Гурская К.А., Ивин В.В., Семёнов С.М.

Решение задач математической логики в ЕГЭ по информатике

УДК 004.9

Гурская К.А., Ивин В.В., Семёнов С.М.

Учебное пособие «Решение задач математической логики в ЕГЭ по информатике» предназначено для учащихся выпускных классов и учителей «Информатики и ИКТ» общеобразовательных учебных заведений и посвящено разбору логических задач, вынесенных в контрольно-измерительные материалы Единого государственного экзамена по информатике и информационно-коммуникационным технологиям.

Основной акцент делается на решение задач с системами логических уравнений, которые являются наиболее трудоёмкими в ЕГЭ по информатике и ИКТ. Авторы предлагают способы решения систем логических уравнений, которые понятны школьникам 9-11 классов и позволяют им достичь положительного результата, следуя по определенному алгоритму.

Так же учебное пособие может быть рекомендовано студентов ВУЗов и колледжей всех форм и направлений подготовки, изучающих «Информатику».

Оглавление

Введение 4
Основы алгебры логики 5
Интервальный метод 9
Системы логических уравнений 19
Литература 36

Введение

На практике системы логических уравнений [1] полезны при разработке цифровых логических устройств [3]. Решению систем логических уравнений посвящена одна из задач ЕГЭ по информатике. К сожалению, различные известные способы решения этой задачи не позволяют сформировать какой-то один подход к решению этой задачи. В результате, решение задачи вызывает большие затруднения у выпускников. В данном пособии предлагается способ решения систем логических уравнений, который позволяет выпускнику следовать вполне определенному алгоритму. Идея этого способа изложена в [3]. Мы применили и развили эту идею – построение дерева решений – почти не используя таблицы истинности для всего дерева. При решении различных задач выяснилось, что количество решений многих систем логических уравнений подчиняется рекуррентным соотношениям, таким как числа Фибоначчи и другим.

Основы алгебры логики

Для анализа и синтеза схем в ЭВМ при алгоритмизации и программировании решения задач широко используется математический аппарат алгебры логики или булевой алгебры*.

Алгебра логики – это раздел математической логики, значения всех элементов (функций и аргументов) которой определены в двухэлементном множестве: 0 и 1. Алгебра логики оперирует с логическими высказываниями.

Высказывание – это любое предложение, в отношении которого имеет смысл утверждение о его истинности или ложности. Высказывание может принимать только два значения – «истина» (обозначается «1») и «ложь» (обозначается «0»). При этом считается, что высказывание удовлетворяет *закону исключенного третьего*, т.е. каждое высказывание или истинно, или ложно и не может быть одновременно и истинным, и ложным.

В алгебре логики все высказывания обозначают буквами «A», «B», «C» и т.д. Содержание высказываний учитывается только при введении их буквенных обозначений, и в дальнейшем над ними можно производить любые действия, предусмотренные данной алгеброй. Причем если над исходными элементами алгебры выполнены некоторые разрешенные в алгебре логики операции, то результаты операций также будут элементами этой алгебры.

Логические выражения

Логические выражения могут быть простыми и сложными.

Простое логическое выражение состоит из одного высказывания и не содержит логические операции. В простом логическом выражении возможно только два результата – или «истина», или «ложь».

Сложное логическое выражение содержит высказывания, объединённые логическими операциями. Высказывания, являющиеся исходными для логической операции, называются аргументами.

Логические операции

Все операции алгебры логики определяются *таблицами истинности* значений. Таблица истинности определяет результат выполнения операций для всех возможных логических значений исходных высказываний.

1. Операция «НЕ» – логическое отрицание (инверсия)

Логическая операция «НЕ» применяется к одному аргументу, в качестве которого может и простое, и сложное логическое выражение.

Результат операции отрицания истинен, когда исходное высказывание ложно, и наоборот.

Для операции отрицания приняты следующие условные обозначения: **¬A**; $\bar{A}$ или **not A**. Результат операции отрицания определяется следующей таблицей истинности:

A	$\bar{A}$
истина	ложь
ложь	истина

или

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

2. Операция «ИЛИ» – логическое сложение (дизъюнкция, объединение)

Логическая операция «ИЛИ» выполняет функцию объединения двух высказываний, в качестве которых может быть и простое, и сложное логическое выражение.

* алгебра логики названа «булевой» в честь британского математика Джорджа Буля (1815-1864) – одного из основателей математической логики.

Результат операции дизъюнкции истинен, тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из исходных высказываний.

Для операции дизъюнкции приняты следующие условные обозначения: **A или B**; **A ∨ B** или **A or B**. При выполнении сложных логических преобразований для наглядности иногда используют обозначение **A + B**, где **A** и **B** – аргументы (исходные высказывания). Результат операции дизъюнкции определяется следующей таблицей истинности:

A	**B**	**A ∨ B**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Операция «И» – логическое умножение (конъюнкция)

Логическая операция «И» выполняет функцию пересечения двух высказываний, в качестве которых может быть и простое, и сложное логическое выражение.

Результат операции конъюнкции истинен, тогда и только тогда, когда истинно оба исходных высказывания.

Для операции дизъюнкции приняты следующие условные обозначения: **A и B**; **A ∧ B**; **A & B** или **A and B**. При выполнении сложных логических преобразований для наглядности иногда используют обозначение **A · B**, где **A** и **B** – аргументы (исходные высказывания). Результат операции дизъюнкции определяется следующей таблицей истинности:

A	**B**	**A ∧ B**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4. Операция «ЕСЛИ-ТО» – логическое следование (импликация)

Операция импликации связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием или предпосылкой, а второе – следствием или заключением.

Результат операции импликации ложен только тогда, когда предпосылка A истинна, а заключение B (следствие) ложно.

Для операции импликации приняты следующие условные обозначения: **если A, то B**; **A влечёт B**; ***if* A *then* B**; **A ‹=› B** или **A → B**. Результат операции импликации определяется следующей таблицей истинности:

A	**B**	**A → B**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. Операция «А тогда и только тогда, когда В» (эквивалентность, равнозначность)

Операция импликации связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием или предпосылкой, а второе – следствием или заключением.

Результат операции эквивалентности истинен только тогда, когда предпосылка А и В одновременно истинны или одновременно ложны.

Для операции эквивалентности приняты следующие условные обозначения: **А ~ В** или **А ≡ В**. Результат операции эквивалентности определяется следующей таблицей истинности:

A	**B**	**A → B**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Правила выполнения операций в алгебре логики определяются рядом аксиом, теорем и следствий.

В частности, для алгебры логики выполняются законы (табл. 1):

Таблица 1

Основные законы булевой алгебры

Закон	Пояснение	Для дизъюнкции	Для конъюнкции
1. Ассоциативность	Независимость от порядка выполнения однотипных действий	A + (B + C) = ¶= (A +B) + C = ¶= A + B + C	A · (B · C) = ¶= (A ·B) · C = ¶= A · B · C
2. Коммутативность	Независимость от перестановки	A + B = B + A	A · B = B · A
3. Дистрибутивность	Правила раскрытия скобок и вынесения за скобки	A + (B · C) = (A + B) · (A + C) (A + B) · (B + C) = (A · C) + A	(A + B) · C = A · C + B · C A · B + B · C = B · (A + C)
4. Идемпотентность	Отсутствие степеней и коэффициентов	A + A = A	A · A = A
5. Инволюция	Двойная инверсия	$\overline{\overline{A}} = \mathrm{A}$	
6. Действия с абсолютно-истинными высказываниями		A + 1 = 1	A · 1 = A
7. Действия с абсолютно-ложными высказываниями		A + 0 = A	A · 0 = 0
8. Законы де Моргана	Отрицание одновременной ¶истинности	$\overline{\mathrm{A} + \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}}$	
	Отрицание вариантов		$\overline{\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}$
9. Закон исключения третьего ¶и закон противоречия		$\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}} = 1$	$\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{A}} = 0$
10. Поглощение		A + A · B = A	A · (A + B) = A
11. Поглощение отрицания		$\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$	$\mathrm{A} \cdot (\overline{\mathrm{A}} + \mathrm{B}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$

Интервальный метод

Задания А3 и А10 относятся к первой части экзаменационной работы с выбором одного правильного ответа из четырех предложенных. **Задание А3** базового уровня сложности, проверяет умение строить таблицы истинности и логические схемы. **Задание А10** повышенного уровня сложности, проверяет знание основных понятий и законов математической логики. Рассмотрим несколько примеров этих задач.

Задание 1 Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
1	1	1	1

Каким выражением может быть F?

1) X /\ Y /\ Z 2) ¬X \/ ¬Y \/ Z 3) X \/ Y \/ Z 4) ¬X /\ ¬Y /\ ¬Z

Решение:

Перепишем ответы в более удобной форме и проанализируем их.

1) $X \cdot Y \cdot Z$ 2) $\overline{X} + \overline{Y} + Z$ 3) $X + Y + Z$ 4) $\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$

Рассмотрим первое выражение $X \cdot Y \cdot Z$. Оно равно 1 только при $X = Y = Z = 1$, а в остальных случаях равно 0, что совпадает с таблицей истинности.

Второе выражение $\overline{X} + \overline{Y} + Z = 0$ при $X = Y = 1$, а Z = 0, поэтому это неверный ответ.

Третье выражение $X + Y + Z = 0$ при $X = Y = Z = 0$, поэтому вторая строка таблицы не подходит и значит, это неверный ответ.

Рассмотрим последнее выражение $\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$. Оно равно 1 только при $X = Y = Z = 0$, поэтому это неверный ответ (первая и третья строки таблицы не подходит)

Следовательно, правильный ответ – 1) X /\ Y /\ Z.

Ответ: 1.

Задание 2 (демонстрационный вариант 2014 года)

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F.

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	F
1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1

Каким выражением может быть F?

1) ¬x1 /\ x2 /\ ¬x3 /\ x4 /\ x5 /\ ¬x6 /\ x7 /\ x8
2) ¬x1 \/ ¬x2 \/ x3 \/ ¬x4 \/ ¬x5 \/ ¬x6 \/ ¬x7 \/ ¬x8
3) x1 /\ ¬x2 /\ x3 /\ ¬x4 /\ x5 /\ x6 /\ ¬x7 /\ x8
4) x1 \/ ¬x2 \/ x3 \/ ¬x4 \/ ¬x5 \/ x6 \/ ¬x7 \/ ¬x8

Решение:

Рассмотрим первое выражение $\overline{x1}\cdot x2\cdot \overline{x3}\cdot x4\cdot x5\cdot \overline{x6}\cdot x7\cdot x8$. Оно равно 1, если x1 = x3 = x6 = 0, а x2 = x4 = x5 = x7 = x8 =1. Третья строка таблицы не подходит, значит, ответ неверный.

Рассмотрим второе выражение $\overline{x1}+\overline{x2}+x3+\overline{x4}+\overline{x5}+\overline{x6}+\overline{x7}+\overline{x8}$, проверив его на ложность. Оно равно 0 только при x3 = 0, а в остальных случаях 1, что совпадает с таблицей.

Третье выражение $x1\cdot \overline{x2}\cdot x3\cdot \overline{x4}\cdot x5\cdot x6\cdot \overline{x7}\cdot x8$ = 1, при x2 = x4 = x7 = 0. Третья строка таблицы не подходит - ответ неверный.

Последнее выражение $x1+\overline{x2}+x3+\overline{x4}+\overline{x5}+x6+\overline{x7}+\overline{x8}$ равно 0, при ¶x2 = x4 = x5 = x7 = x8 = 1, остальные 0. Это не соответствует первой строке, следовательно, ответ неверный.

После анализа рассмотренных вариантов, приходим к выводу, что верный ответ:
2) ¬x1 ∨ ¬x2 ∨ x3 ∨ ¬x4 ∨ ¬x5 ∨ ¬x6 ∨ ¬x7 ∨ ¬x8.

Ответ: 2.

Задание 3 (демонстрационный вариант 2012 года)

Какое из приведённых имён удовлетворяет логическому выражению: (первая буква согласная → вторая буква согласная) /\ (предпоследняя буква гласная → последняя буква гласная)?

1) КРИСТИНА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

Решение:
Разобьём выражение на 2 условия: «первая буква согласная → вторая буква согласная» и «предпоследняя буква гласная → последняя буква гласная». Условия связаны с помощью операции конъюнкция, поэтому должны выполняться одновременно. Оба условия есть не что иное, как импликация. Вспомним, что импликация ложна тогда, когда ее первая часть истинна, а вторая – ложна, поэтому удобнее будет проверить оба условия на ложность и отбросить ложные варианты.

Первое условие ложно, если первая буква согласная, а вторая – гласная, то есть для ответов МАКСИМ и МАРИЯ.

Второе условие ложно тогда, когда предпоследняя буква гласная, а последняя – согласная, то есть, для ответа СТЕПАН.

Значит, для ответа КРИСТИНА оба условия истинны.

Ответ: 1.

Задание 4 (демонстрационный вариант 2013 года)

На числовой прямой даны два отрезка: P = [2, 10] и Q = [6, 14].

Выберите такой отрезок A, что формула (**($x \in$ A)** → **($x \in$ P)**) ∨ **($x \in$ Q)** тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

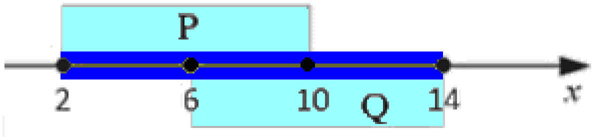
1) [0, 3] 2) [3, 11] 3) [11, 15] 4) [15, 17]

Решение:

1 способ

Преобразуем логическое выражение, заменив импликацию – дизъюнкцией.

Получим: $\neg(x\in A) \vee (x \in P) \vee (x\in Q) = 1$ или $\neg(x\in A) + (x \in P) + (x\in Q) = 1$. Это выражение истинно для любого x, поэтому область истинности выражения должна занимать всю числовую прямую. Отметим на числовой прямой известные отрезки P и Q.



Оставшуюся (незакрашенную) часть числовой прямой должна занимать область истинности выражения $x\in$ A. Но так как у нас $\neg(x\in$ A), значит, решением будет отрезок, находящийся внутри промежутка [2, 14]. Проверив варианты ответа, найдем верный ответ – 2) [3, 11].

Ответ: 2).

<u>2 способ</u>

Преобразуем логическое выражение, получим:

$$\mathbf{((x\in A) \to (x \in [2, 10])) \vee (x\in [6, 14]) = 1.}$$

Подставим в выражение концы первого отрезка $x\in$ [0, 3]

0	1	→	0	∨	0	=	0
3	1	→	1	∨	0	=	1

Подставим в выражение концы второго отрезка $x\in$ [3, 11]

3	**1**	→	**1**	∨	**0**	**=**	**1**
11	**1**	→	**0**	∨	**1**	**=**	**1**

Рассмотрим оставшиеся отрезки $x\in$ [11, 15] и $x\in$ [15, 17]

11	1	→	0	∨	1	=	1
15	1	→	0	∨	0	=	0
15	1	→	0	∨	0	=	0
17	1	→	0	∨	0	=	0.

Таким образом, проверив все варианты, найдем верный ответ – 2) [3, 11].

Ответ: 2).

<u>Задание 5</u> (демонстрационный вариант 2014 года)

На числовой прямой даны два отрезка: P = [1, 39] и Q = [23, 58].

Выберите из предложенных отрезков такой отрезок A, что логическое выражение $\mathbf{((x \in P) \to \neg (x\in Q)) \to \neg(x\in A)}$ тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

1) [5, 20] 2) [25, 35] 3) [40, 55] 4) [20, 40]

Решение:

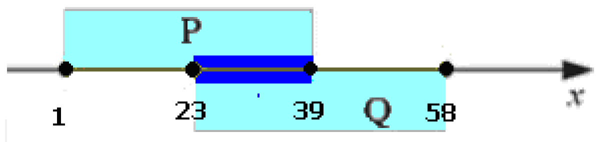
1 способ.

Преобразуем логическое выражение, используя законы логики.
Получим: $\mathbf{(\neg(x \in P) \vee \neg(x \in Q)) \to \neg(x \in} A) = 1$;

$$\mathbf{\neg(\neg(x \in P) \vee \neg(x \in Q)) \vee \neg(x \in A) = 1;}$$

$$\mathbf{(x \in P) \wedge (x \in Q) \vee \neg(x \in A) = 1.}$$

Выражение истинно для любого *x*, поэтому область истинности выражения должна занимать всю числовую прямую. Отметим на числовой прямой отрезки P и Q.



Решением $(x \in P) \wedge (x \in Q)$ будет являться отрезок [23, 39]. Но так как имеем ¶$\neg(x \in A)$, значит, решением будет отрезок, находящийся внутри этого промежутка, то есть отрезок [25, 35].

2 способ
Преобразуем логическое выражение, получим:
$\mathbf{((x \in [1, 39]) \to \neg(x \in [23, 58])) \to \neg(x \in A) = 1.}$
Подставим поочередно концы всех отрезков.
$x \in [5, 20]$

5 $(1 \to \neg 0) \to \neg 1 = (1 \to 1) \to 0 = 1 \to 0 = 0$

20 $(1 \to \neg 1) \to \neg 1 = (1 \to 0) \to 0 = 0 \to 0 = 1$

$x \in [25, 35]$

25 $\mathbf{(1 \to \neg 1) \to \neg 1 = (1 \to 0) \to 0 = 0 \to 0 = 1}$

35 $\mathbf{(1 \to \neg 1) \to \neg 1 = (1 \to 0) \to 0 = 0 \to 0 = 1}$

$x \in [40, 55]$

40 $(0 \to \neg 1) \to \neg 1 = (0 \to 0) \to 0 = 1 \to 0 = 0$

55 $(0 \to \neg 1) \to \neg 1 = (0 \to 0) \to 0 = 1 \to 0 = 0$

$x \in [20, 40]$

20 $(1 \to \neg 0) \to \neg 1 = (1 \to 1) \to 0 = 1 \to 0 = 0$

40 $(0 \to \neg 1) \to \neg 1 = (0 \to 0) \to 0 = 1 \to 0 = 0$

Таким образом, проверив все варианты, найдем верный ответ – 2) [25, 35].

Ответ: 2).

Задание 6

Для какого из значений числа А высказывание **(А < 5) ∧ ((А > 1) → (А > 5))** будет истинным?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение:

1 способ (подстановка)

Выполним операции для всех чисел:

А	**А < 5**	**А > 1**	**А > 5**	**(А > 1)→(А >5)**	**(А < 5) ∧ ((А > 1) → (А > 5))**
1	1	0	0		
2	1	1	0		
3	1	1	0		
4	1	1	0		

По таблице истинности импликация ложна только в случае 1→ 0, в остальных случаях импликация истинна.

А	**А < 5**	**А > 1**	**А > 5**	**(А > 1)→(А >5)**	**(А < 5) ∧ ((А > 1) → (А > 5))**
1	1	0	0	1	
2	1	1	0	0	
3	1	1	0	0	
4	1	1	0	0	

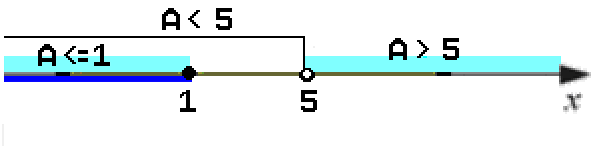
Второе выражение **(А > 1)→(А >5)** истинно для А = 1 и ложно при остальных значениях А.

А	**А < 5**	**А > 1**	**А > 5**	**(А > 1)→(А >5)**	**(А < 5) ∧ ((А > 1) → (А > 5))**
1	1	0	0	1	1
2	1	1	0	0	0
3	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	0

Первое выражение **А < 5** истинно при А = 1 и ложно при остальных трех значениях А . Следовательно, выражение (**А < 5) ∧ ((А > 1) → (А > 5))** истинно при А = 1.

2способ

Преобразуем выражение (А < 5) ∧ ((А > 1) → (А > 5)), используя законы логики.
(А < 5) ∧ ((А <=1) ∨ (А > 5)). Условия связаны с помощью операции конъюнкция, поэтому должны выполняться одновременно. Отметим их на числовой прямой



Пересечением является (A <=1), значит, ответ – 1)

Ответ: 1).

<u>Задание 7</u>

Для какого числа Y истинно высказывание $\mathbf{(Y > 1) \lor (Y > 4) \to (Y < 2)}$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

<u>Решение:</u>

<u>1 способ (подстановка)</u>

Вспомним, что импликация ложна, только если первое выражение истинно, а второе ложно. Во всех остальных случаях импликация истинна. Заполним таблицу и проанализируем.

Y	**Y > 1**	**Y > 4**	**Y<2**	$\mathbf{(Y > 1) \lor (Y > 4)}$	$\mathbf{(Y > 1) \lor (Y > 4) \to (Y < 2)}$
1	0	0	1	0	1
2	1	0	0	1	0
3	1	0	0	1	0
4	1	0	0	1	0

Первое выражение $\mathbf{Y > 1}$ ложно для $Y = 1$ и истинно при остальных значениях Y. Второе выражение $\mathbf{(Y > 1) \lor (Y > 4)}$ истинно при $Y = 1$ и ложно при остальных трех значениях Y . Следовательно, импликация истинна при $Y = 1$.

<u>2способ</u>

Преобразуем выражение $(Y > 1) \lor (Y > 4) \to (Y < 2)$, заменив импликацию дизъюнкцией. Получим $\neg((Y>1) \lor (Y>4)) \lor (Y<2)$.

Используем законы де Моргана $(Y<=1) \land (Y<=4) \lor (Y<2)$.

Решением выражения $(Y<=1) \land (Y<=4)$ будет $(Y<=1)$. Следовательно, получаем выражение $(Y<=1) \lor (Y<2)$. Условия связаны с помощью операции дизъюнкция, поэтому должно выполняться хотя бы одно из них. Правильный ответ $Y = 1$.

Ответ: 1.

<u>Задание 6</u>

Для какого символьного набора истинно высказывание, приведенное ниже?

Вторая буква согласная $\land$ (в слове 3 гласных буквы $\lor$ первая буква согласная).

1) УББОШТ 2) ТУИОШШ 3) ШУБВОИ 4) ИТТРАО

<u>Решение:</u>

Разобьём выражение на 2 условия: «вторая буква согласная» и «в слове 3 гласных буквы ∨ первая буква согласная». Условия связаны с помощью операции конъюнкция, поэтому должны выполняться одновременно. Первое условие «вторая буква согласная» выполняется всегда, поэтому после анализа ответов можно отбросить 2) ТУИОШШ и 3) ШУБВОИ. Второе условие «в слове 3 гласных буквы ∨ первая буква согласная» удобнее проверить на ложность. Оно будет ложно, если в слове не 3 гласные буквы и первая буква гласная, то есть для ответа 1) УББОШТ. Значит, правильным ответом будет 4) ИТТРАО.

Ответ: 4.

Задание 8

На числовой прямой даны два отрезка: P = [6, 24] и Q = [20, 28]. Выберите такой отрезок A, что формула $\mathbf{((x \notin A) \to (x \notin P)) \vee\vee (x \in\in Q)}$ тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной $\boldsymbol{x}$.

1) [4, 20] 2) [18, 28] 3) [6, 18] 4) [20, 24]

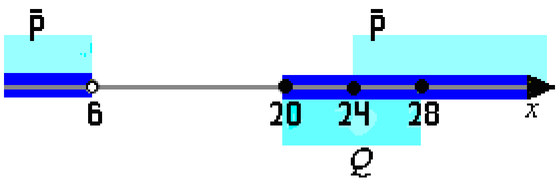
Решение:

Преобразуем логическое выражение, заменив импликацию.

$\mathbf{(\neg\ (\neg(x \in A)) \vee \neg\ (x \in P)) \vee\ (x \in Q) = 1};$

$\mathbf{(x \in A) \vee \neg\ (x \in P) \vee\ (x \in Q\ ) = 1}.$

Условия связаны с помощью операции дизъюнкция, поэтому должно выполняться хотя бы одно из них. Отметим на числовой прямой отрезки ¬P и Q.



Таким образом, область истинности выражения $x \in$ A должна содержать незакрашенную часть – отрезок [6, 20]. Проанализировав все ответы, приходим к выводу, что решением будет отрезок 1) [4, 20].

Ответ: 1.

Задание 9

Для какого из приведенных чисел X истинно логическое условие: **¶¬((X кратно 5) → (X кратно 25))**?

1) 37 2) 59 3) 65 4) 125

Решение:

Выражение **¬((X кратно 5) → (X кратно 25)) = 1** равносильно выражению **¶(X кратно 5) → (X кратно 25) = 0.** Вспомним, что импликация равна 0 только в одном случае, когда первое выражение истинно, а второе ложно. Значит, искомое число кратно 5 и не кратно 25. Проанализировав варианты ответов, приходим к выводу, что это число 65.

Формулировки задач взяты из [5]. Решения основаны на преобразовании любого выражения к виду $X \vee \neg Y$, $\neg X \vee Y$, $\neg X \vee \neg Y$, где X и Y могут быть комбинациями A, P, Q и R. В первом случае отрезок Y должен лежать целиком в отрезке X. Во втором случае отрезок X – в Y. В третьем случае отрезок X должен лежать вне отрезка Y. Такой подход позволяет школьнику решать задачу строго в соответствии с заданным алгоритмом (сведение выражения к указанному виду). При этом для решения используется исключительно аппарат математической логики. Приведенные примеры в основном охватывают различные варианты заданий, представленные в [1] и в других источниках. Следует отметить, что предлагаемый подход характеризуется краткостью приводимых решений.

Задача 1. На числовой прямой даны два отрезка P=[2, 10] и Q=[6, 14]. Выберите такой отрезок A, что формула $((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$ тождественно истина, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

1) [0, 3] 2) [3, 11] 3) [11, 15] 4) [15, 17]

Решение. Введем обозначения $x \in A$ – A, $x \in P$ – P, $x \in Q$ – Q. Тогда $((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q) = (A \rightarrow P) \vee Q = \neg A \vee P \vee Q = \neg A \vee (P \vee Q)$.

Для последнего выражения вся числовая ось будет покрываться в том случае, если отрезок A полностью лежит в объединении отрезков P и Q [2, 14]. Очевидно, что это отрезок [3, 11], то есть вариант 2).

Задача 2. На числовой прямой даны два отрезка P=[2, 20] и Q=[15, 25]. Выберите такой отрезок A, что формула $((x \notin A) \rightarrow (x \notin P)) \vee (x \in Q)$ тождественно истина, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

1) [0, 15] 2) [10, 25] 3) [2, 10] 4) [15, 20]

Решение. С учетом обозначений исходное выражение запишется как

$(\neg A \rightarrow \neg P) \vee Q = A \vee \neg P \vee Q = \neg P \vee (A \vee Q)$.

Для того чтобы выполнялось последнее выражение, нужно чтобы отрезок P целиком лежал в объединении отрезков A и Q. Отрезок [0, 15] подходит. Таким образом, вариант 1).

Задача 3. На числовой прямой даны три отрезка P=[10,27], Q=[15,30] и R=[25,40]. Выберите такой отрезок A, что формула $((x \in Q) \rightarrow (x \notin R)) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin P)$ тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x.

1) [0, 15] 2) [10, 40] 3) [25, 35] 4) [15, 25]

Решение. С учетом обозначений исходное выражение запишется как

$((Q \rightarrow \neg R) \wedge A \wedge \neg P = ((\neg Q \vee \neg R) \wedge A \wedge \neg P = A \wedge \neg P \wedge \neg(Q \wedge R) = \neg(\neg A \vee \neg (\neg P \wedge \neg(Q \wedge R)) = \neg(\neg A \vee (P \vee (Q \wedge R)))$.

Для того чтобы последнее выражение, было ложно, нужно чтобы выражение в скобке было истинно. Но для этого нужно чтобы отрезок A целиком лежал в объединении отрезков $P \vee (Q \wedge R)$. Пересечение отрезков отрезок $(Q \wedge R)$ дает отрезок [25, 30]. Тогда объединение $P \vee (Q \wedge R)$ даст отрезок [10, 30]. Полностью в этот отрезок попадает отрезок [15, 25], то есть вариант 4).

Задача 4. На числовой прямой даны три отрезка P=[5, 10], Q=[10, 20] и R=[25, 40]. Выберите такой отрезок A, что выражения $(x \in A) \rightarrow (x \in P)$ и $(x \in Q) \rightarrow (x \in R)$ тождественно равны, то есть принимают одинаковые значения при любом значении переменной x (кроме, возможно, конечного количества точек).

1) [7, 20] 2) [2, 12] 3) [10, 25] 4) [20, 30]

Под конечным количеством точек имеется в виду, что на концах отрезков выражения могут иметь различные значения.

Решение. Преобразуем исходное выражение к следующему¶$\neg A \vee P$ и $\neg Q \vee R$. Второе выражение истинно во всех точках кроме отрезка [10, 20]. Нужно, чтобы первое выражение имело такую же область истинности. Только отрезок [7, 20] покрывает отрезок [10, 20]. При этом его часть [7, 10] входит в отрезок P, то есть не влияет на истинность выражения. Таким образом, подходит отрезок [7, 20], то есть вариант 1).

Задача 5. На числовой прямой даны три отрезка P=[10, 15], Q=[5, 20] и R=[15, 25]. Выберите такой отрезок A, что выражения $(x \notin A) \rightarrow (x \in P)$ и $(x \in Q) \rightarrow (x \in R)$ принимают разные значения при любом значении переменной x (кроме, возможно, конечного количества точек).

1) [7, 20] 2) [2, 15] 3) [5, 12] 4) [20, 25]

Под конечным количеством точек имеется в виду, что на концах отрезков выражения могут иметь различные значения.

Решение. Преобразуем исходное выражение к следующему $A \vee P$ и $\neg Q \vee R$. Второе выражение истинно во всех точках кроме отрезка [5, 15] (часть отрезка Q, которая не входит в отрезок R). Нужно, чтобы первое выражение было истинно на отрезке [5, 15], а вне его ложно. Объединение отрезков [5, 12] и [10, 15] дает отрезок [5, 15]. Таким образом, подходит вариант 3).

Задача 6. На числовой прямой даны три отрезка: P = [10, 40], Q = [5, 15] и R= [35, 50]. Выберите такой отрезок A, что формула $((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \in A) \rightarrow (x \in R))$ тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной $\boldsymbol{x}$.

1) [10, 20] 2) [15, 25] 3) [20, 30] 4) [120, 130]

Решение. Преобразуем исходное выражение к следующему

$(\neg P \vee Q) \vee (\neg A \vee R) = (\neg A \vee \neg P) \vee (Q \vee R)$.

Последнее выражение будет эквивалентно $(\neg A \vee \neg P)$, если найдется такой отрезок A, который не имеет пересечений с отрезком P. Такой отрезок есть, это [120, 130]. Тогда выражение $(\neg A \vee \neg P)$ тождественно истинно независимо от $(Q \vee R)$. Таким образом, вариант 4).

Задача 7. На числовой прямой даны три отрезка: P = [20, 50], Q = [15, 20] и R= [40,80]. Выберите такой отрезок A, что формула $((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \in A) \rightarrow (x \in R))$ тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной $\boldsymbol{x}$.

1) [10, 25] 2) [20, 30] 3) [40, 50] 4) [35, 45]

Решение. Преобразуем исходное выражение к следующему

$(\neg P \vee Q) \vee (\neg A \vee R) = (\neg A \vee \neg P) \vee (Q \vee R) = \neg(A \wedge P) \vee (Q \vee R)$.

В отличие от предыдущей задачи в этом примере нет отрезка A, не пересекающегося с отрезком P. Поэтому нужно искать пересечение $(A \wedge P)$, которое будет полностью входить в Q или в R. Такой отрезок есть, это [40, 50], который полностью входит в отрезок R. Таким образом, вариант 3).

Задача 8. На числовой прямой даны три отрезка: P = [10, 50], Q = [15, 20] и R = [30, 80]. Выберите такой отрезок A, что формула $((x \in P) \to (x \in Q)) \vee ((x \notin A) \to (x \notin R))$ тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

1) [10, 25] 2) [25, 50] 3) [40, 60] 4) [50, 80]

Решение. Преобразуем исходное выражение к виду $(\neg P \vee Q) \vee (A \vee \neg R) = A \vee Q \vee (\neg P \vee \neg R) = \neg(P \wedge R) \vee A \vee Q$. Последнее выражение будет истинно, если пересечение $P \wedge R$ будет целиком лежать в объединении $A \vee Q$ (или только в A). Пересечение $P \wedge R$ [30, 50] целиком содержится в отрезке [25, 50], то есть подходит вариант 2).

Задача 9. На числовой прямой даны два отрезка: P = [5, 15] и Q = [10, 20]. Выберите такой отрезок A, что формула $(x \in P) \wedge (x \notin Q) \wedge (x \in A)$ тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x.

1) [0, 7] 2) [8, 15] 3) [15, 20] 4) [7, 20]

Решение. Если формула ложна, то ее отрицание истинно, поэтому преобразуем исходное выражение к виду $\neg(P \wedge \neg Q \wedge A) = \neg P \vee \neg A \vee Q$. Если найдется отрезок A, который не пересекается с отрезком P, то это и будет решение. Такой отрезок есть - [15, 20]. Правда, есть пересечение в граничной точке отрезка, но, как и в задаче 4, будет считать, что это допустимо. Итак, вариант 3).

Задача 10. На числовой прямой даны два отрезка: P = [10, 20] и Q = [5, 15]. Выберите такой отрезок A, что формула $((x \in Q) \to (x \in P)) \wedge (x \in A)$ тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x.

1) [0, 6] 2) [5, 8] 3) [7, 15] 4) [12, 20]

Решение. Если формула ложна, то ее отрицание истинно, поэтому преобразуем исходное выражение к виду $\neg((\neg Q \vee P) \wedge A) = \neg(\neg Q \vee P) \vee \neg A = (Q \wedge \neg P) \vee \neg A$. Тогда отрезок A должен целиком лежать внутри пересечения $Q \wedge \neg P$. Легко видеть, что этим пересечением является отрезок [5, 10]. Целиком внутри него лежит отрезок [5 , 8]. Таким образом, получаем вариант 2).

Задача 11. На числовой прямой даны два отрезка: P = [41, 61] и Q = [11, 91]. Выберите такой отрезок A, что формула $((x \in P) \to (x \in A)) \wedge ((x \in A) \to (x \in Q))$ тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*. Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

1) [7, 43] 2) [7, 73] 3) [37, 53] 4) [37, 63]

Решение. Преобразуем исходное выражение к виду $(\neg P \vee A) \wedge (\neg A \vee Q)$. Обе части выражения будут истинны, если P целиком находится в A и A целиком находится в Q. Для первого условия подходит отрезок только [37, 63]. Для второго условия он тоже подходит. Таким образом, вариант 4).

Задача 12. На числовой прямой даны два отрезка: P = [10, 30] и Q = [20, 40]. Выберите такой отрезок A, что формула $(x \in A) \to ((x \in P) \equiv (x \in Q))$ тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*. Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

1) [10, 19] 2) [21, 29] 3) [31, 39] 4) [9, 41]

Решение. Преобразуем исходное выражение к виду

$\neg A \lor (P \equiv Q) = \neg A \lor (P \land Q \lor \neg P \land \neg Q)$.

Попробуем найти такой отрезок A, чтобы он целиком лежал в пересечении $P \land Q$, то есть в отрезке [20, 30]. Отрезок [21, 29] подходит, то есть вариант 2).

Системы логических уравнений

Будем придерживаться следующих обозначений: дизъюнкция (+), конъюнкция (·), исключающее ИЛИ (⊕), импликация (→), эквивалентность (≡), отрицание (¬). На рисунках темный кружок обозначает 1, а светлый кружок – 0. F_1 – количество решений при X_1, равном 1. F_0 – количество решений при X_1, равном 0. N – число переменных в системе уравнений. $F(N) = F_1(N) + F_0(N)$ – общее число решений.

Задание 1. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], тест № 2)

$X_1+X_2\cdot X_3=1$¶$X_2+X_3\cdot X_4=1$¶.....¶$X_7+X_8\cdot X_9=1$

Вначале полагаем $X_1 = 1$. Тогда для первого уравнения значения X_2 и X_3 могут быть любыми. Таким образом, дерево построено до третьего уровня. Далее с учетом X_2 и X_3 выбираем X_4. После этого алгоритм повторяется для каждой тройки переменных (см. рис. 1). Начиная с четвертого уровня можно заметить, что $F_1(4)=F_1(3)+F_1(1)$, $F_1(5)=F_1(4)+F_1(2)$. Таким образом, получаем

$$F_1(N) = F_1(N-1) + F_1(N-3) \qquad (1)$$

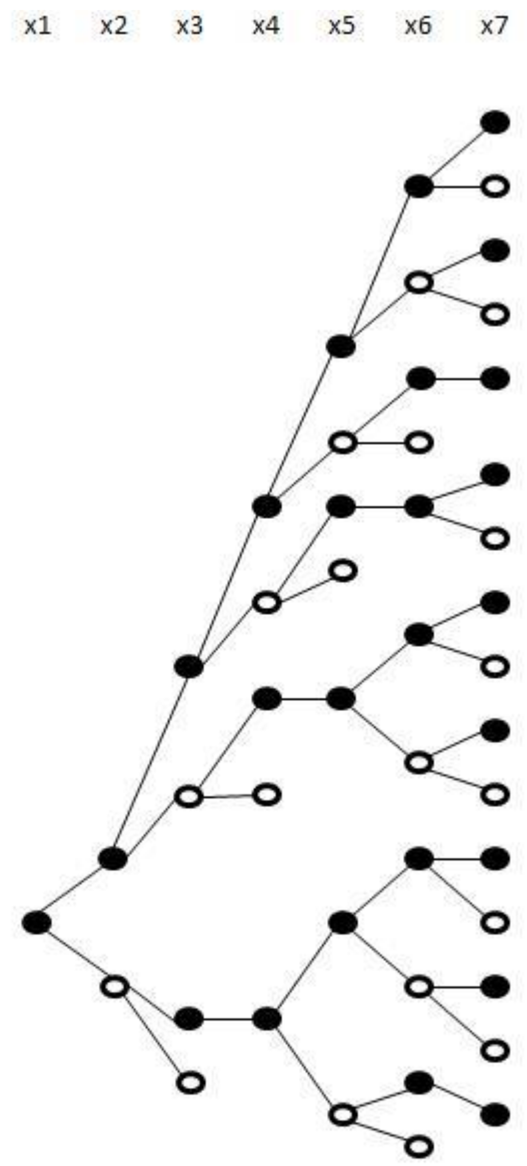


Рис. 1. Задание 1

Из уравнения (1) получаем, что
$F_1(8) = 16 + 7 = 23$,
$F_1(9) = 23 + 11 = 34$.

Для того чтобы построить дерево из нуля, можно воспользоваться нижней ветвью из Рис. 1. Легко видеть, что она повторяет основное дерево, но со сдвигом вправо на 2. То есть $F_0(9) = F_1(7) = 16$.

Итого, $F(9) = F_1(9) + F_0(9) = 34 + 16 = 50$.

Задание 2. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], 4.16)
$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$

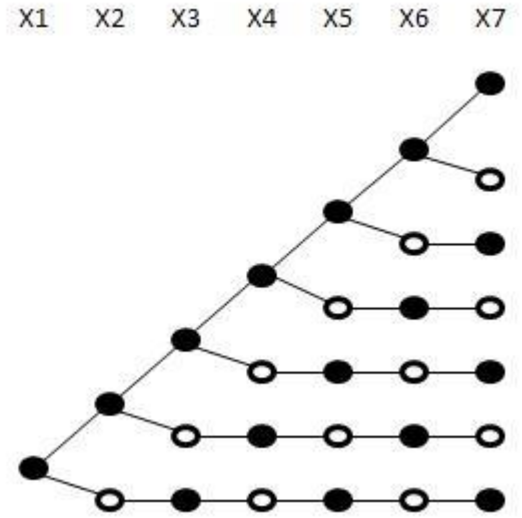


Рис. 2. Задание 2

Для получения числа решений задания 2 можно было не строить дерево решений полностью (см. рис. 2), так как очевидно, что $F_1(N) = N$. Аналогично, $F_0(N) = N$.

Итого $F(7) = 7 + 7 = 14$.

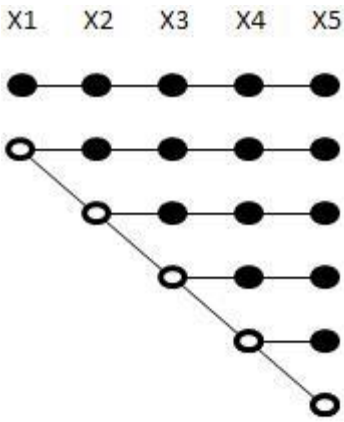
Задание 3. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], тест № 1)

$(X_1 \to X_2) \cdot (X_2 \to X_3) \cdot (X_3 \to X_4) \cdot (X_4 \to X_5) = 1$

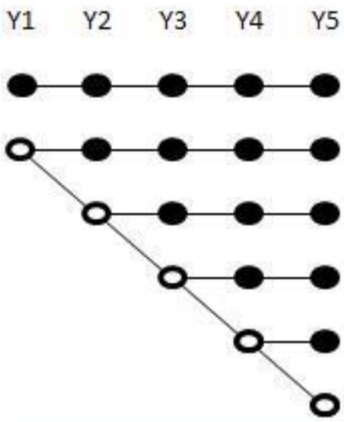
$(Y_1 \to Y_2) \cdot (Y_2 \to Y_3) \cdot (Y_3 \to Y_4) \cdot (Y_4 \to Y_5) = 1$

$(Y_1 \to X_1) \cdot (Y_2 \to X_2) \cdot (Y_3 \to X_3) \cdot (Y_4 \to X_4) \cdot (Y_5 \to X_5) = 1$

На рисунке 3 показаны деревья решений для X и Y и приведены соответствующие таблицы истинности.



X1	X2	X3	X4	X5
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0



Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Рис. 3. Задание 3

Из первых двух уравнений, поскольку X и Y независимы, следует, что общее число решений F(5) = 6 * 6 = 36. Для того чтобы учесть третье уравнение, нужно для каждой переменной Y подсчитать какое число наборов из таблицы X не удовлетворяет уравнению. Импликация $Y_i \to X_i = 0$, если $Y_i = 1$, а $X_i = 0$. То есть для $Y_1 = 1$ третьему уравнению не удовлетворяют все строки из таблицы X, где $X_1 = 0$. Число таких строк равно пяти. Для $Y_2 = 1$ таких строк – 4 и т.д. Общее число строк, которые не удовлетворяют третьему уравнению равно 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.

Таким образом, общее число допустимых решений равно 36 – 15 = 21.

Задание 4. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], 4.17.а)

$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$

$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$

$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$

$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$

$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$

$(X_6 \equiv X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$

$(X_5 \equiv X_6) = 0$

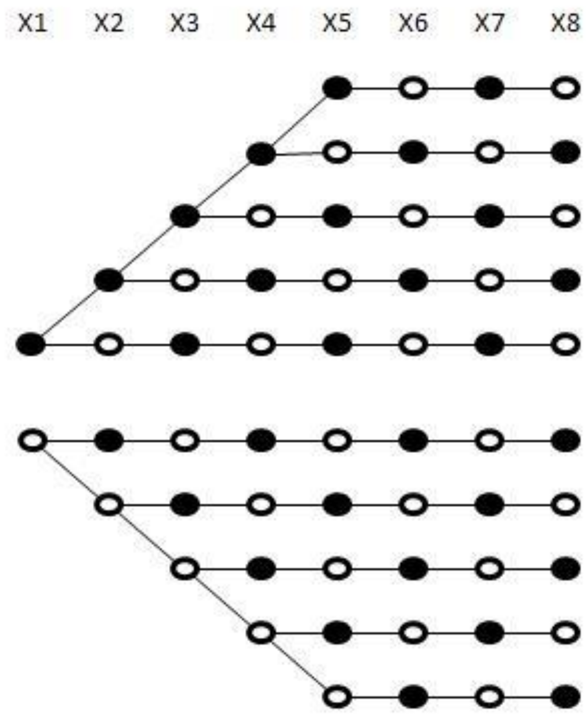


Рис. 4. Задание 4

Для данного примера сложно определить конечную формулу F(N), проще построить дерево решений до конца (или хотя бы до X6). На рисунке 4 показано построенное дерево решений. В результате получаем $F(8) = F_1(8) + F_0(8) = 5 + 5 = 10$.

Задание 5. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], 4.17.б)

$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \equiv X_8) = 1$

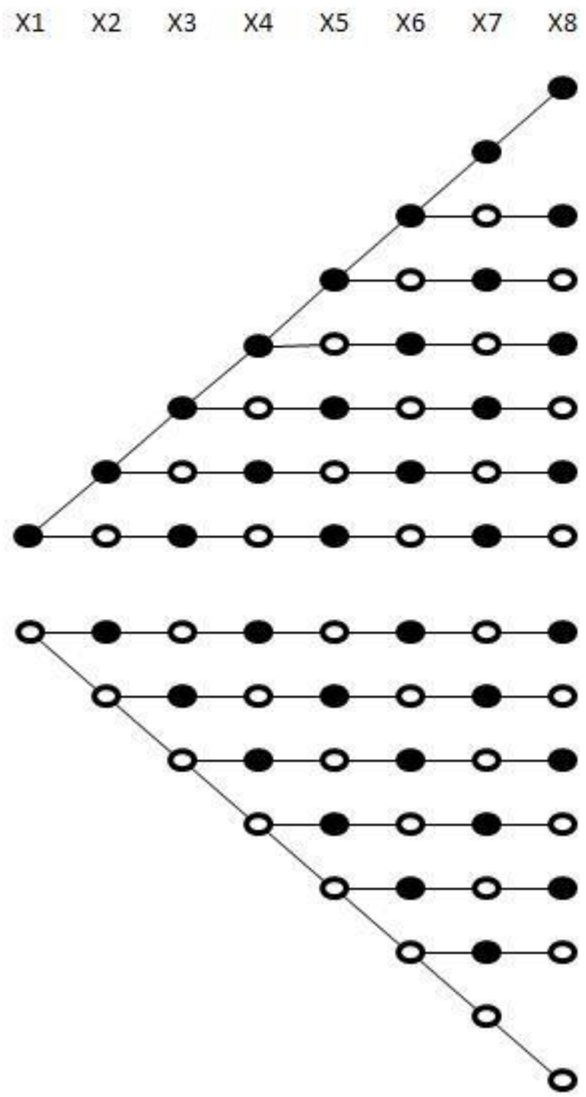


Рис. 5. Задание 5

Для этого примера, так же как и для предыдущего, проще построить дерево решений до конца (рис. 5).

В результате получаем $F(8) = F_1(8) + F_0(8) = 7 + 7 = 14$.

Задание 6. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], 4.17.в)

$(X_1 \oplus X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$

$(X_2 \oplus X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$

$(X_3 \oplus X_4) + (X_4 \equiv X_5) = 1$

$(X_4 \oplus X_5) + (X_5 \equiv X_6) = 1$

$(X_5 \oplus X_6) + (X_6 \equiv X_7) = 1$

$(X_6 \oplus X_7) + (X_7 \equiv X_8) = 1$

Дерево решений показано на рисунке 6.

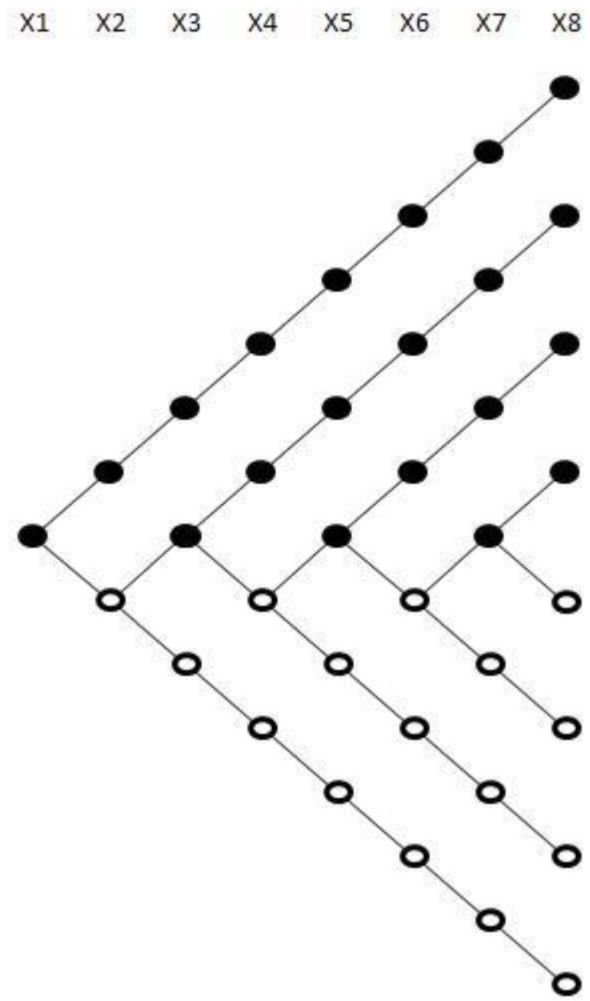


Рис. 6. Задание 6

Для данной системы уравнений можно было не строить полное дерево решений, так как уже с третьего – четвертого шага понятно, что $F_1(N) = N$. Легко видеть, что $F_0(N)$ можно получить из дерева, начинающегося на втором уровне из нуля. Тогда $F_0(N) = N$.

Итого, $F(8) = F_1(8) + F_0(8) = 8 + 8 = 16$.

Задание 7. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], 4.17.г)

$(X_1 \oplus X_2) + (X_1 \oplus X_3) = 1$

$(X_2 \oplus X_3) + (X_2 \oplus X_4) = 1$

$(X_3 \oplus X_4) + (X_3 \oplus X_5) = 1$

$(X_4 \oplus X_5) + (X_4 \oplus X_6) = 1$

$(X_5 \oplus X_6) + (X_5 \oplus X_7) = 1$

$(X_6 \oplus X_7) + (X_6 \oplus X_8) = 1$

Заметим, что если $X_1 = X_2 = 1$, то первое уравнение выполняется при $X_3 = 0$. Построим сначала дерево для $X_1 = X_2 = 1$ (рис. 7).

Тогда число решений $F_1(N) = F_{11}(N) + F_{10}(N)$.

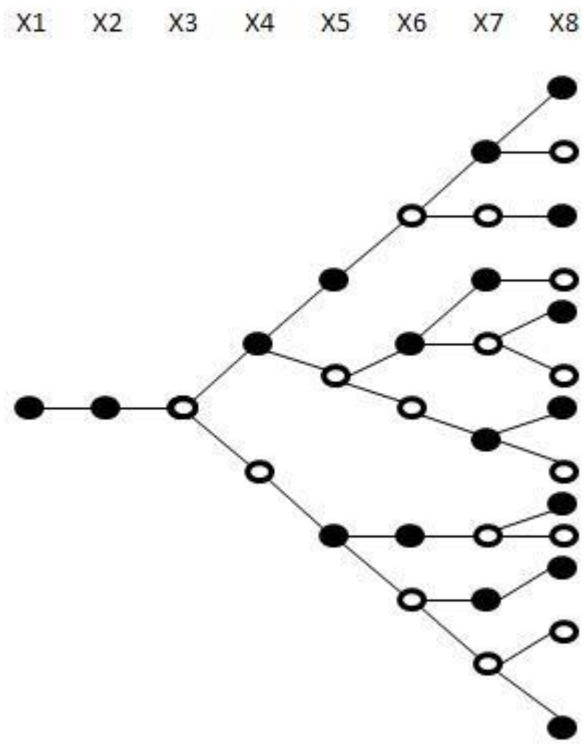


Рис. 7. Задание 7

Из рисунка 7 видно, что число решений $F_{11}(N) = F_{11}(N-1) + F_{11}(N-2)$. То есть число решений описывается числами Фибоначчи. Вторую ветку дерева для F_{10} можно не строить, так как она получается из рисунка 1, начиная со второго уровня.

Тогда $F_{10}(N) = F_{11}(N+1)$.

Окончательно получаем, что $F_{11}(8) = 13$ и $F_{10}(8) = F_{11}(9) = 13 + 8 = 21$.

Тогда $F_1(8) = F_{11}(8) + F_{10}(8) = 13 + 21 = 34$.

Для того чтобы получить $F_0(N)$, также необязательно строить дерево решений, так как оно получается из рисунка 1, начиная с третьего уровня.

Тогда $F_0(N) = F_{11}(N+2)$. Отсюда получаем, что $F_0(8) = F_{11}(10) = F_{11}(9) + F_{11}(8) = 21 + 13 = 34$.

Таким образом, общее число решений $F(8)= F_1(8) + F_0(8) = 34 + 34 = 68$.

Задание 8. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], Задание 2)

$(X_1 + X_2) \to (X_3 + X_4) = 1$

$(X_3 + X_4) \to (X_5 + X_6) = 1$

$(X_5 + X_6) \to (X_7 + X_8) = 1$

$(X_7 + X_8) \to (X_9 + X_{10}) = 1$

Сделаем подстановку $(X_1 + X_2) = Y_1$ и т.д. Получим систему уравнений

$Y_1 \to Y_2 = 1$

$Y_2 \to Y_3 = 1$

$Y_3 \to Y_4 = 1$

$Y_4 \to Y_5 = 1$

Дерево решений и таблица истинности для этой системы в точности совпадают с деревом и таблицей, изображенным на рисунке 3. С учетом подстановки отметим, что выражение $(X_1 + X_2)$ равно единице в трех случаях (за исключением варианта, когда обе переменные равны нулю).

Поскольку переменные Y независимы, то для первой строки таблицы истинности, показанной на рисунке 3, число различных комбинаций равно 3^5, для второй строки – 3^4 и т.д. Общее число различных комбинаций равно $3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0 = 364$.

Задание 9. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Задание 4)
$(X_1 \rightarrow X_2) \cdot (\neg X_1 \rightarrow X_3) \cdot (X_1 \rightarrow X_4) \cdot (\neg X_1 \rightarrow X_5) = 1$
$(\neg Y_1 \rightarrow Y_2) \cdot (Y_1 \rightarrow Y_3) \cdot (\neg Y_1 \rightarrow Y_4) \cdot (Y_1 \rightarrow Y_5) = 1$
$(\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = 1$
Для X и Y имеем следующие деревья решений

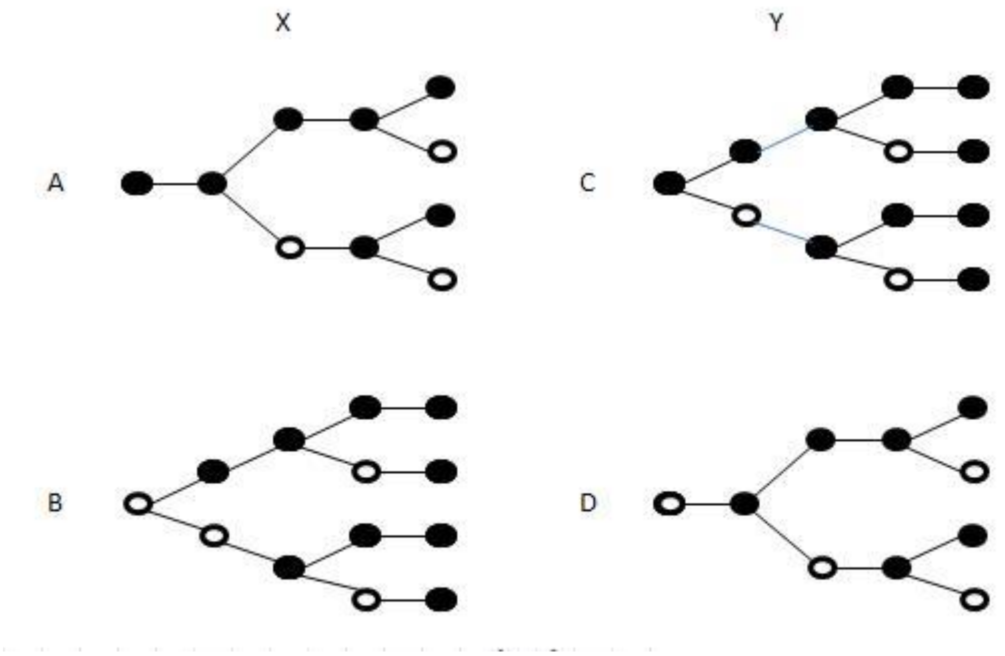


Рис. 8. Задание 8

С учетом третьего уравнения получаем следующие четыре набора комбинаций:
A – C: 4 * 4 = 16 ($(\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = (0 + 1) \cdot (0 + 1) = 1$)
B – C: 4 * 4 = 16 ($(\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1$)
A – D: = 0 ($(0 + 0) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = 0$)
B – D: 4 * 4 = 16 ($(1 + 0) \cdot (1 + Y_5) = 1$)
Всего получается 48 наборов решений.

Задание 10. Нужно найти количество решений системы уравнений [4]
$((X_1 \equiv X_2) + (X_3 \equiv X_4)) \cdot (\neg(X_1 \equiv X_2) + \neg(X_3 \equiv X_4)) =1$
$((X_3 \equiv X_4) + (X_5 \equiv X_6)) \cdot (\neg(X_3 \equiv X_4) + \neg(X_5 \equiv X_6)) =1$
$((X_5 \equiv X_6) + (X_7 \equiv X_8)) \cdot (\neg(X_5 \equiv X_6) + \neg(X_7 \equiv X_8)) =1$
$((X_7 \equiv X_8) + (X_9 \equiv X_{10})) \cdot (\neg(X_7 \equiv X_8) + \neg(X_9 \equiv X_{10})) =1$
Проведем замену:
$(X_1 \equiv X_2) = Y_1$
$(X_3 \equiv X_4) = Y_2$
$(X_5 \equiv X_6) = Y_3$
$(X_7 \equiv X_8) = Y_4$
$(X_9 \equiv X_{10}) = Y_5$
Перепишем систему уравнений с учетом замены:
$(Y_1+Y_2) \cdot (\neg Y_1 + \neg Y_2) = 1$
$(Y_2+Y_3) \cdot (\neg Y_2 + \neg Y_3) = 1$
$(Y_3+Y_4) \cdot (\neg Y_3 + \neg Y_4) = 1$

$(Y_4+Y_5) \cdot (\neg Y_4 + \neg Y_5) = 1$
На рисунке 9 показано дерево решений

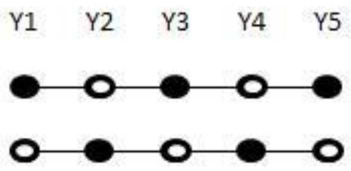


Рис. 9. Задание 10

¶С учетом подстановки отметим, что выражение ($X_1 \equiv X_2$) равно единице (или нулю) в двух случаях (когда значения переменных совпадают). С учетом независимости переменных для каждого дерева получаем, что число наборов решений равно $2^5 = 32$. Общее число наборов решений равно 64.

Задание 11. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], Пример 2)
$\neg X_1 + X_2 = 1$
$\neg X_2 + X_3 = 1$
. . . . .
$\neg X_9 + X_{10} = 1$

На рисунке 10 показано дерево решений. Мы ограничились четырьмя уровнями вместо десяти, так как очевидно, что $F_1(N) = 1$ и $F_0(N) = N$. Тогда $F(N) = F_1(N) + F_0(N) = 1 + N$. В нашем случае $F(10) = 1 + 10 = 11$.

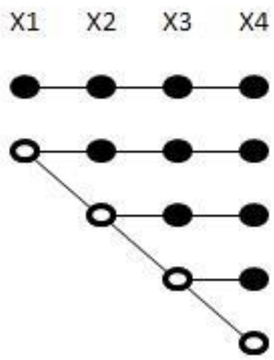
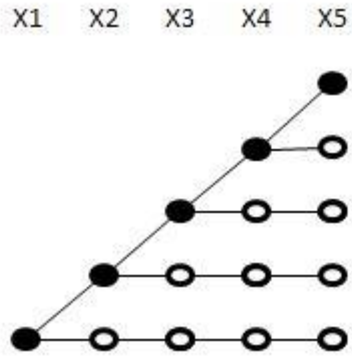


Рис. 10. Задание 11

Задание 12. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Пример 3)
$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$
$(X_1 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$
$(X_1 \equiv X_4) + (X_4 \equiv X_5) = 1$
$(X_1 \equiv X_5) + (X_5 \equiv X_6) = 1$
$(X_1 \equiv X_6) + (X_6 \equiv X_7) = 1$
$(X_1 \equiv X_7) + (X_7 \equiv X_8) = 1$
$(X_1 \equiv X_8) + (X_8 \equiv X_9) = 1$
$(X_1 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_1 \equiv X_{10}) = 0$



¶Рис. 11. Задание 12

Построив дерево решений из «1» (ограничимся пятью уровнями), можно заметить, что $F_1(N) = N$. Причем, значения X_N состоят из N-1 значений «0» и одного значения «1». Однако последнее уравнение в нашей системе запрещает значение «1» для X_{10}. Поэтому число решений $F_1(10) = 10 - 1$. Нетрудно заметить, что дерево решений из «0» будет симметричным (вместо нулей будут единицы). Поэтому $F_0 = 10 - 1$.

Окончательно $F(N) = 2 * 9 = 18$.

Задание 13. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Пример 4)

$\neg (X_1 \equiv X_2) + (X_3 \equiv X_4) = 1$
$\neg (X_3 \equiv X_4) + (X_5 \equiv X_6) = 1$
$\neg (X_5 \equiv X_6) + (X_7 \equiv X_8) = 1$
$\neg (X_7 \equiv X_8) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$

Проведем замену:

$(X_1 \equiv X_2) = Y_1$
$(X_3 \equiv X_4) = Y_2$
$(X_5 \equiv X_6) = Y_3$
$(X_7 \equiv X_8) = Y_4$
$(X_9 \equiv X_{10}) = Y_5$

Перепишем систему уравнений с учетом замены:

$\neg Y_1 + Y_2 = 1$
$\neg Y_2 + Y_3 = 1$
$\neg Y_3 + Y_4 = 1$
$\neg Y_4 + Y_5 = 1$

Из задания 11 видно, что $F(5) = 5 + 1 = 6$. Таблица истинности представлена на рисунке 12.

Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Рис. 12. Задание 13

С учетом подстановки отметим, что выражение ($X_1 \equiv X_2$) равно единице (или нулю) в двух случаях (когда значения переменных совпадают). С учетом независимости переменных для каждой строки таблицы получаем, что число наборов решений равно $2^5 = 32$. Общее число наборов решений равно 6 * 32 = 192.

Задание 14. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Задание 1)

$((X_1 \equiv X_2) \cdot (X_3 \equiv X_4)) + (\neg(X_1 \equiv X_2) \cdot \neg(X_3 \equiv X_4)) = 0$

$((X_3 \equiv X_4) \cdot (X_5 \equiv X_6)) + (\neg(X_3 \equiv X_4) \cdot \neg(X_5 \equiv X_6)) = 0$

$((X_5 \equiv X_6) \cdot (X_7 \equiv X_8)) + (\neg(X_5 \equiv X_6) \cdot \neg(X_7 \equiv X_8)) = 0$

$((X_7 \equiv X_8) \cdot (X_9 \equiv X_{10})) + (\neg(X_7 \equiv X_8) \cdot \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 0$

Проведем замену:

$(X_1 \equiv X_2) = Y_1$

$(X_3 \equiv X_4) = Y_2$

$(X_5 \equiv X_6) = Y_3$

$(X_7 \equiv X_8) = Y_4$

$(X_9 \equiv X_{10}) = Y_5$

Перепишем систему уравнений с учетом замены:

$(Y_1 \cdot Y_2) + (\neg Y_1 \cdot \neg Y_2) = 0$

$(Y_2 \cdot Y_3) + (\neg Y_2 \cdot \neg Y_3) = 0$

$(Y_3 \cdot Y_4) + (\neg Y_3 \cdot \neg Y_4) = 0$

$(Y_4 \cdot Y_5) + (\neg Y_4 \cdot \neg Y_5) = 0$

$(Y_1 \equiv Y_2) = 0$

$(Y_2 \equiv Y_3) = 0$

$(Y_3 \equiv Y_4) = 0$

$(Y_4 \equiv Y_5) = 0$

На рисунке 13 показано дерево решений

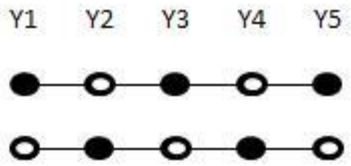


Рис. 13. Задание 14

С учетом подстановки отметим, что выражение ($X_1 \equiv X_2$) равно единице (или нулю) в двух случаях (когда значения переменных совпадают). С учетом независимости переменных для каждого дерева получаем, что число наборов решений равно $2^5 = 32$. Общее число наборов решений равно 64.

Задание 15. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Задание 2)

$(X_1 \cdot X_2) + (\neg X_1 \cdot \neg X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$

$(X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$

$(X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$

$(X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$

$(X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$

$(X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$

$(X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) + (X_7 \equiv X_9) = 1$

$(X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$

Заметим, что систему уравнений можно переписать в виде

$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$

$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$

$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \equiv X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$
$(X_7 \equiv X_8) + (X_7 \equiv X_9) = 1$
$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$

Но эта система повторяет систему из задания 5, только без условия ограничения и для N = 10. Тогда число решений равно $F(N) = F_1(N) + F_0(N) = N + N$. При N = 10 получаем F(N)= 20.

Задание 16. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Задание 3)
$(X_1 \cdot X_2) + (\neg X_1 \cdot \neg X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$
$(X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) + (X_7 \equiv X_9) = 1$
$(X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 0$

Эту систему уравнений, как и в предыдущем задании, можно переписать в виде
$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \equiv X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$
$(X_7 \equiv X_8) + (X_7 \equiv X_9) = 1$
$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 0$

Из последнего уравнения легко проверить, что после N = 8 число решений перестает возрастать. Тогда F(10) = F(8) = 8 + 8 = 16.

Задание 17. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Задание 4)
$(X_1 \cdot X_2) + (\neg X_1 \cdot \neg X_2) + (X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) = 1$
$(X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) + (X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) = 1$
$(X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) + (X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) = 1$
$(X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) + (X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) = 1$
$(X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) + (X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) = 1$
$(X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) + (X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) = 1$
$(X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) + (X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) = 1$
$(X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) + (X_9 \cdot X_{10}) + (\neg X_9 \cdot \neg X_{10}) = 1$

Заметим, что систему уравнений можно переписать в виде
$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_4 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_5 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_6 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \equiv X_7) + (X_7 \equiv X_8) = 1$
$(X_7 \equiv X_8) + (X_8 \equiv X_9) = 1$
$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$

На рисунке 14 дерево построено до пятого уровня.

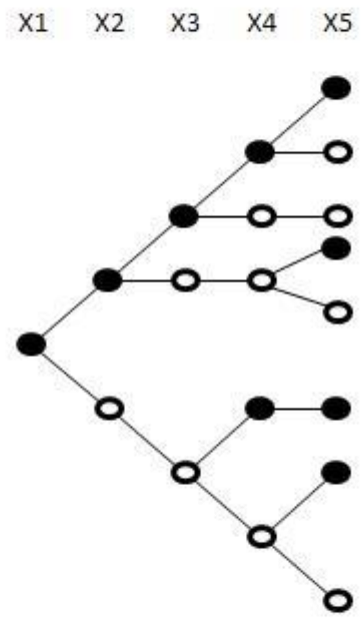


Рис. 14. Задание 17

Из рисунка 14 видно, что число решений описывается числами Фибоначчи, то есть $F_1(N) = F_1(N-1) + F_1(N-2)$. Тогда $F_1(10) = 89$. Легко проверить, что для $F_0(N)$ дерево будет симметрично. Поэтому $F_0(10) = 89$. $F(10) = F_1(10) + F_0(10) = 89 + 89 = 178$.

Задание 18. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Задание 5)

$(X_1 \cdot X_2) + (\neg X_1 \cdot \neg X_2) + (X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) = 1$
$(X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) + (X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) = 1$
$(X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) + (X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) = 1$
$(X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) + (X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) = 1$
$(X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) + (X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) = 1$
$(X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) + (X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) = 1$
$(X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) + (X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) = 1$
$(X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) + (X_9 \cdot X_{10}) + (\neg X_9 \cdot \neg X_{10}) = 0$

Заметим, что систему уравнений можно переписать в виде

$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_4 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_5 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_6 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \equiv X_7) + (X_7 \equiv X_8) = 1$
$(X_7 \equiv X_8) + (X_8 \equiv X_9) = 1$
$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 0$

Задание 18 похоже на задание 17, однако последнее уравнение приводит к тому, что начиная с седьмого уровня число решений не увеличивается.

В результате $F(10) = F_1(10) + F_0(10) = F_1(7) + F_0(7) = 21 + 21 = 42$.

Задание 19. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Задание 6)

$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_{10}) = 1$

$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_6 \equiv X_7) + (X_6 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_7 \equiv X_8) + (X_7 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_9 \equiv X_{10}) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_1 \equiv X_{10}) = 0$

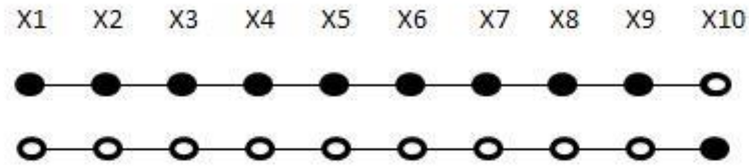


Рис. 15. Задание 19

Деревья решений для получения $F_1(N)$ и $F_0(N)$ показаны на рисунке 15. Однако уравнение $(X_9 \equiv X_{10}) = 1$ не может быть выполнено. Поэтому система уравнений не имеет решений.

Задание 20. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Задание 7)
$(X_1 \rightarrow X_2) + (X_1 \rightarrow X_3) = 1$
$(X_2 \rightarrow X_3) + (X_2 \rightarrow X_4) = 1$
$(X_3 \rightarrow X_4) + (X_3 \rightarrow X_5) = 1$
$(X_4 \rightarrow X_5) + (X_4 \rightarrow X_6) = 1$
$(X_5 \rightarrow X_6) + (X_5 \rightarrow X_7) = 1$
$(X_6 \rightarrow X_7) + (X_6 \rightarrow X_8) = 1$
$(X_7 \rightarrow X_8) + (X_7 \rightarrow X_9) = 1$
$(X_8 \rightarrow X_9) + (X_8 \rightarrow X_{10}) = 1$
На рисунке 16 показано дерево решений из «1».

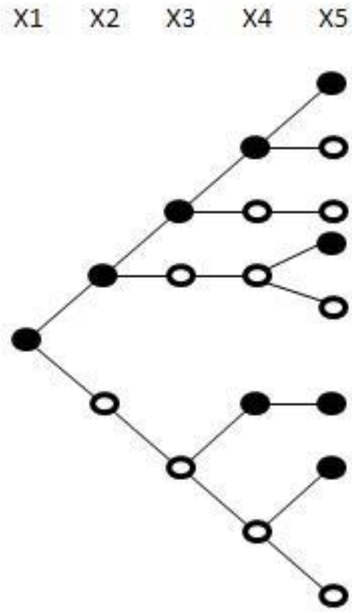


Рис. 16. Задание 20

Вместо десяти уровней мы ограничились пятью, так как задача схожа с заданием 17. Однако из «0» дерево будет выглядеть иначе (см. рис. 17).

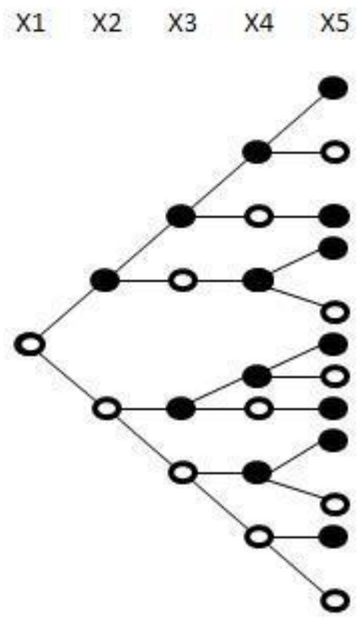


Рис. 17. Задание 20

Заметим, что $F_0(N) = F_1(N+1) – 1$.
Тогда $F_1(10) = 89$, а $F_0(10) = F_1(11) - 1 = 144 – 1$.
Итого, $F(10) = F_1(10) + F_0(10) = 89 + 143 = 232$.

Заключение

В заключение данного раздела приведем программу на бейсике VBA, с помощью которой можно решать системы логических уравнений. Программа может понадобиться при составлении новых систем уравнений. На рисунке 18 показана программа, с помощью которой решается система уравнений из задания 7.

```
Sub calc()
    Dim m(8), k, j, n As Integer
    Dim c As String

    vg = 8
    j = 0
    For i = 1 To 2 ^ vg
        For k = 1 To vg
            m(k) = 0
        Next k
        n = i - 1
        k = 1
        Do While n > 0
            m(k) = n Mod 2
            n = n \ 2
            k = k + 1
        Loop

        If (m(1) <> m(2) Or m(1) <> m(3)) And _
             (m(2) <> m(3) Or m(2) <> m(4)) And _
             (m(3) <> m(4) Or m(3) <> m(5)) And _
             (m(4) <> m(5) Or m(4) <> m(6)) And _
             (m(5) <> m(6) Or m(5) <> m(7)) And _
             (m(6) <> m(7) Or m(6) <> m(8)) Then
            c = ""
            For k = 1 To vg
                c = c + Format(m(k))
            Next k
            j = j + 1
        End If
    Next i
    MsgBox j
End Sub
```

Рис. 18. Программа для задания 7

В программе, показанной на рисунке 18, массив m и переменная c содержат значения переменных, удовлетворяющих системе уравнений из задания 7. Программа выдает ответ 68. В программе используется факт, что число различных наборов значений n логических переменных равно 2^n. Для получения всех наборов нужно выполнить цикл от 0 до 2^n-1. Переменная цикла на каждом шаге переводится в двоичную систему, результат записывается в массив m и затем уже проверяются условия из системы уравнений. Для решения другой системы уравнений достаточно поменять размерность массива m, изменить значение переменной vg (равна размерности) и поменять условия проверки.

Литература

1. Крылов С.С. ЕГЭ 2014. Информатика. Тематические тестовые задания / С.С. Крылов, Д.М.Ушаков. – М.: Издательство «Экзамен».
2. Методический сертифицированный курс фирмы «1С» «Подготовка к ЕГЭ по информатике. Модуль 1». Москва 2013
3. Сайт К.Ю. Поляков http://kpolyakov.narod.ru/download/inf-2011-14.pdf
4. http://infoegehelp.ru/index.php?Itemid=77&id=103&option=com_content&view=article
5. http:/kpolyakov.spb.ru