обозвали реакцию «водка-коньяк». Действительно, похоже: бесцветное, а потом желтое такое, коричневатое...

Я позвонил Борису Павловичу, сказал, что чувствую себя неловко. В лабораторию приходит масса людей, наблюдают, изучают. Это хорошо, но ведь мо-

гут опубликовать, а работа ваша. Он на меня зарычал: «И пусть, с напряжением, нервным криком, пусть тащат, наконец-то это выйдет в свет!» К тому моменту я уже много раз ему звонил, уговаривал опубликовать. Он предпринял попытку, переделал статью, послал еще раз в журнал и... получил еще одну отрицательную рецензию. Наверное, я знаю и второго рецензента. В общем, беседы наши были очень мрачные. Но тут и я сорвался: «Вы, Борис Павлович, поступаете очень плохо, ставите меня в положение вора. Но я не вор, и все происходящее на моей совести. В конце концов, это безнравственно». И он задумался, а потом сказал: «Ладно, воткну в институтские рефераты». Шли полузакрытые отчеты их института по радиационной медицине за 59-й год. Четыре маленьких странички – единственная публикация Белоусова [1] при жизни. Но все же я могу гордиться, что взвыл, вскричал... и опубликовано!

Две красавицы, сотрудница кафедры Галина Николаевна Зацепина и студентка четвертого курса Аня Букатина, занялись этой реакцией, решили ее полностью изучить. В 61-м в мае академик Игорь Евгеньевич Тамм, наш благодетель, опекун и покровитель, старый друг Блюменфельда, замечательный человек и крупнейший физик-теоретик, решил узнать, как дела на новой кафедре. Все его ждали. Включили приборы и экспериментальные установки. Столик, на котором Аня и Галина Николаевна приготовили реактивы и показывали реакцию Белоусова, стоял близко к входной двери. Игорь Евгеньевич увидел и надолго остановился, наслаждался. Потом сказал: «Ну, знаете что, братцы, имея такую реакцию, можете не волноваться: на много лет хватит загадок и работы». А потом бегло осмотрел другие лаборатории.

Слова Игоря Евгеньевича подействовали на многих. Реакцией решил заняться Толя Жаботинский, из первого нашего выпуска, потомственный, как он сам про себя говорил, физик. То есть сын физика, и дед его имел отношение к нашим наукам. Типичный продукт интеллигентного мира, в котором дети с малых лет размышляют о природе окружающих их вещей, любят математику, а за обедом, между первым и вторым блюдами, решают хитрые задачи или думают над парадоксами. Они рано узнают то, что другим, не таким счастливым, удается постичь только на первом, втором курсах институтов. Такие дети очень ценны для общества, но иногда трудно выносимы. Попав в нормальное человеческое общество и выяснив, что большая часть их сверстников очень многого не знает, они чувствуют себя гениями, избранными, будто все знания только их заслуга. На самом же деле это в значительной степени заслуга семьи, обстоятельств их детства. Толя был именно таким мальчиком. Я, в свое время, в ответ на приглашение читать лекции по биохимии, говорю Блюменфельду: «Лев Александрович, не пойду я к вам на физфак, не люблю я физиков, то есть, люблю, может быть, но боюсь, они меня там съедят. Как это биохимию физикам рассказывать – они такие образованные и умные». А мне Лев Александрович: «Они нормальные люди, и ваши лекции будут им в самый раз. А впрочем, – говорит, – приходите, я вас познакомлю со студентами». Пришел студент Толя Жаботинский. Посмотрел и сказал: «Вот этот будет у нас лектором? Тут у нас один тоже лекцию читал, длинное написал уравнение, дошел до конца доски и сбился. «А мы, – говорит, – встали и ушли». Я после этого сказал Льву Александровичу: «Ноги моей не будет у вас. Чтоб я писал уравнение на всю доску, да я и

не напишу столько. Я только одну формулу буду обсасывать, если буду». Но все потом обошлось, и я читаю трехсеместровый курс биохимии физикам-биофизикам, страшно сказать, более 35 лет! Этот самый Жаботинский, знающий теорию колебаний [13] с пеленок, дифференциальные уравнения, серьезный молодой человек, понимающий научный труд, пришел и говорит, глядя на Галину Николаевну и Аню: «Если они бросят, я этим займусь». Аня отнеслась к заявлению спокойно (она потом стала женой Жаботинского, но оставила его, и я ее понимаю: трудно иметь дело с гением каждый день). А Галина Николаевна просто фыркнула, у нее было полно дел.

И Толя занялся. И занялся совершенно замечательно. Он все знал. Он сразу стал думать об уравнениях, о моделях. Легко сделал прибор и быстро стал продвигаться. Понял, что во что превращается, что Борис Павлович был не прав в каких-то деталях.

Я снова попытался вовлечь Белоусова в дело, и снова безрезультатно. Однажды, в одной из бесед, довольно ранней, он мне сказал: «Я не могу и не хочу заводить новых друзей. Мои друзья погибли или умерли». Чтобы я больше не приставал. Эти слова произвели на меня большое впечатление и многое объяснили в его поведении. Какой-нибудь нормальный, живой, открытый человек, он Бориса Павловича, может быть, и переубедил, я не сумел. К сожалению, не таким человеком был и Жаботинский.

Толя, когда нужно было начинать что-то новое, говорил: «Ну, знаете, это мне не по силам, да и никому не по силам. Дайте двадцать сотрудников, тогда сделаем». На что я ему отвечал: «Не надо двадцать сотрудников, возьмите марганцовку. Она же малиновая и при восстановлении превращается в зеленую. Попробуйте использовать марганец в качестве катализатора, это будет красота?» Он меня поучал: «Если вы откроете справочник химика, то увидите, что это идиотское предложение, потому что редокс-потенциалы не те». «Все глупости, вы добавьте марганцовку». Он добавил, и пошло. Малиновое бесцветное. Это было прелестно.

Лимонную кислоту Борис Павлович использовал по аналогии с циклом Кребса. Это было не очень удачно. При ее окислении шло декарбоксилирование, образовывалось множество пузырьков CO_2 , что затрудняло исследования. Толя вместо двадцати нашел одного, вполне эквивалентного им, химика Льва Сергеевича Ягужинского. Вместе с Ягужинским они написали химическую схему реакции и пришли к выводу, что в окисляемом веществе обязательно должна быть группировка типа малоновой кислоты. Можно просто взять вместо лимонной малоновую кислоту. Это был очень важный шаг. Малоновая кислота окисляется без декарбоксилирования, без пузырьков раствор остается оптически прозрачным.

Другим важным шагом было выяснение причины колебаний: по мере окисления малоновой кислоты из KBrO_3 образуется ион Br^- , который тормозит дальнейшее окисление. Потом ион брома постепенно исчезает в ходе дальнейших реакций. Тогда вновь становится возможным окисление малоновой (точнее, броммалоновой) кислоты. И снова образуется ион Br^- . И пошли колебания.

Замечательной особенностью работ Жаботинского и образовавшейся вокруг него группы сотрудников было сочетание химического эксперимента, методов физической регистрации и построение математических моделей. В этих моделях

систем дифференциальных уравнений кинетические константы подставлялись из экспериментальных данных. После этого можно было сравнивать экспериментальные записи колебаний с кривыми, которые получались при компьютерном моделировании.

Компьютеры тогда были громоздкие и неудобные, данные вводились на перфолентах или перфокартах. Но это не охлаждало энтузиазма. Сколько могу судить, главное в моделях тех лет развитие уравнений типа Лотки-Вольтерры сохранилось во всех последующих вариантах.

К 1963 году основной качественный этап изучения реакции Белоусова был завершен. Борис Павлович об этом знал, Толя ему звонил. Но включаться в работу он так и не захотел. Аспиранту Жаботинскому нужно было написать статью. И он написал замечательную первую статью [18]. Возник естественный вопрос об авторах.

Мне хватало своих дел. Я давно уже понял, что наблюдаемые мной явления вовсе не относятся к химическим колебательным процессам. Что все усилия понять природу «разброса результатов» в опытах с мышечными белками по аналогии с химическими колебаниями – тупик. Здесь совсем другие, возможно, еще более фундаментальные причины. Я был поглощен попытками понять эти причины, попытками убедиться, что наблюдаемые мной явления не технические артефакты.

То, на что я тратил все силы, общая теория колебаний, биохимия колебательных процессов, для меня не годилось. Когда я удивлялся, что не сошел с ума, то имел в виду именно это. Статья вышла за подписью одного Жаботинского. Мне воздавалась «благодарность за предложенную тему и руководство работой». Статья произвела такой неожиданный эффект, что восхищенное человечество назвало реакцию именами Белоусова и Жаботинского.

«Научное сообщество» постепенно проникалось сознанием, что колебательные режимы не только возможны, но даже обязательны и достаточно распространены в химии и биохимии. Особенно хотелось их найти в биохимии, чтобы ими объяснить феномен биологических часов.

С обоснованием высокой вероятности колебательных биохимических реакций с точки зрения теории колебаний на семинаре в Физическом институте АН СССР в 59-м году выступил аспирант И.Е. Тамма Д.С. Чернавский [15]. Теперь уже возникла ситуация, когда теория, понимание опережали феноменологию. Мы ожидали открытия колебаний в биохимических системах. И дождались.

В июне 1963 года в Москву приехал знаменитый американский биохимик Бриттен Чанс. Во время войны он был военным инженером, а кроме того, он еще и яхтсмен, олимпийский чемпион. Приехал он с двумя целями: участвовать в Балтийской регате в Таллине и заодно почитать лекции по биохимии в Московском и Ленинградском университетах, наивно полагая, что за лекции ему заплатят и расходы окупятся.

На лекцию Чанса в аудиторию 01 в главном корпусе МГУ собрался весь цвет московского биохимического общества. Чанс рассказывал о своих исследованиях кинетики гликолиза, показывал замечательные слайды. Как у прекрасного инженера, у него такие спектрофотометры, такая техника, куда нам... И вижу я на слайде, иллюстрирующем ход фосфофруктозокиназной реакции, явные си-

нусоидальные колебания, правда, небольшой амплитуды. А он ни слова. В некотором смущении я спрашиваю, почему он ничего не говорит о колебаниях в этой реакции? Чанс отвечает, что признак плохого тона – обращать внимание на шум приборов... За меня вступились свободные в английском языке Л.А. Блюменфельд и А.Е. Браунштейн. После лекции разговор был уже вполне любезным...

После лекций в Москве и в Ленинграде Чанс уехал в Таллин на Балтийскую регату, где, как обычно, получил Большую золотую медаль. Кстати, яхтсмены считали, что он «их человек», а что делает в университетах, непонятно.

Осенью 64-го года вышла статья Чанса о колебательной кинетике фосфофруктозокиназной реакции. В биохимии начался бум исследований колебательных режимов. Из года в год росло число таких публикаций.

Меня же охватил патриотический, я бы сказал, комсомольский страх – приоритет страны теряется. Мы первые в очень большом направлении, и это надо закрепить. Пошел к Франку: «Глеб Михайлович, давайте собирать международный симпозиум. Иначе все уйдет от нас». (Так оно и произошло.) Франк все это прекрасно понимал, и мы решили созвать в Пушкино международный симпозиум. А дальше все как обычно: оказалось, что международный симпозиум нужно «заказывать» за два года вперед...

В 1966 году, в марте, был созван первый Всесоюзный (увы, не международный) симпозиум по колебательным процессам в химии и биохимии. Это совершенно историческое событие в науке. Потому что колебательные процессы в биологии: биологические часы, всякие процессы типа сердечной деятельности, перестальтики кишечника и даже численность популяций – все это одни и те же дифференциальные уравнения. Физики находили это одним из главных достижений нашего Пушкинского центра и Института биофизики. Активное участие в работе симпозиума принимал Д.А. Франк-Каменецкий, делали доклады И.Е. Сальников и Б.В. Вольтер, блистали Д.С. Чернавский и его коллеги Ю.М. Романовский и Н.В. Степанова, представил свои первые работы Е.Е. Сельков. Центральное место занимали доклады А.М. Жаботинского и его соавторов М.Д. Корзухина, В.А. Вавилина. Борис Павлович Белоусов от участия в симпозиуме отказался.

Уже в августе 66-го мы сдали в печать «Труды» этого симпозиума, и в январе 67-го вышла книга «Колебательные процессы в химических и биологических системах» [20]. Прошло много лет, и мне все больше кажется, что это очень ценная книга. Она была весьма популярна у нас, весь тираж быстро раскупили и в мире. Не раз раздавались пожелания перевести ее на английский язык, но это так и не сделано.

Задолго до симпозиума произошло еще одно знаменательное событие. О реакции Белоусова захотел узнать подробнее президент Академии наук СССР Мстислав Всеволодович Келдыш. Мы волновались. Он был известен как человек совсем особых скоростей восприятия, феноменальной эрудиции. Сосредоточенный, мрачный, лицо в таких львиных морщинах. Мы приехали к Келдышу 16 декабря 1964 года. Пришли в его затемненный кабинет на Миусской площади, в дом, построенный еще Петром Петровичем Лазаревым по эскизу Лебедева. Огромный стол с зеленым сукном, графин, стаканы. Мы взяли с собой пробирки, реактивы, серную кислоту. Но что в математическом институте нет химических

стаканов и колб, не догадались. Реакцию проводили в стакане. Поставили стакан на сукно. Серная кислота, когда опыт закончился, оставила черный кружок на столе. Но Келдыш не дрогнул и вида не показал, что заметил.

Жаботинский кратко изложил суть: Келдыш свирепел, если говорили долго. В стакане пошли колебания, мы думали, что Келдышу этого достаточно, но он зло посмотрел на стакан и сказал: «Вы от меня скрываете самое главное?» А самым главным были цветные волны, которые начинались у дна и шли вверх. Келдыш был специалистом по пространственным эффектам колебаний. Жаботинский пространственные волны, конечно, заметил, но еще в этом не разобрался и решил не рассказывать о них Келдышу. Не тут-то было! Президент ужасно рассердился, посчитав, что ему просто не хотят рассказывать... Реплика была чрезвычайной важности. А потом мы узнали, что это видел и Белоусов. Даже назвал колбу «зеброй». И полагал это наиважнейшим.

После симпозиума Жаботинский сосредоточился на исследовании распространения волн. Работу очень затрудняла малая оптическая плотность раствора. С тех пор как мне вместо фенантролина дали другое вещество, работа шла в бледно-желтом цвете, и в тонком слое жидкости волны почти не были видны. В это время к группе присоединился А.Н. Заикин, и они решили использовать телевизионную установку, способную накапливать слабый сигнал за счет многократного сканирования. Достать промышленную телевизионную установку не удавалось. Работа застопорилась. И никто не вспомнил о железо-фенантролиновом комплексе! Толя забыл о рецепте Белоусова-Сафронова. Кажется, в 68-м он получил письмо от Бюссэ, рекомендовавшего добавить к колебательной системе железо-фенантролиновый комплекс. За ценный совет Жаботинский благодарил его, и заслуженно, но... А потом оказалось, что колебательная реакция Белоусова в присутствии этого комплекса идет и без церия! Наш старый спор о редокс-потенциалах и справочнике химика разрешился в мою пользу. Но это было второстепенно.

Пространственные эффекты, распространение волн в активной среде открыли новые замечательные возможности и аналогии. Подобным же образом распространяется возбуждение в нерве, в сердечном синцитии, вообще в «активных средах». VZ-реакция «вышла на оперативный простор», вошла в учебники и стала одним из ярких объектов новой науки синэргетики [24].

Итак, преувеличено ли значение открытой Белоусовым реакции? Нисколько. Справедлива ли его посмертная слава? Без сомнения. И она нисколько не умаляет заслуг множества исследователей, на протяжении почти трех столетий изучавших эти проблемы.

Осталось сказать, что пока человечество узнавало про Бориса Павловича Белоусова, его выгнали из института... «поскольку он стар и часто болеет». Он в самом деле был стар, но его творческая активность оставалась очень высокой. Он не вынес жизни без лаборатории и умер 12 июня 1970 года.

Когда Жаботинский в 74-м защищал докторскую диссертацию [21], его оппонент, великий человек, академик Рэм Викторович Хохлов сказал: «По аналогии с автоколебаниями процесс распространения волн в активной среде можно назвать автоволновым». Термин Хохлова прижился, только никто не знает, что слово было рождено у нас в зале. Эта новая часть науки, посвященная, в основ-

ном, пространственным эффектам, соединилась с исследованиями распространения волн возбуждения в сердце и вообще в «активных средах» Кринского-Иваницкого. Образовалась тесно взаимодействующая команда: Жаботинский, Кринский, Иваницкий, Заикин. И эта четверка двигала дело дальше.

Возникла идея о Ленинской премии. В списке соискателей не было Белоусова. И я был этим страшно возмущен. Ленинские премии, в отличие от Нобелевских, давали и посмертно. Я был представителем института в Комитете по Ленинским премиям, и, когда Яцимирский спросил о Белоусове, ответил, что Борис Павлович первый, остальные все-таки идут за ним. Кто-то заметил, что это все равно невозможно, на подбор документов нужен месяц, а до 22 апреля, дня рождения Ленина, когда объявляли о присуждении премий, осталось три недели. Я заявил: «Берусь представить их завтра» – и побежал звонить Георгию Ивановичу Задонскому, благородному человеку, в Институт биофизики Минздрава, где когда-то работал Б.П. Белоусов. Задонский заранее подобрал документы. «У вас папка целая?» «А как же!» «Привозите». Георгий Иванович привез папку. И Бориса Павловича внесли в список. Кажется, это никому не было нужно. Все суета, но... мне казалось, что это важно. Борису Павловичу присудили Ленинскую премию посмертно. Это было в 1980 году, через десять лет после его смерти.

Литература

1. Белоусов, Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм // Сб. реф. по радиационной медицине за 1958 год / Б.П. Белоусов. – М.: Медгиз, 1959. – С. 145–147.
2. Белоусов, Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм // Сб. Автоволновые процессы в системах с диффузией: сб. науч. тр. / Б.П. Белоусов; под ред. М.Т. Греховой. – Горький: Горьк. гос. ун-т., 1981. – С. 176–186.
3. Lotka, A.J. Contribution to the Theory of Periodic Reactions J. Phys. Chem. 1910. V. 14. P. 271.
4. Лазарев, П.П. Исследования по ионной теории возбуждения / П.П. Лазарев. – М., 1916.
5. Lotka, A.J., Undamped Oscillations Derived from the Law of Mass Action J. Amer. Chem. Soc. 1920. V. 42. P. 1595–1599.
6. Андронов, А.А. Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний: собр. тр. / А.А. Андронов. – М.: Изд. АН СССР, 1956. – С. 41–43.
7. Шемякин, Ф.М., Михалев, П.Ф. Физико-химические периодические процессы / Ф.М. Шемякин, П.Ф. Михалев. – М.-Л.: Изд. АН СССР, 1938.
8. Франк-Каменецкий, Д.А. Периодические процессы в кинетике окислительных реакций: докл. АН СССР / Д.А. Франк-Каменецкий. – М., 1939. Т. 25.
9. Франк-Каменецкий, Д.А. Успехи Химии / Д.А. Франк-Каменецкий. – М., 1941. 6 т. – С. 7–373.
10. Франк-Каменецкий, Д.А., Сальников, И.Е. О возможности автоколебаний в гомогенной химической системе при квадратичном автокатализе / Д.А. Франк-Каменецкий, И.Е. Сальников // Журнал Физической Химии. 1943. Т. 17. С. 79.

11. Франк-Каменецкий, Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике / Д.А. Франк-Каменецкий. – М.-Л.: Изд. АН СССР, 1947.
12. Сальников, И.Е. К теории периодического протекания гомогенных химических реакций: Канд. дис. / И.Е. Сальников. – Горький: Горьковский ун-т, 1948.
13. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959.
14. Шноль, С.Э. Вопросы Медицинской Химии / С.Э. Шноль. – М., 1958. Т. 4. – С. 443.
15. Чернавская, Н.М., Чернавский, Д.С. Биофизика / Н.М. Чернавская, Д.С. Чернавский. – М., 1958.
16. Christiansen, J.A. Z. Elektrochem. 1958. V. 62. P. 225.
17. Christiansen, J.A, Advances in Enzymology. 1961. V. 23. P. 83.
18. Жаботинский, А.М. Периодический ход окисления малоновой кислоты в растворе (исследование кинетики реакции Белоусова) / А.М. Жаботинский. – М.: Биофизика, 1964. Т. 9. – С. 306–311.
19. Жаботинский А.М. Исследование автоколебательных химических реакций в гомогенной жидкой среде: канд. дис. / А.М. Жаботинский. – М.: Институт Биофизики АН СССР, 1965
20. Колебательные процессы в биологических и химических системах // Тр. Всесоюзного Симпозиума по колебательным процессам в биологических и химических системах. – Пушкино-на-Оке, 21–26 марта 1966 г. – М.: Наука, 1967.
21. Жаботинский, А.М. Концентрационные автоколебания / А.М. Жаботинский. – М.: Наука, 1974. – 178 с.
22. Anatol M. Zhabotinsky < A history of chemical oscillations and waves, CHAOS 1(4), 1991, 379 385
23. Сальников, И.Е. У истоков теории химических автоколебаний // Межвузовский сб. науч. тр. «Динамика систем. Динамика и оптимизация» / И.Е. Сальников. – Нижний Новгород, 1992.
24. Oscillations and Traveling Waves in Chemical Systems / Eds. R.J. Field, M. Durger, John Wiley and Sons. – N.Y., 1985.
25. Вольтер, Б.В. Легенда и быль о химических колебаниях / Б.В. Вольтер // Знание-Сила. 1988. № 4. С. 33–37.
26. Шноль, С.Э. О закономерностях в дискретных распределениях результатов измерений. (космофизические аспекты) / С.Э. Шноль, В.А. Коломбет, Н.В. Удальцова, В.А. Намиот, Н.Б. Бодрова. – М.: Биофизика, 1992. Т. 34. Вып. 3. – С. 467–488.



МАНДЕЛЬБРОТ Бенуа

Бенуа МАНДЕЛЬБРОТ (фр. Benoît Mandelbrot) – французский математик, родился 20 ноября 1924 в Польше в Варшаве. В 1936 году семья Бенуа Мандельброта эмигрировала во Францию, в Париж (там уже жил дядя Бенуа – Франсуа Мандельброт, член группы математиков, известной под общим псевдонимом «Никола Бурбаки»).

После начала войны Мандельброты бежали на свободный от оккупации юг Фран-

ции, в городок Тюль. Там Бенуа Мандельброт пошел в школу, но вскоре потерял интерес к учебе. Поэтому к шестнадцати годам он еле знал алфавит и таблицу умножения до пяти.

Но у Бенуа Мандельброта открылся необычный математический дар, который позволил ему сразу после войны стать студентом Сорбонны. Оказалось, что у Бенуа великолепное пространственное воображение. Он даже алгебраические задачи решал геометрическим способом. Оригинальность его решений позволила Бенуа Мандельброту поступить в университет. Окончив университет, Бенуа Мандельброт сначала стал «чистым математиком». Он получил докторскую степень и постарался уйти как можно дальше от официальной академической науки.

В 1958 году Мандельброт приступил к работе в научно-исследовательском центре IBM в Йорктауне, поскольку IBM в то время занималась как раз интересными Бенуа Мандельброту областями математики.

Работая в IBM, Бенуа Мандельброт ушел далеко в сторону от чисто прикладных проблем компании. Он работал в области лингвистики, теории игр, экономики, авиации, географии, физиологии, астрономии, физики. Ему нравилось именно переключаться с одной темы на другую, изучать различные направления.

Исследуя экономику, Бенуа Мандельброт обнаружил, что произвольные внешне колебания цены могут следовать скрытому математическому порядку во времени, который не описывается стандартными кривыми. Бенуа Мандельброт занялся изучением статистики цен на хлопок за большой период времени (более ста лет). Колебания цен в течение дня казались случайными, но Мандельброт смог выявить тенденцию их изменения. Он проследил симметрию в длительных колебаниях цены и колебаниях кратковременных. Это открытие оказалось неожиданностью для экономистов.

По сути, Бенуа Мандельброт применил для решения этой проблемы зачатки своего рекурсивного (фрактального) метода.

Основатель и ведущий исследователь в области фрактальной геометрии. Лауреат премии Вольфа по физике (1993).

Понятие «фрактал» придумал сам Бенуа Мандельброт для обозначения самоподобных математических структур, т.е. состоящих из частей, которые в ка-

ком-то смысле подобны целому. Любопытно, что Мандельброт вводит категорию фрактала фрактально – задает «затравку» – первые (пусть и неверные) определения, а потом запускает механизмы их итерации, изменений. И пытается описать то, что при этом получается, какие интерпретации при этом появляются. Поэтому фрактальная геометрия – это не «чистая» геометрическая теория. Это скорее концепция, новый взгляд на хорошо известные вещи, перестройка восприятия, заставляющая исследователя по-новому видеть мир. Теперь уже общепризнанно, что все объекты с нечеткой, хаотичной, неупорядоченной структурой (таких в природе подавляющее большинство) состоят из фракталов.

В настоящее время фракталы изучаются не только как математическое явление, но и с художественной точки зрения – они очень красивы. С помощью фракталов рисуют картины, создают узоры и даже синтезируют искусственные природные ландшафты виртуальной реальности.



КАНТОР Георг (19.02.1845 – 06.01.1918)

Один из первых фракталов был исследован Георгом Кантором в 1870-х годах – теперь он носит название «множество Кантора» (иногда его еще называют «канторова пыль»). **КАНТОР Георг** (Cantor Georg) (19.02.1845, Петербург – 06.01.1918, Галле) – немецкий математик. В 1867 окончил Берлинский университет, в 1879 – 1913 гг. профессор университета в Галле. Кантор разработал теорию бесконечных множеств и теорию трансфинитных чисел. В 1874 он доказал несчётность

множества всех действительных чисел, установив таким образом существование неэквивалентных (т.е. имеющих разные мощности) бесконечных множеств, сформулировал (1878) общее понятие мощности множества. В 1879–1913 гг. Кантор систематически изложил принципы своего учения о бесконечности. Ввёл понятия предельной точки, производного множества; построил пример совершенного множества (канторова множества); развил одну из теорий иррациональных чисел; сформулировал одну из аксиом непрерывности (аксиому Кантора). В 1897 отошёл от научного творчества. Идеи Кантора встретили со стороны современников резкое сопротивление, в частности со стороны Л. Кронекера, но впоследствии оказали большое влияние на развитие математики.



ХАУСДОРФ Феликс
(08.11.1868 – 26.01.1942)

Феликс ХАУСДОРФ (нем. Felix Hausdorff; 8 ноября 1868, Бреслау – 26 января 1942, Бонн) – немецкий математик, считается одним из основоположников современной топологии.

Ввел и впервые исследовал важные в топологии понятия хаусдорфова пространства (1914), топологического предела, частично упорядоченного множества, а также хаусдорфовой размерности (1919). Также Хаусдорф внёс большой вклад в теорию множеств, функциональный анализ, теорию топологических групп и тео-

рию чисел. Выступал также как писатель под псевдонимом *Поль МОНГРЕ* (Paul Mongré). Окончил Лейпцигский университет (1891). Стал профессором этого университета, позже был профессором университетов в Грейфсвальде и Бонне. В 1935 году был отстранен от преподавательской деятельности как неариец (что было оформлено как отставка в звании почетного профессора). В 1942, когда отправка его и его семьи в гитлеровский концлагерь стала неизбежной, вместе с женой и её сестрой покончил жизнь самоубийством, приняв смертельную дозу веронала.



КЛЕЙН Феликс Христиан (25.04.1849 – 22.06.1925)

КЛЕЙН Христиан Феликс (Klein Christian Felix), род. 25.04.1849, Дюссельдорф, – ум. 22.06.1925, Геттинген. Немецкий математик, член-корреспондент Берлинской Академии Наук (1913 г.), иностранный член-корреспондент Петербургской АН – Физико-математическое отделение (по разряду математическому) с 02.12.1895. В 1865 поступил в Боннский университет, доктор философии там же (1868). С 1872 – профессор математики в Эрлангене,

с 1875 – в Мюнхенской Высшей технической школе, а с 1880 – в Лейпцигском университете. В 1886 Клейн переехал в Геттинген, где оставался до конца жизни.

Родился в Дюссельдорфе. В 1865г. поступил в Боннский университет, где преподавал в то время К. Плюккер. После смерти Плюккера Клейн подготовил к печати его труды.

Большое влияние на творчество Клейна оказали немецкий математик Р. Клебш и норвежский математик С. Ли, с которыми он встретился в Париже в 1870 г. С 1872 г. Клейн работает в Эрлангене, с 1875 г. – профессор высшей технической школы в Мюнхене, а с 1880г. – профессор университета в Лейпциге. В 1886 г. переехал в Гёттинген.

Основные труды по неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, теории алгебр, уравнений, теории эллиптических функций, теории автоморфных функций. Свои идеи в области геометрии Клейн изложил в работе «Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований» (1872 г.), известной под названием «Эрлангенская программа». По Клейну, каждая геометрия является теорией инвариантов специальной группы преобразований. Расширяя или сужая группу, можно перейти от одного типа геометрии к другому. Евклидова геометрия – наука об инвариантах метрической группы; проективная геометрия – наука об инвариантах проективной группы. Классификация групп преобразований дает классификацию геометрий; теория алгебр и дифференциальных инвариантов каждой группы дает аналитическую структуру геометрии.

Клейн стремился раскрыть внутренние связи между отдельными ветвями математики и между математикой, с одной стороны, физикой и техникой – с другой. Большой труд был вложен Клейном в создание «Энциклопедии математических наук» («Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften...»), Bd 1–6, Lpz., 1898–1934). В течение почти 40 лет (с 1876) Клейн был главным редактором журнала «Математические анналы» («Mathematische Annalen»). Много занимался вопросами математического образования; перед первой мировой войной организовал международную комиссию по реорганизации преподавания математики.

Опираясь на исследования Бельтрами, Клейн строго доказал непротиворечивость неевклидовой геометрии. Исследуя дискретные группы, Клейн рассмот-

рел группы многогранников и показал, что этими и близкими им группами можно, обобщая метод Галуа, воспользоваться для алгебр, решения уравнений некоторых типов. Рассматривал группы симметрий правильных многогранников трехмерного пространства (1884 г.). На русский язык переведены книги Клейна «Высшая геометрия» (М.; П., 1939 г.); «Элементарная математика с точки зрения высшей» (М.-Л., 1934–1935); «Неевклидова геометрия» (М.-Л., 1936.); «Лекции о развитии математики в XIX столетии» (М.-Л., 1937).

Эрлангенская программа

Эрлангенская программа, единая точка зрения на различные геометрии (например, евклидову, аффинную, проективную), сформулированная впервые Ф. Клейном на лекции, прочитанной в 1872 в университете г. Эрланген (Германия) и напечатанной в том же году под названием «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований».

Сущность Э.п. состоит в следующем. Как известно, евклидова геометрия рассматривает те свойства фигур, которые не меняются при движениях; равные фигуры определяются как фигуры, которые можно перевести одну в другую движением. Но вместо движений можно выбрать какую-нибудь иную совокупность геометрических преобразований и объявить «равными» фигуры, получающиеся одна из другой с помощью преобразований этой совокупности; при этом придём к иной «геометрии», изучающей свойства фигур, не меняющиеся при рассматриваемых преобразованиях. Введённое «равенство» должно удовлетворять следующим трём естественным условиям: 1) каждая фигура F «равна» сама себе, 2) если фигура F «равна» фигуре F' то и F' «равна» F , 3) если фигура F «равна» F' а F' «равна» F'' , то и F «равна» F'' . Соответственно этому приходится накладывать на совокупность преобразований следующие три требования: 1) в совокупность должно входить тождественное преобразование, оставляющее всякую фигуру на месте, 2) наряду с каждым преобразованием Π , переводящим фигуру F в F' , в совокупность должно входить «обратное» преобразование Π^{-1} , переводящее F' в F , 3) вместе с двумя преобразованиями Π_1 и Π_2 , переводящими соответственно F в F' и F' в F'' , в совокупность должно входить произведение $\Pi_2\Pi_1$ этих преобразований, переводящее F в F'' ($\Pi_2\Pi_1$ состоит в том, что сначала производится Π_1 , а затем Π_2). Требования 1), 2) и 3) означают, что рассматриваемая совокупность является группой преобразований (см. Непрерывная группа). Теория, которая изучает свойства фигур, сохраняющиеся при всех преобразованиях данной группы, называется геометрией этой группы.

Выбирая по-разному группу преобразований, получим разные геометрии. Так, принимая за основу группу движений, мы придём к обычной (евклидовой) геометрии; заменяя движения аффинными преобразованиями или проективными преобразованиями, придём к аффинной, соответственно, проективной геометрии. Основываясь на идеях А. Кэли, Клейн показал, что принятие за основу группы проективных преобразований, переводящих в себя некоторый круг (или произвольное коническое сечение), приводит к неевклидовой

геометрии Лобачевского (см. Лобачевского геометрия). Клейн ввёл в рассмотрение довольно широкий круг других геометрий, определяемых подобным же образом.

Э.п. не охватывает некоторых важных разделов геометрии, например риманову геометрию. Однако Э.п. имела для дальнейшего развития геометрии существенное стимулирующее значение. Важные работы, ставящие своей целью объединить теоретико-групповой и дифференциально-геометрический подход к геометрии, принадлежат Я. Схоутену и Э. Картану.



НЁТЕР Эмми (23.03.1882 – 14.04.1935)

Ама́лия (уменьшительное Э́мми) **НЁТЕР** (нем. Amalie «Emmy» Noether; 23 марта 1882, Эрланген, Германия – 14 апреля 1935, Брин-Мор, Пеннсилвания, США) – немецкий математик.

Родилась в семье математика Макса Нётера. В ранней юности не показывала склонностей к математике, предпочитая музыку и танцы, но потом заинтересовалась ей. Обучалась в Эрлангенском университете, где работал её отец, вначале вольнослушательницей, с 1904, когда разрешили женское обучение, и формально. Была ученицей математика Пауля Горда-

на, под руководством которого защитила в 1907 диссертацию по теории инвариантов. В 1916 Нётер переехала в Гёттинген, где знаменитые математики Д. Гильберт и Ф. Клейн заинтересовались в то время теорией относительности и знания Нётер в области теории инвариантов были им нужны. Гильберт оказал на Нётер огромное влияние, сделав её сторонницей аксиоматического метода. Он пытался сделать Нётер приват-доцентом Гёттингенского университета, но все его попытки провалились из-за предрассудков профессуры, в основном гуманитариев. Стала известна фраза Гильберта: «Не понимаю, почему пол кандидата служит доводом против избрания её приват-доцентом. Ведь здесь университет, а не мужская баня!»

Нётер тем не менее, не занимая никакой должности, часто читала лекции за Гильберта. Лишь после проигрыша первой мировой войны она смогла стать приват-доцентом в 1919, затем с 1922 – сверхштатным профессором. Она придерживалась социал-демократических взглядов, интересовалась СССР и в 1928–1929 читала лекции в Московском университете, где она оказала влияние на Л.С. Понтрягина и особенно на П.С. Александрова, до этого часто бывавшего в Гёттингене. После прихода фашистов к власти в 1933 ей, как еврейке, пришлось эмигрировать в США, где она стала преподавателем женского колледжа в Брин-Море и гостем Института высших исследований в Принстоне. В 1935 она умерла после неудачной операции по удалению раковой опухоли.

В основном труды Нётер относятся к алгебре, где они способствовали созданию нового направления, известного под названием абстрактной алгебры, в которую Нётер внесла решающую роль (наряду с Э. Артином и её учеником Б.Л. ван дер Варденом). Г. Вейль писал так:

«Значительная часть того, что составляет содержание второго тома «Современной алгебры» (Теперь просто «Алгебры») ван дер Вардена, должна принадлежать Эмми Нётер»

Термины «нётерово кольцо», «нётеров модуль» и теоремы о нормализации и Ласкера-Нётер о разложении идеала теперь являются азбучными понятиями. Большое влияние оказала Нётер на алгебризацию топологии, показав, что т.н. «числа Бетти» являются всего лишь рангами групп гомологий.

Большой вклад внесла Нётер в математическую физику, где её именем называется фундаментальная теорема теоретической физики, связывающая законы сохранения с симметриями системы (например, однородность времени влечет закон сохранения энергии).

Несмотря на блестящие математические достижения, личная жизнь Нётер не сложилась. Будучи некрасивой женщиной, она так и не смогла выйти замуж. Непризнание, а потом изгнание тоже, казалось, должны были испортить её характер. Тем не менее, она была почти всегда спокойной и доброжелательной, Г. Вейль писал, что даже счастливой.

Сочинения

Нётер, Эмми в проекте Математическая генеалогия.

John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Нётер, Эмми at the MacTutor archive.

Emmy Noether, Mandie Taylor, in: Biographies of Women Mathematicians, Agnes Scott College

Joint biography with Sophia Kovalevsky: Kovalevsky and Noether

UCLA page about Emmy Noether Шаблон:ScienceWorldBiography

Emmy Noether (1882-1935) – Lebensläufe (нем.) Application for admission to the University of Erlangen and three curricula vitae, two of which are shown in handwriting, with transcriptions. The first of these is in Emmy Noether's own handwriting.

The Life and Times of Emmy Noether Nina Byers, Physics Department, UCLA, Los Angeles, CA 90024, (November 11, 1994)

Two versions of her 1908 doctoral dissertation completed at Erlangen. The second is the published version. [1] [2] (нем.)

Clark Kimberling, Emmy Noether, Mentors & Colleagues

НЕТЕР теорема

Устанавливает связь между свойствами симметрии физической системы и сохранения законами. Если свойства системы не меняются при каком-либо преобразовании переменных, то этому соответствует сохранение некоторой физической величины. Так, независимости свойств системы от выбора начала отсчета времени соответствует закон сохранения энергии. Названа по имени сформулировавшей ее в 1918 Э. Нетер.



ШЕННОН Клод Эльвуд
SHANNON Claude Elwood
(30.04.1916 – 24.02.2001)

Клод Эльвуд ШЕННОН (Shannon) – американский инженер и математик. Человек, которого называют отцом современных теорий информации и связи.

Клод Эльвуд Шеннон родился в Петоски, штат Мичиган (Petoskey, Michigan), 30 апреля 1916 года. Его отец, потомок первых поселенцев Нью-Джерси, был бизнесменом, а мать, дочь эмигрантов из

Германии, учителем и в течение ряда лет – директором школы в Гэйлорде (Gaylord).

Этот удивительный человек однажды заявил: «Я всегда следовал своим интересам, не думая ни о том, во что они мне обойдутся, ни об их ценности для мира. Я потратил уйму времени на совершенно бесполезные вещи». Его «Математическую теорию связи» назвали «величайшей работой в анналах технической мысли». Его интуицию первооткрывателя сравнивали с гением Эйнштейна. И он же в тех же 40-х годах конструировал летающий диск на ракетном двигателе и катался, одновременно жонглируя, на одноколесном велосипеде по коридорам Bell Labs.

Первые 16 лет своей жизни Клод провел в Гэйлорде, окончив местную школу в 1932 году и показав при этом склонность к механике. Его любимыми предметами в школе были физика и математика, дома же он занимался конструированием моделей самолетов, радиоуправляемых корабликов и телеграфа для связи с жившим в полумиле другом. Телеграф этот использовал колючую проволоку, огораживающую местное пастбище. Необходимые для этих занятий деньги Клод зарабатывал, разнося газеты и телеграммы, а также ремонтируя радиоаппаратуру. Он постоянно возился с детекторными приемниками и радиоконструкторами, которые приносил ему отец, и решал математические задачки и головоломки, которыми снабжала его старшая сестра Кэтрин, ставшая впоследствии профессором математики. Клод полюбил эти два мира, столь несхожие между собой, – технику и математику.

Героем его детства был Эдисон, оказавшийся, как он потом узнал, дальним родственником – они оба были потомками Джона Огдена, одного из руководителей колонизации. Кроме того, список героев Клода включал множество ученых, таких как Ньютон, Дарвин, Эйнштейн и Фон Нейман.

В 1932 он поступил в университет Мичигана, следуя по стопам своей сестры Катерины, только что получившей там степень магистра по математике. В 1936 он стал бакалавром по электротехнике и математике; этот параллельный интерес к математике и инженерным специальностям он сохранил и в дальнейшем.

Будучи студентом Мичиганского университета, который он окончил в 1936 году, Клод специализировался одновременно и в математике, и в электротехни-

ке. Эта двусторонность интересов и образования определила первый крупный успех, которого Клод Шеннон достиг в свои аспирантские годы в Массачусетском технологическом институте. В своей диссертации, защищенной в 1940 году, он доказал, что работу переключателей и реле в электрических схемах можно представить посредством алгебры, изобретенной в середине XIX века английским математиком Джорджем Булем. «Просто случилось так, что никто другой не был знаком с этими обеими областями одновременно!» – так скромно Шеннон объяснил причину своего открытия.

В 1936 он получил должность лаборанта на отделении электротехники в Массачусетском Технологическом Институте (Massachusetts Institute of Technology, знаменитый М.И.Т.). Эта должность давала ему возможность продолжать обучение, работая лишь часть времени. Кроме того, эта работа идеально соответствовала его способностям и интересам – он работал на дифференциальном вычислителе Буша, наиболее совершенной вычислительной машине того времени, способной аналоговым образом решать дифференциальные уравнения вплоть до шестого порядка. Работа его заключалась в переводе уравнений в «механические термины», подготовке и запуске машины для различных начальных условий. Иногда этот процесс требовал совместной работы до пяти человек.

Интересной была также и электрическая цепь, управлявшая этим вычислителем, которая включала в себя более сотни реле. Работая с ней, Шеннон заинтересовался теорией построения таких цепей. Он изучал символическую логику и булеву алгебру на математических курсах в Мичигане и понимал, что это именно то, что требуется для описания таких бинарных систем. Он развил эти идеи в 1937 году, будучи в Нью-Йорке, в Лабораториях Белла (Bell Telephone Laboratories), и затем, вернувшись, в своей дипломной работе в Массачусетсе. Эта работа, первая из опубликованных им, привлекла значительное внимание и была выдвинута в 1940 году на премию имени Альфреда Нобеля, присуждаемую объединением инженерных обществ США.

Летом 1938 года он занимался исследовательской работой в Массачусетсе и осенью был переведен с отделения электротехники на отделение математики, где начал работу над докторской диссертацией. Его начальник, Ванневэр Буш, стал в это время президентом Института Карнеги в Вашингтоне; одно из подразделений этого института, находящееся в Колд Спринг Харбор (Cold Spring Harbor, N.Y.), занималось тогда генетикой, и он посоветовал Шеннону заняться с точки зрения алгебры проблемой хранения генетической информации. Шеннон провел там лето 1939 года, работая с генетиком Барбарой Баркс (Barbara Burks) над диссертацией, которую он назвал «Алгебра в теоретической генетике» (руководителем диссертации со стороны М.И.Т. был профессор Фрэнк Л. Хичкок (Frank L. Hitchcock), занимавшийся алгеброй).

Примерно в это же время Шеннон занимался разработкой идей в области вычислительных машин и систем связи. В письме от 16 февраля 1939 г. он писал Бушу о зависимости между временем, пропускной способностью, шумом и искажениями в системах связи, а также о разработке вычислительных систем для выполнения символических математических операций.

Весной 1940 года он наконец защитил диссертацию и получил звание магистра электротехники и доктора математики; летом он занимался дальнейшими

исследованиями в области коммутирующих электрических цепей в Лабораториях Белла, разработав новый метод их проектирования, позволявший существенно сократить число контактов в них. Результаты этой работы были опубликованы в статье «Разработка двухконечных коммутирующих цепей» («The Synthesis of Two-Terminal Switching Circuits»).

Академический год 1940-1941 гг. он провел в Принстоне под руководством Германа Вейла (Hermann Weyl), начав серьезно работать над своими идеями относительно теории информации и эффективных систем связи.

Торнтон С. Фрай (Thornton C. Fry), глава отделения математики в Лабораториях Белла, был в это время членом комитета по разработке систем управления зенитным огнем – страна вооружалась в связи с европейской войной; он предложил Шеннону также поработать на оборону. Вернувшись в Лаборатории, Шеннон присоединился к группе, разрабатывающей устройства для обнаружения самолетов и ракет противника и наведения зенитных орудий; задача эта была актуальной в связи с созданием в Германии ракет Фау-1 и Фау-2. Без этих систем наведения потери Англии в войне были бы существенно большими.

В 1941 году 25-летний Клод Шеннон поступил на работу в Bell Laboratories. В годы войны он занимался разработкой криптографических систем, и позже это помогло ему открыть методы кодирования с коррекцией ошибок. А в свободное время он начал развивать идеи, которые потом вылились в теорию информации. Исходная цель Шеннона заключалась в улучшении передачи информации по телеграфному или телефонному каналу, находящемуся под воздействием электрических шумов. Он быстро пришел к выводу, что наилучшее решение проблемы заключается в более эффективной упаковке информации.

Шеннон провел 15 лет в Лабораториях Белла в достаточно хорошем окружении – в это время там работали многие первоклассные математики, такие как Джон Пирс (John Pierce), известный своей работой в области спутниковой связи, Гарри Найквист (Harry Nyquist), много сделавший в теории обнаружения сигналов, Хендрик Бод (Hendrik Bode), занимавшийся обратной связью, создатели транзистора Браттин, Бардин и Шокли (Brattain, Bardeen и Shockley), Джордж Стибиц (George Stibitz), создавший первый (1938 год) релейный компьютер; Барни Оливер (Barney Oliver), выдающийся инженер, и другие.

Все эти годы Шеннон работал в различных областях, главным образом – в теории информации, началом которой послужила его статья «Математическая теория связи» («Mathematical Theory of Communication»). В этой статье было показано, что любой источник информации – телеграфный ключ, говорящий человек, телекамера и так далее – имеет «темпы производства информации», который можно измерить в битах в секунду. Каналы связи имеют «пропускную способность», измеряемую в тех же единицах; информация может быть передана по каналу тогда и только тогда, когда пропускная способность не меньше темпа поступления информации.

Эта статья по теории связи обычно считается наиболее весомым вкладом Шеннона в науку.

Но что же такое информация? Чем измерять ее количество? Шеннону пришлось ответить на эти вопросы еще до того, как он приступил к исследованиям пропускной способности каналов связи. В своих работах 1948-49 годов он опре-

делил количество информации через энтропию – величину, известную в термодинамике и статистической физике как мера хаоса в системе, а за единицу информации принял то, что впоследствии окрестили «битом», то есть выбор одного из двух равновероятных вариантов. Позже Шеннон любил рассказывать, что использовать энтропию ему посоветовал знаменитый математик Джон фон Нейман, который мотивировал свой совет тем, что мало кто из математиков и инженеров знает об энтропии, и это обеспечит Шеннону большое преимущество в неизбежных спорах.

Занятия Шеннона проблемами информации и шума имели множество различных приложений. К примеру, в статье «Теория защищенной связи» («Communication Theory of Secrecy Systems») он связал криптографию с проблемой передачи информации по зашумленному каналу (роль шума в этом случае играет ключ криптосистемы). Эта работа привела в дальнейшем к тому, что Шеннон был назначен консультантом правительства США по вопросам криптографии.

Другой задачей, которой он занимался совместно с Е.Ф. Муром (E.F. Moore), было повышение надежности релейных цепей путем ведения избыточного числа элементов (каждый из которых ненадежен). Эта задача, опять же, сводится к передаче информации по зашумленному каналу.

Кроме теории информации, Шеннон проявил себя во многих других областях. Одним из первых он высказал мысль о том, что машины могут играть в игры и самообучаться. В 1950 году он сделал механическую мышку Тесей, дистанционно управляемую сложной электронной схемой. Эта мышка училась находить выход из лабиринта. В честь его изобретения IEEE учредил международный конкурс «Микромышшь», в котором до сих пор принимают участие тысячи студентов технических вузов. В те же 50-е годы Шеннон создал машину, которая «читала мысли» при игре в «монетку»: человек загадывал «орел» или «решку», а машина по большей части выигрывала у него, т.к. отгадывала закономерности человеческого выбора.

Кроме того, Шеннон применил эти идеи также и к задаче оптимальной стратегии инвестиций, в которой «зашумленным сигналом» является рынок ценных бумаг и соответствующие ему временные ряды и задачей является максимизация выгоды.

В более легком стиле выдержана его статья в области вычислительной техники «Программирование компьютера для игры в шахматы» («Programming a Computer for Playing Chess») 1950 года. В то время компьютеры были медленными и программирование их было достаточно сложным; с тех пор создано множество шахматных программ, однако большинство из них и сейчас основаны на идеях этой работы.

В 1956 году Шеннон покинул Bell Labs и со следующего года стал профессором Массачусетского технологического института, откуда ушел на пенсию в 1978 году. В числе его студентов были, в частности, Марвин Мински и другие известные ученые, работавшие в области искусственного интеллекта.

Труды Шеннона, заложившие фундамент новой науки, столь же интересны и для специалистов, решающих сугубо прикладные задачи. Шеннон создал основы современного кодирования с коррекцией ошибок, без которого не обхо-

дятся сейчас ни один дисковод для жестких дисков или система потокового видео, и, возможно, многие продукты, которым еще только предстоит увидеть свет.

В МТИ и на пенсии им полностью завладело его давнее увлечение жонглированием. Шеннон построил несколько жонглирующих машин и даже создал общую теорию жонглирования, которая, впрочем, не помогла ему побить личный рекорд – жонглирование четырьмя мячиками. Еще он испытал свои силы в поэзии, а также разработал разнообразные модели биржи акций и опробовал их (по его словам – успешно) на собственных акциях.

Но с начала 60-х годов Шеннон не сделал в теории информации практически больше ничего. Это выглядело так, как будто ему всего за 20 лет надоела созданная им же теория. Такое явление – не редкость в мире науки, и в этом случае об ученом говорят одно слово: перегорел. Самые мощные звезды светят не долго, около ста миллионов лет, и кончают свою творческую жизнь вспышкой сверхновой, в процессе которой происходит нуклеосинтез: из водорода и гелия рождается вся таблица Менделеева. Мы с вами состоим из пепла этих звезд, и также наша цивилизация состоит из продуктов быстрого сгорания самых мощных умов. Есть звезды второго типа: они горят ровно и долго и миллиарды лет дарят свет и тепло населенным планетам (по крайней мере, одной). Исследователи такого типа тоже очень нужны науке и человечеству: они сообщают цивилизации энергию развития. А звезды третьего сорта – красные и коричневые карлики – светят и греют чуть-чуть, лишь себе под нос. Таких ученых тоже хватает...

На прочном фундаменте своего определения количества информации Клод Шеннон доказал удивительную теорему о пропускной способности зашумленных каналов связи. Во всей полноте эта теорема была опубликована в его работах 1957–1961 годов и теперь носит его имя. В чем суть теоремы Шеннона? Всякий зашумленный канал связи характеризуется своей предельной скоростью передачи информации, называемой пределом Шеннона. При скоростях передачи выше этого предела неизбежны ошибки в передаваемой информации. Зато снизу к этому пределу можно подойти сколь угодно близко, обеспечивая соответствующим кодированием информации сколь угодно малую вероятность ошибки при любой зашумленности канала.

Эти идеи Шеннона опередили свое время и не смогли найти применения в годы медленной ламповой электроники. Но в наше время высокоскоростных микросхем они работают повсюду, где хранится, обрабатывается и передается информация: в компьютере и лазерном диске, в факсимильном аппарате и межпланетной станции. Мы не замечаем теорему Шеннона, как не замечаем воздух.

В 1965 году Шеннон был приглашен в Россию на инженерную конференцию. Там он имел возможность встретиться с многократным чемпионом мира по шахматам Михаилом Ботвинником, также инженером-электротехником, интересующимся проблемой алгоритмизации шахматной игры. После продолжительной дискуссии Шеннон попросил гроссмейстера сыграть с ним в шахматы; нет ничего удивительного в том, что на 42-м ходу он проиграл.

В дальнейшем развитие шахматных программ было продолжено, и в 1980 году Шеннон стал почетным гостем на международном компьютерном шахмат-

ном турнире в Линце, Австрия (International Computer Chess Championship, Linz, Austria), в котором принимали участие одиннадцать машин из Швеции, Германии, России, Франции, Англии, Канады и США (большинство машин при этом находились в своих родных странах, связанные через Интернет с Австрией). Победителем стала «Белле», разработанная в Лабораториях Белла Кеном Томпсоном и Джо Кондоном («Belle», Ken Thompson, Joe Condon); по уровню игры она практически не уступала мастеру спорта.

Шеннон любил заниматься конструированием забавных – и не обязательно при этом полезных – устройств; в его доме можно было увидеть, к примеру, калькулятор, работающий с числами в римской системе, «черепашек», ползающих по полу и обходящих препятствия, или аппарат с двумя раками, жонглирующий тремя шариками.

В пятидесятых годах он создал «предельную машину» («Ultimate Machine»), основанную на идее Мервина Минского (Mervin Minsky) и описанную в «Голосе над морем» Артура Кларка; машина эта имела вид шкатулки с единственным выключателем. При включении его крышка открывалась, оттуда появлялась рука, которая возвращала выключатель в исходное положение и вновь скрывалась внутри.

В 1985 году Клод Шеннон и его жена Бетти неожиданно посетили Международный симпозиум по теории информации в английском городе Брайтоне. Почти целое поколение Шеннон не появлялся на конференциях, и поначалу его никто не узнал. Затем участники симпозиума начали перешептываться: вон тот скромный седой джентльмен – это Клод Эльвуд Шеннон, тот самый! На банкете Шеннон сказал несколько слов, немного пожонглировал тремя (увы, только тремя) мячиками, а затем подписал сотни автографов ошеломленным инженерам и ученым, выстроившимся в длиннейшую очередь. Стоящие в очереди говорили, что испытывают такие же чувства, какие испытали бы физики, явись на их конференцию сам сэр Исаак Ньютон.

В 1949 году Шеннон, находясь в Лабораториях Белла, женился на Мэри Элизабет (Бетти) Мур (Mary Elizabeth (Betty) Moore), занимавшейся численными расчетами (должность, называвшаяся тогда «вычислитель») в группе Джона Пирса. Они поселились в Мистик Лэйк, Винчестер, Массачусетс.

Шеннон играл на кларнете и любил музыку, а также поэзию (особенно Т.С.Элиота, Рубаи и Огдена Нэша), иногда и сам писал что-либо.

Ему были присуждены почетные степени университетов Уэйла (магистр, 1954), Мичигана (1961), Принстона (1962), Эдинбурга (1964), Питтсбурга (1964), Оксфорда (1970), а также ряда других, а кроме того – множество научных наград и медалей.

Клод Шеннон умер 24 февраля 2001 года в возрасте 84 лет после многолетней борьбы с болезнью Альцгеймера.



ВИНЕР Норберт **(26.11.1894 – 19.03.1964)**

ВИНЕР Норберт (Wiener Norbert), родился 26.11.1894, Колумбия, Миссури – умер 19.03.1964, Стокгольм. Американский учёный. К 14 годам изучил высшую математику, в 18 лет стал доктором философии Гарвардского университета.

Раннее развитие Винера отражено в его книге «Я вундеркинд» (1953). С 1919 преподаватель, с 1932 профессор Массачусетского технологического института. Занимался математикой, логикой и теоретической физикой. В 1920–1930-е гг. получил известность как математик работами по теории потенциала, гармоническим функциям, рядам и преобразованиям Фурье, тауберовым теоремам, общему гармоническому анализу. Большое значение в теории случайных процессов (винеровских процессов) получила введённая Винером мера в пространстве непрерывных функций («винеровская мера»).

Во время второй мировой войны 1939–45 Винер занимался электрическими сетями, вычислительной техникой, в частности в связи с баллистическими расчётами. Несколько позднее, но независимо от А.Н. Колмогорова развил теорию интерполяции и экстраполяции стационарных случайных процессов. Винер развил для таких процессов теорию их «фильтрации», получившую широкие технические применения. В 1945–47 работал в кардиологическом институте в Мехико. В эти годы у Винера возникла идея о необходимости создания единой науки, изучающей процессы хранения и переработки информации, управления и контроля. Для этой науки Винер предложил название кибернетика, получившее общее признание. Естественно, что конкретное содержание этой новой области знания не является созданием одного Винера. Не меньшую роль сыграли в формировании кибернетики, например, идеи К. Шеннона. Но Винеру принадлежит, несомненно, первое место в пропаганде значения кибернетики во всей системе человеческих знаний.

Философские и социологические взгляды Винера эклектичны. Однако должны быть отмечены его настойчивые высказывания о моральной ответственности учёных в деле сохранения мира и борьбы против использования достижений науки в агрессивной военной политике. В сочинениях писателей-фантастов получила большой отклик идея Винера о возможности «бунта машин».



СЕРПИНСКИЙ Вацлав (14.03.1882 – 09.10.1969)

СЕРПИНСКИЙ Вацлав Франциск (Sierpiński Waclaw Franciszek), родился 14.3.1882, Варшава – умер 21.10.1969, Варшава.

Вацлав Франциск родился в семье врача Константина Серпинского.

Польский математик, действительный член Академии знаний в Кракове (1917-51), с 1952 член и в 1952–57 вице-президент Польской АН в Варшаве, созданной на базе Академии знаний в Кракове и Варшавского научного общества.

Окончил Варшавский университет (1904), в 1918–60 профессор там же.

В. Серпинский был профессором Варшавского университета с 1918 г.

Вацлав Серпинский после окончания двух университетов в Варшаве и в Кракове не имел возможности получить работу в государственных учебных заведениях Польши из-за своего участия в 1905 г. в забастовке за национализацию образования. В 1908 г. он принял предложение работать во Львове, в университете Яна Казимежа. В связи с переездом во Львов Серпинский принял австро-венгерское подданство. В августе 1914 г. Серпинский находился в Белоруссии у родственников жены и там, как подданный Австро-Венгрии, был интернирован русскими властями.

Основные труды по теории множеств и её приложениям к топологии, теории функций действительного переменного. Вместе с польскими математиками З. Янишевским и С. Мазуркевичем в 1920 основал журнал «Fundamenta mathematicae», посвященный вопросам теории множеств и её приложениям.

Известен своими трудами по теории множеств, аксиоме выбора, континуум-гипотезе, теории чисел, теории функций, а также топологии. Автор более 700 статей и 50 книг. Его именем названы числа Серпинского, а также три широко известных фрактала: треугольник Серпинского, коврик Серпинского, кривая Серпинского.

Сочинения:

Hypothèse du continu, Warsz. 1934; General topology. – Toronto, 1952 / пер.: О решении уравнений в целых числах. – М., 1961.

Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики. – М., 1961.

Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. – М.-Л., 1963.

О теории множеств. – М., 1966.

250 задач по элементарной теории чисел. – М., 1968.



БЕЗИКОВИЧ
Абрам Самойлович
(11 января 1891 – 2 ноября 1970)

Абрам Самойлович БЕЗИКОВИЧ (11 января 1891, Бердянск, Россия – 2 ноября 1970, Кембридж) – русский математик.

Безикович был четвёртым ребенком в многодетной семье караимов Самуила и Евы Безиковичей. Отец был ювелиром, владел собственным магазином, но после ограбления стал работать кассиром.

В 1908 году Безикович окончил Бердянскую

гимназию и поступил на математическое отделение физико-математического факультета Санкт-Петербургского университета, где одним из его учителей был А.А. Марков. Окончив университет с дипломом 1-й степени в 1912 году, Безикович по предложению Маркова и Стеклова стал готовиться к получению профессорского звания. Еще будучи студентом, он написал работу «Новый вывод предельного выражения вероятности для случая независимых испытаний», которая в 1915 г. была опубликована в «Известиях Академии наук». После окончания университета был оставлен на кафедре чистой математики для подготовки к профессорской деятельности на 2 года сначала без стипендии, затем еще на 2 года со стипендией 1200 р. (до 1916 г.). В марте 1915 года Безикович закончил сдачу магистерских экзаменов и опубликовал свою первую печатную научную работу по теории вероятностей. В 1916 году он женился на Валентине Витальевне Дойниковой, для чего перешел в православие. Став в 1917 году приват-доцентом Петроградского университета, Безикович был направлен в учрежденный в 1916 году Пермский университет в качестве экстраординарного профессора по кафедре математики физико-математического факультета.

Выдержав испытания на степень магистра чистой математики (1917) и прочитав удовлетворительно две пробные лекции, А.С. Безикович был зачислен приват-доцентом Петроградского университета и с 1 июля 1917 г. командирован в г. Пермь для чтения лекций в отделении Петроградского университета в качестве исполняющего обязанности профессора по кафедре чистой математики.

В Пермском университете его избрали членом библиотечной комиссии от физико-математического факультета (1917), представителем университета в городской комитет по народному образованию и членом комиссии для разработки вопроса об учреждении и организации просветительной ассоциации (1918). А.С. Безикович вместе с группой молодых математиков организовал Пермское физико-математическое общество и начал издавать свой журнал. 1 октября 1919 г. А.С. Безикович был избран деканом физико-математического факультета.

В период работы А.С. Безиковича в ПГУ были опубликованы четыре его статьи в «Журнале физико-математического общества при Пермском госуниверситете»: «Некоторые общие предложения об изменении порядка интегрирования

и о почленном интегрировании рядов», «Новый вид условий интегрируемости функций», «Об одном уравнении в конечных разностях» (1918. Вып. 1); «О двух вопросах интегрируемости функций» (1919. Вып.2).

1 октября 1919 г. уезжавший с профессорско-преподавательским составом ПГУ в Томск от колчаковской оккупации ректор Н.В. Култашев сдал должность ректора профессору А.С. Безиковичу, которому в то время было 28 лет. Через год, в июне 1920 г., А.С. Безикович был командирован в Москву, Петроград и за границу для научных занятий и по делам оборудования учебно-вспомогательных учреждений.

Было известно, что он вез с собой 25 граммов радия стоимостью 750 000 рублей и два миллиона рублей, принадлежащих государственному университету.

Много лет спустя выяснилось, что А.С. Безикович в 1920 г. вернулся в Петроград и четыре года преподавал в пединституте и университете. Ему была предоставлена стипендия Рокфеллеровского фонда, но воспользоваться ею он смог только тогда, когда сумел нелегально перейти границу и перебраться в Копенгаген. Там в течение года он работал с Гарольдом Бором (братом знаменитого физика Нильса Бора), датским математиком, который тогда занимался теорией почти периодических функций. Результатом их совместной работы стала монография А.С. Безиковича о почти периодических функциях – первая в этой области математики. Книга была отмечена премией Д. Адамса Кембриджского университета (1930).

Затем А.С. Безикович работал в Оксфорде, Кембридже (1926–1927). В 1930 г. стал членом Тринити-колледжа (колледжа Св. Троицы), где и трудился до выхода на пенсию (1958). В течение нескольких лет он читал лекции в различных университетах США, после чего вернулся в Кембридж, где и скончался в 1970 г.

Большой резонанс в современном мире имели исследования А.С. Безиковича по теории множеств дробной размерности (проведенные в 1928–1937 гг.), которые в настоящее время принято называть «фракталами». Современные ученые эти глубокие исследования А.С. Безиковича определили как «пионерский гений Безиковича». А.С. Безикович наряду с А.А. Фридманом, Р.О. Кузьминым, И.М. Виноградовым стоял у истоков университетского математического образования в Перми. За свою жизнь А.С. Безикович опубликовал около 130 научных работ, у него было много учеников, в том числе 10 стали профессорами. Заслуги А.С. Безиковича были отмечены в мировой науке: он был избран членом Королевского общества в Лондоне (1934), награжден медалью имени Дж. Сильвестра (1952), медалью О. Де Моргана Лондонского математического общества (1950).

В период гражданской войны, когда Пермь была занята войсками А.В. Колчака и часть профессорско-преподавательского состава эвакуировалась в Томск, Безикович был назначен ректором Пермского университета. В 1920 году Безикович вернулся в Петроград.

В ноябре 1924 г. Безикович получил Рокфеллеровскую стипендию для научных занятий за рубежом, но не получив разрешения властей на эту поездку, он, как и его коллега Я.Д. Тамаркин, решил нелегально покинуть Советскую Россию. Он перешел латвийскую границу, затем перебрался в Копенгаген. Рокфеллеровская стипендия дала ему возможность заниматься в течение года под руко-

водством Харальда Бора исследованиями в области квазипериодических функций. Из Копенгагена Безикович отправился на несколько месяцев в Оксфорд к известному математику Г. Харди, после чего в течение года читал лекции в университете Ливерпуля. С 1927 года Безикович жил в Кембридже, где сначала работал лектором университета, а с 1930 – стал штатным сотрудником Тринити-колледжа. В 1950 году Безикович был приглашен на должность заведующего кафедрой математики, которую занимал до выхода на пенсию в 1958 г.

После выхода на пенсию Безикович в течение нескольких лет читал лекции как приглашенный профессор в различных университетах США.



МИНКОВСКИЙ Герман (22.06.1864 – 12.01.1909)

Герман МИНКОВСКИЙ (лит. Hermanas Minkovskis, нем. Hermann Minkowski; 22 июня 1864, Алексоты – 12 января 1909, Гёттинген) – немецкий математик, разработавший геометрическую теорию чисел и использовавший методы геометрии для решения сложных задач в области теории чисел, математической физики и теории относительности.

Герман Минковский родился в Алексотах (пригороде Каунаса в Литве, в то время входивших в состав Минской губернии)

в семье немецкого, польского и еврейского происхождения. Учился в Германии в Университетах Берлина и Кёнигсберга, где в 1885 году под руководством Фердинанда фон Линдемманна получил докторскую степень. Ещё студентом в 1883 году был награждён Математической премией Французской академии наук за свою рукопись по теории квадратичных форм. Минковский преподавал в университетах Бонна, Гёттингена, Кёнигсберга и Цюриха. В Цюрихе он был одним из учителей Эйнштейна.

Минковский исследовал арифметику квадратичных форм, особенно зависящих от n -переменных, и его исследования в этой области привели его к открытию некоторых геометрических свойств в n -мерном пространстве. В 1896 году он представил свою геометрию чисел – геометрический метод решения задач в теории чисел.

С 1902 года он преподавал на математическом факультете Гёттингена и стал одним из близких коллег Давида Гильберта, которого он впервые встретил в Кёнигсберге. Одним из его студентов в это время был Константин Каратеодори.

В 1907 году Минковский предположил, что специальная теория относительности, сформулированная Эйнштейном и основанная на более ранних работах Лоренца и Пуанкаре, может быть сформулирована естественным образом в четырёхмерном пространстве (известном сейчас как пространство Минковского), в котором время и пространство представляют собой не различные сущности, а являются измерениями пространства-времени, и в которое хорошо вписывается геометрия Лоренца специальной теории относительности. Это предположение помогло Эйнштейну в формулировании общей теории относительности.

В 1909 Минковский внезапно скончался от аппендицита в Гёттингене. У него был брат – Оскар Минковский – известный физик и исследователь.

В честь Германа Минковского назван астероид 12493 Минковский.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Божокин, С.В., Паршин, Д.А. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
2. Кроновер, Н.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Н.М. Кроновер. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
3. Мандельброт, Б.Б. Фрактальная геометрия природы / Б.Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
4. Морозов, А.Д. Введение в теорию фракталов / А.Д. Морозов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
5. Федер, Е. Фракталы / Е. Федер; пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.

Дополнительная литература

1. Макаренко, Н.Г. Фракталы, аттракторы, нейронные сети и все такое // Научная сессия МИФИ 2002. IV Всероссийская научно-техн. конф. «Нейроинформатика–2002»: лекции по нейроинформатике. Ч. 2 / Н.Г. Макаренко. – М.: МИФИ, 2002. – 172 с.
2. Пайтген, Х.-О., Рихтер, П.Х. Красота фракталов: образы комплексных динамических систем / Х.-О. Пайтген, П.Х. Рихтер. – М.: Мир, 1993. – 275 с.
3. Смирнов, Б.М. Физика фрактальных кластеров (Современные проблемы физики) / Б.М. Смирнов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1991. – 136 с.
4. Вишик, М.И. Фрактальная размерность множеств / М.И. Вишик // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 1. С. 122–127.
5. Heinz, Otto Peitgen, Hartmut Jurgens, Deitmar Saupe Chaos and Fractals – Springer Science, 2004. – 866 с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Heinz, Otto Peitgen, Hartmut Jurgens, Deitmar Saupe Chaos and Fractals – Springer Science, 2004. – 866 с.
2. Karl Becker, Michael Dofler Dynamical system and fractals – Cambridge. Cambridge university press, 1990. – 399 с.
3. Keneth Falconer Fractal Geometry/ Matematical Foundations and Applications. – Wiley, 2003. – 339 с.
4. Yuval Fisher Fractal Image Compression. Theory and Application. Springer – Verlag, 1994. – 433 с.
5. Андреев, Ю.В. Хаотические процессоры / Ю.В. Андреев, А.С. Дмитриев, Д.А. Куминов // Успехи современной радиоэлектроники. 1997. № 10. С. 50–79.
6. Божокин, С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
7. Болтянский, В.Г., Ефремович, В.А. Наглядная топология / В.Г. Болтянский, В.А. Ефремович. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 60 с.
8. Бондаренко, В.А., Дольников, В.Л. Фрактальное сжатие изображений по Барнсли–Слоан / В.А. Бондаренко, В.Л. Дольников // Автоматика и телемеханика. 1994. № 5. С. 12–20.
9. Брур, Х.В. Структуры в динамике: конечномерный детерминированный подход / Х.В. Брур, Ф. Дюмортье, С. ван Стрин, Ф. Такенс // Регулярная и хаотическая динамика. 2003. 336 с.
10. Вишик, М.И. Фрактальная размерность множеств / М.И. Вишик // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 1. С. 122–127.
11. Волкова, Н.А. Краткие сведения из истории фракталов. А. Волкова, А.П. Верозубов, А.В. Замилов // Компьютерные инструменты в образовании. 2001. № 5. С. 55–60.
12. Газале, М. Гномон: от фараонов до фракталов / М. Газале. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272 с.
13. Галиулин, Р. От мавританских орнаментов к фракталам / Р. Галиулин // Наука и жизнь. 1995. № 8.
14. Гарднер, М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам / М. Гарднер; пер. с англ. – М.: Мир, 1993. – 416 с.
15. Данилов, Ю.А. Красота фракталов / Ю.А. Данилов // Тр. Московского международного синергетического форума. – М., 1997.
16. Данилов, Ю.А. Фрактальность / Ю.А. Данилов // Знание и сила. 1993. № 5. С. 45–51.
17. Дубовиков, М.М. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов / М.М. Дубовиков, А.В. Крянев, Н.В. Старченко // Вестник РУДН. Сер. Прикладная и компьютерная математика, Т. 3. 2004. № 1. С. 30–44.

18. Дюгак, П. «Дело» Лузина и французские математики / П. Дюгак // Математика в России. Историко-математические исследования. 2000. Вып. 40. № 5. С. 119–142.
19. Жиков, В.В. Фракталы / В.В. Жиков // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 12. С. 109–117.
20. Зельдович, Я.Б., Соколов, Д.Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика / Я.Б. Зельдович, Д.Д. Соколов // УФН. 1985. Т. 14. Вып. 3.
21. Золотухин, И.В. Фракталы в физике твердого тела / И.В. Золотухин // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 7. С. 108–113.
22. Иванов, А.В. Определение фрактальной размерности овражно-балочной сети города Саратова / А.В. Иванов, А.А. Короновский, А.М. Минюхин, И.А. Яшков // Известия вузов «ПНД». 2006. Т. 14. № 2. С. 64–74.
23. Козинцев, С. Ландшафты фрактальных миров / С. Козинцев // Наука и жизнь. 1995. № 12.
24. Кронин, В.Г. Построение фракталов / В.Г. Кронин // Компьютерные инструменты в образовании. 2001. № 5. С. 73–79.
25. Кроновер, Н.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Н.М. Ероновер. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
26. Кузнецов, А.П. Наглядные образы хаоса / А.П. Кузнецов // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6. № 11. С. 104–110.
27. Кузнецов, С.П. Динамический хаос: курс лекций. Современная теория колебаний и волн / С.П. Кузнецов. – М.: Физматлит, 2006. – 355 с.
28. Макаренко, Н.Г. Фракталы, аттракторы, нейронные сети и все такое. Научная сессия МИФИ 2002. IV Всероссийская научно-техн. конф. «Нейроинформатика–2002»: лекции по нейроинформатике. Ч. 2. – М.: МИФИ, 2002. – 172 с.
29. Мандельброт, Б.Б. Фрактальная геометрия природы / Б.Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
30. Морозов, А.Д. Введение в теорию фракталов / А.Д. Морозов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
31. Нигматуллин, Р.Р., Фракталы: от узоров к движению / Р.Р. Нигматуллин, М.Н. Овчинников, Я.Е. Рябов // Природа. 1998. № 2.
32. Пайтген, Х.-О., Рихтер, П.Х. Красота фракталов: образы комплексных динамических систем / Х.-О. Пайтген, П.Х. Рихтер. – М.: Мир, 1993. – 275 с.
33. Пенроуз, М. Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики / М. Пенроуз. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.
34. Серпинский, В. Пифагоровы треугольники / В. Серпинский. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1959. – 113 с.
35. Складаров, О.П. Фракталы и крупномасштабная временная структура акустического речевого сигнала и музыки / О.П. Складаров // Электронный журнал «Техническая акустика». 2004. № 21. С. 10.
36. Смирнов, Б.М. Физика фрактальных кластеров (Современные проблемы физики) / Б.М. Смирнов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1991. – 136 с.
37. Топорков, А. Озеленение компьютерного мира / А. Топорков // СНР. 2002. август. С. 108–109.

38. Третьяков, Ю.Д. Дендриты, фракталы и материалы / Ю.Д. Третьяков // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 11. С. 96–102.
39. Федер, Е. Фракталы / Е. Федер; пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
40. Шишкин, Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов / Е.И. Шишкин. – Екатеринбург: Уральский государственный университет, 2004. – 88с.
41. Шредер, М. Фракталы, хаос, степенные ряды / М. Шредер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с.
42. Щепин, Е.В. О фрактальных кривых Пеано / Е.В. Щепин // Труды МИАН. 2004. Т. 247. С. 294–303.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ | 3 |
| Раздел 1. ОСНОВЫ ФРАКТАЛЬНОЙ ТЕОРИИ | 4 |
| Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФРАКТАЛОВ..... | 4 |
| 1.1. Фракталы и мир вокруг нас. Фракталы в природе | 4 |
| 1.2. Классификация фракталов. Геометрические фракталы..... | 13 |
| 1.3. Самоподобие. Скейлинг..... | 17 |
| Глава 2. ФРАКТАЛЬНАЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТИ..... | 23 |
| 2.1. Связь размерности и коэффициентов подобия..... | 23 |
| 2.2. Виды геометрических фракталов..... | 30 |
| 2.3. Определение размерности геометрических фракталов. Построение фрактала по размерности..... | 35 |
| Глава 3. ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛОВ | 39 |
| 3.1. L-системы. Построения L-систем с использованием одного правила | 39 |
| 3.2. Программные средства для построения фракталов с помощью L-систем..... | 42 |
| Глава 4. ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛОВ | 53 |
| 4.1. Построение L-систем с использованием двух правил | 53 |
| 4.2. Правила ветвления..... | 56 |
| 4.3. Основные свойства и правила построения кривых Пеано, Гильберта и Госпера | 58 |
| Раздел 2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ | 62 |
| Глава 5. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ..... | 62 |
| 5.1. Предварительные сведения из теории множеств | 62 |
| 5.2. Метрика Хаусдорфа | 68 |
| 5.3. Определение и свойства аффинного преобразования..... | 75 |
| 5.4. Примеры аффинных преобразований..... | 80 |
| Глава 6. ФРАКТАЛЫ И ХАОС | 85 |
| 6.1. Сведения из теории хаоса | 85 |
| 6.2. Фрактальная размерность аттрактора..... | 88 |
| Глава 7. СИСТЕМА ИТЕРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ | 97 |
| 7.1. Система итерируемых функций (СИФ)..... | 97 |
| 7.2. Детерминированный подход к построению фрактала | 99 |
| 7.3. Метод случайных итераций, или игра в хаос..... | 103 |
| 7.4. Игры с поворотами | 108 |

| | |
|---|------------|
| 7.5. Сжимающие аффинные преобразования..... | 114 |
| 7.6. Лист папоротника..... | 119 |
| Глава 8. ВИДЫ РАЗМЕРНОСТЕЙ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СПОСОБЫ | |
| ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ | 128 |
| 8.1. Вычисление размерности с помощью подсчета клеток..... | 128 |
| 8.2. Вычисление размерности с помощью точечного метода | 131 |
| 8.3. Мультифракталы и обобщенные размерности Реньи | 132 |
| 8.4. Фрактальная D_0 и информационная D_1 размерности | 135 |
| 8.5. Корреляционная D_2 размерность..... | 138 |
| ПРИЛОЖЕНИЯ..... 141 | |
| БИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ | |
| БЕЛОУСОВ Борис Павлович | 141 |
| <i>Симон Шноль и его книга «Герои и злодеи российской науки».</i> | |
| <i>Б.П. Белоусов и его колебательная реакция</i> | <i>143</i> |
| МАНДЕЛЬБРОТ Бенуа..... | 159 |
| КАНТОР Георг | 161 |
| ХАУСДОРФ Феликс | 162 |
| КЛЕЙН Феликс Христиан | 163 |
| <i>Эрлангенская программа.....</i> | <i>164</i> |
| НЁТЕР Эмми..... | 166 |
| <i>НЕТЕР теорема.....</i> | <i>167</i> |
| ШЕННОН Клод Эльвуд | 168 |
| ВИНЕР Норберт..... | 174 |
| СЕРПИНСКИЙ Вацлав..... | 175 |
| БЕЗИКОВИЧ Абрам Самойлович..... | 176 |
| МИНКОВСКИЙ Герман | 179 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | |
| Основная литература..... | 180 |
| Дополнительная литература | 180 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК | |
| | 181 |

Учебное издание

Перерва Лариса Михайловна
Юдин Виталий Витальевич

ФРАКТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Редактор Л.И. Александрова
Корректор О.В. Криворучко
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать .04.08. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л..
Уч.-изд. л. Тираж экз. Заказ

Издательство Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано в типографии ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57