Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Владивостокский государственный университет»

ISBN 978-5-9736-0738-8

В.Н. Ембулаев, Л.С. Мазелис, К.Н. Галимзянова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТРАНСПОРТНО-ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Электронное
учебное пособие

Владивосток
Издательство ВВГУ
2025

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное образовательное учреждение
«Владивостокский государственный университет»

В.Н. Ембулаев, Л.С. Мазелис, К.Н. Галимзянова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТРАНСПОРТНО-ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Электронное учебное пособие

*Рекомендовано решением
учебно-методической комиссии
ФГБОУ ВО «Владивостокского
государственного университета»*

Владивосток
Издательство ВВГУ
2025

УДК 656
ББК 39
Е60

Рецензенты: *А.П. Латкин,* д-р экон. наук, профессор, профессор кафедры маркетинга и логистики ФГБОУ ВО «ВВГУ»;
В.А. Осипов, д-р экон. наук профессор, ведущий научный сотрудник Владивостокского филиала Российской таможенной академии

Ембулаев, Владимир Николаевич

Е60 **Математические методы в транспортно-логистических системах :** электронное учебное пособие // В.Н. Ембулаев, Л.С. Мазелис, К.Н. Галимзянова ; Владивостокский государственный университет; Электрон. текст. дан. (1 файл: 5,52 Мб). – Владивосток: Изд-во ВВГУ, 2025. – 1 электрон., опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel Pentium (или аналогичный процессор других производителей), 500 МГц; 512 Мб оперативной памяти; видеокарта SVGA, 1280×1024 High Color (32 bit); 5 Мб свободного дискового пространства; операц. система Windows XP и выше; Acrobat Reader, Foxit Reader либо любой другой их аналог.

ISBN 978-5-9736-0738-8

Цель пособия – научить основным математическим методам, применяемым при решении задач в транспортно-логистических системах, и познакомить с опытом, имеющимся в этой области.

Для преподавателей и студентов экономических специальностей высших учебных заведений, специалистов в области логистики.

УДК 656
ББК 39

Электронное учебное издание

Минимальные системные требования:

Компьютер: Pentium 3 и выше, 500 МГц; 15,6 Мб; 5 Мб на жестком диске; видеокарта SVGA, 1280×1024 High Color (32 bit); привод CD-ROM. Операционная система: Windows 10.

Программное обеспечение: Internet Explorer 8 и выше или другой браузер; Acrobat Reader, Foxit Reader либо любой другой их аналог.

ISBN 978-5-9736-0738-8

Редактор И.Г. Шабунина
Компьютерная верстка М.А. Портновой

690014, г. Владивосток, ул. Гоголя, 41
Тел./факс: (423)240-40-54

Объем 5,52 Мб. Усл.-печ. л. 10,04.
Подписано к использованию: 17.02.2025 г.
Уч.-изд. л. 7,26. Тираж 300 (I –25) экз.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель учебного пособия состоит в том, чтобы научить основным математическим методам, применяемым при решении задач в транспортно-логистических системах, и познакомить с опытом, имеющимся в этой области.

В настоящее время существует ряд обстоятельных руководств по данной тематике, предназначенных для студентов высших учебных заведений экономических профилей. Но всем им присущ один существенный недостаток: это книги «описательного жанра». В них, кроме названий различных методов, самых общих слов и всевозможных классификаций, таблиц и схем, ничего нельзя обнаружить. Поэтому ощущается потребность в пособии, которое на простых и конкретных примерах способно показать студенту с незначительной математической подготовкой математические методы, применяемые при решении задач в транспортно-логистических системах.

Материал пособия разбит на разделы, в которых вначале приводится минимум теоретических сведений, а затем подробно разбираются модельные примеры. В конце каждого раздела представлены задачи для самостоятельного решения, аудиторной и домашней работы; внизу каждой задачи помещены ответы.

В учебном пособии на простых примерах раскрываются следующие темы: «Логистика. Транспортно-логистические системы. Основные понятия и определения», «Перевозка. Способ перевозки. Выбор способа перевозки», «Математические методы и модели в логистике», «Основные понятия теории графов», «Поиск оптимального решения методом сетевого планирования и управления», «Поиск оптимального решения методом Жордана – Гаусса», «Графический метод поиска оптимального решения», «Поиск оптимального решения симплекс-методом», «Транспортная задача и методы её решения».

1. ЛОГИСТИКА. ТРАНСПОРТНО-ЛОГИСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящее время мировое транспортное сообщество интенсивно формирует единую транспортную систему, используя пространственное расположение и ресурсный потенциал государств (региона), обеспечивая их интегральное обслуживание. Под *единством транспортной системы* понимается особое структурное построение, позволяющее с наименьшими затратами и рационально использующее преимущества каждого вида транспорта, достигать главной цели – формирование рынка транспортных услуг, полностью удовлетворяющего потребительский спрос.

В рыночных условиях важным требованием потребителей транспортных услуг является своевременная и качественная доставка груза. Выполнить данные условия представляется возможным с применением логистики, т.е. управляющего алгоритма, который с помощью различных экономико-математических методов позволяет оптимизировать работу отдельных элементов транспортного процесса и объединить эти элементы в единую транспортную систему. Недостаточное развитие логистических прогрессивных транспортно-технологических систем перевозок приводит к увеличению транспортных расходов, следовательно, к потере рынка.

Логистика – это вид деятельности, связанный с передвижением товаров, услуг и информации между экономическими субъектами. Логистика позволяет получить ответы на те вопросы, с которыми предприятие постоянно сталкивается в процессе своей деятельности.

Самый важный вопрос – это что производить самим, а что закупать. Необходимо также решить, будет ли предприятие приобретать стандартную продукцию или имеющееся на рынке сырье вместо особой продукции для потребностей конкретного заказа. При этом возникает проблема качества товаров и услуг. Высокое качество конечной продукции необходимо для поддержания и роста доли на рынке. Производство продукции «с первого раза» гораздо эффективнее по стоимости, чем внесение корректив после выяснения фактов брака. Требуются программы контроля качества для наблюдения за производственным процессом с целью внесения необходимых корректив до того, как будет выпущена бракованная продукция. В этой ситуации на помощь приходит статистический контроль качества.

При проведении закупок необходимо решить, когда закупать, сколько всего закупать и сколько закупать за одну поставку. Ответы на эти вопросы дает управление запасами. При закупке сырья существует возможность фьючерсов и хеджирования.

Любое предприятие следует неким специфическим стратегиям цен. Выбор такой стратегии требует широкого применения анализа стоимости, анализа расходов и интенсивных переговоров. Сокращение расходов возможно при использовании долгосрочной транспортной стратегии.

Отвечая на вопрос, где покупать, предприятию предстоит сделать выбор: между местными, региональными, национальными и международными источниками снабжения; между крупными и мелкими поставщиками; между одним и несколькими источниками снабжения. Для приобретения основного сырья и компонентов необходимо использование не менее двух поставщиков. Но такое дробление лишает возможности получения оптовой скидки, к тому же использование единственного источника снабжения может снизить административные расходы, связанные с закупками.

Для ответа на вопрос, как покупать, существует множество вариантов. Это переговоры, тендеры, системы открытых заказов, системные контракты, совместные закупки, долгосрочные контракты. Обычно на выбор той или иной стратегии снабжения влияют общие организационные цели и стратегии предприятия, а также рыночные условия как в настоящем, так и будущем.

Логистика отвечает за прохождение материального потока (т.е. товаров и услуг) через цепь поставок – ряд видов деятельности и предприятий, через которые проходят материалы во время своего перемещения от поставщиков начального уровня до конечного потребителя.

Другими словами, логистика – это управление цепью поставок, которое обеспечивает обслуживание высокого качества с низкими затратами. Сюда входят: более быстрая доставка грузов, низкие затраты, небольшие отходы, оперативное реагирование на запросы потребителей, высокая продуктивность, низкий уровень запасов, отсутствие повреждений, небольшое число ошибок, хорошее отношение персонала к работе и т.д.

Без логистики материалы не перемещаются, операции не выполняются, продукты не доставляются и потребители не обслуживаются. Логистика оказывает значительное влияние на время выполнения заказов, надежность и другие параметры обслуживания потребителей. Она определяет оптимальные размеры элементов инфраструктуры и места их размещения.

Логистика состоит из ряда взаимосвязанных видов деятельности, которые начинаются со снабжения в начале выполнения операций и заканчиваются физическим распределением продукции. Это одна из областей, которую удобно передавать для выполнения посредникам – специализированным предприятиям, предлагающим ассортимент требуемых услуг.

Выделяют три направления развития логистики. Для первого направления – «тощей» логистики – характерны анализ операций и системное удаление всех действий, перемещений, времени, материальных и других ресурсов, приводящих к возникновению отходов. Это позволяет существенно повысить показатели деятельности предприятия.

Второе направление – динамичная логистика, уделяющая основное внимание потребителям. Она предоставляет услуги на заказ и оперативно реагирует на изменяющиеся требования потребителей.

Интеграция цепей поставок – третье направление развития логистики. Для достижения своих целей предприятия должны тесно сотрудничать с другими участниками цепи поставок.

В идеале логистика должна стремиться к тому, чтобы одновременно иметь три вышеназванные характеристики: отсутствие «жира», динамизм и интегрированность.

Общие логистические издержки содержат затраты на: перевозку, складирование, управление запасами, упаковывание, обработку информации и другие накладные расходы логистического характера. При системном подходе к логистике, когда все взаимосвязанные логистические виды деятельности выполняются согласованно, сокращение затрат на один вид деятельности ведет к снижению общих логистических издержек, хотя затраты на другой вид деятельности могут и увеличиться.

Логистика должна постоянно совершенствоваться, т.е. необходим постоянный поиск более совершенных способов логистической деятельности. В прошлом логистике не уделяли достаточного внимания. Сегодня же логистика находится в центре процесса принятия решения, оказывая долгосрочное влияние на все операции и общие показатели.

Каждое предприятие разрабатывает свою собственную логистическую стратегию, которая состоит из всех стратегических решений и планов, связанных с управлением цепью поставок. Существуют две базовые логистические стратегии: «тощая» и динамичная.

Цель *«тощей» логистики* – минимизировать общие логистические издержки, гарантируя при этом приемлемый уровень обслуживания потребителей (т.е. производство той же или сопоставимой продукции более дешево).

Цель *динамичной стратегии* – обеспечить высокое качество обслуживания потребителей, оперативно реагируя на появление новых или изменение прежних условий (т.е. выпуск продукции, которую потребители не могут получить у других поставщиков). Динамичная стратегия сфокусирована на потребителях.

Конечно, на практике нет никакой разграничительной линии между «тощей» и динамичной стратегиями. Поэтому предприятию вовсе не нужно выбирать какую-то одну из этих стратегий в ущерб другой. Никакой единой лучшей стратегии просто не существует.

Логистическая стратегия должна соответствовать целям предприятия. При ее разработке следует учесть факторы, влияющие на логистику, но которыми она не может управлять. Это потребители, рыночные условия, экономические условия (темпы инфляции, темпы роста, объем валового внутреннего продукта), конкуренты, правовые ограничения, акционеры (доход на инвестиции), социальные и политические условия.

При разработке логистической стратегии также нужно учесть факторы, которыми предприятие может управлять. Это сотрудники, финансы, сооружения, маркетинг, поставщики, технологии.

Стратегии только тогда становятся эффективными, когда они реализованы. Поэтому всегда необходимо рассматривать практические следствия любых выбираемых приемов. При переходе к реализации логистической стратегии следует сконцентрировать усилия на четырех областях: обслуживании потребителей, размещении элементов инфраструктуры, управлении запасами и транспорте.

Предприятие должно решить, с какими типами посредников оно будет иметь дело (т.е. кто будет поставщиками и потребителями в цепи поставок), где должны располагаться склады, какая работа будет выполняться в логистических центрах, какие потребители будут обслуживаться из каждого центра, виды транспорта, скорость доставки, какова *ширина цепи поставок* (т.е. число параллельных маршрутов, по которым может перемещаться продукция) и т.д.

Удлинение и расширение цепи поставок приводят к повышению качества обслуживания, но сопровождаются ростом затрат и снижением контроля со стороны производителя. К сожалению, не существует лучшего варианта, и приходится выбирать компромиссный вариант, в наибольшей степени соответствующий заданным целям логистической стратегии.

Из-за постоянного изменения внешних и внутренних факторов в логистическую стратегию приходится постоянно вносить коррективы. Крупные изменения могут оказаться для предприятия очень разрушительными. Поэтому на практике гораздо чаще встречается непрерывное совершенствование (т.е. серия небольших корректив). Такой подход гарантирует совершенствование логистической системы.

Однако в случае плохой логистической системы не следует тратить время на отыскание небольших улучшений; необходимо отбросить всю прежнюю систему и разработать новую. Вполне возможно реализовать ряд крупных изменений в виде более мелких, но постоянно проводимых улучшений.

Для логистика главный вопрос заключается в том, как заставить потоки продуктов течь быстрее. Поэтому логистик изучает издержки предприятия, начиная с исходных составляющих и заканчивая моментом, когда потребитель получает товар. Сокращение времени на каждом этапе ведет к снижению издержек и цены продукта.

Цель логистики – обеспечить наличие нужного продукта в нужном месте в нужное время при наименьших издержках. Это достигается сокращением времени выполнения заказа, времени производства, времени транспортировки, контролем над запасами, повышением качества продукции и т.д.

Растущее внимание к экологическим вопросам удаления отходов и масштаб операций, связанных с потенциальным возвратом продукта, привели к созданию обратной логистики. Обратная логистика занимается сбором возвращаемых продуктов, их проверкой, ремонтом, модернизацией и переработкой. После этого продукты могут быть отправлены потребителю или на продажу на вторичном рынке.

2. ПЕРЕВОЗКА. СПОСОБ ПЕРЕВОЗКИ. ВЫБОР СПОСОБА ПЕРЕВОЗКИ

Перевозка – это физическое перемещение материалов между участками цепи поставок. Перевозка является одним из основных компонентов логистики.

Цена перемещения единицы продукции между двумя точками определяется *тарифом,* который устанавливается на основе затрат на предоставляемые услуги, получаемой потребителем ценности, расстояния перемещения, сложности поездки, а также веса, размеров и стоимости груза. Эти тарифы оказывают влияние на логистику и могут изменить весь тип перемещения грузов. Например, при относительно дешевом транспорте предприятие охватывает более широкую территорию, действуя из одного места.

Те, кто пользуется услугами транспортных предприятий, имеют мало возможностей влиять на тарифы перевозок, но зато очень часто имеют возможность выбрать способ перевозки.

Способ перевозки задает тип используемых транспортных средств. Существуют пять основных типов транспортных средств: железная дорога, автомобильный транспорт, водный транспорт, воздушный транспорт и трубопроводный транспорт. Выбор типа используемых транспортных средств в конкретных обстоятельствах зависит от вида перевозимого груза, пунктов отправки и назначения, стоимости груза и ряда других факторов.

Железная дорога. Железнодорожный транспорт обычно выбирают для перевозки тяжелых и крупных грузов на большие расстояния. Поезда могут передвигаться с постоянной и достаточно высокой скоростью. Одно из преимуществ железной дороги заключается в том, что после создания инфраструктуры дорога имеет очень высокую мощность и низкие затраты на перемещение единицы груза. На железнодорожный транспорт в меньшей степени влияют погодные условия, чем на другие виды транспорта. При использовании контейнеров или закрытых вагонов достигается относительно высокая степень безопасности грузов.

Один из основных недостатков железной дороги – ее негибкость. Все перевозки должны осуществляться по заранее составленному расписанию, так как для них используются одни и те же транспортные пути, да и поезда могут перемещаться только по определенным маршрутам и между станциями, не останавливаясь в промежуточных точках.

Большой уклон железнодорожного полотна может вызвать проблемы для тяжелых составов.

Автомобильный транспорт. Наиболее распространен автомобильный транспорт; он участвует практически во всех цепях поставок. Основное преимущество автомобильного транспорта – гибкость, так как он способен оказывать услуги «от двери до двери».

Автомобильный транспорт может использовать развитую инфраструктуру уже созданных дорог. Автомобилям не требуется строгой привязки к заранее составленному расписанию, поэтому они могут отправляться в поездку по необходимости. Для автомобильного транспорта характерно наличие множества перевозчиков, работающих на одних и тех же территориях.

Использование автомобильного транспорта не предъявляет строгих требований к упаковке груза и обеспечивает высокую безопасность груза. Но низкие мощности автомобильного транспорта по сравнению с железной дорогой и баржами, а также экологические издержки (загрязнение воздуха, шум, вибрации, повреждение дорог и т.д.) сказываются на его использовании.

Введение во многих странах ограничений по весу и габаритам грузов приводит к тому, что автомобильный транспорт чаще применяется для перевозки относительно небольших и легких грузов. Из-за удорожания перевозки грузовики обычно применяются для перевозок на более короткие расстояния. Частые дорожные пробки становятся причиной задержки доставки продукции.

Водный транспорт. Из-за того, что большинство цепей поставок предусматривают отправку грузов через моря и океаны, свыше 90 % мировой торговли связано с перевозками продукции водным транспортом. Различают три основных типа водного транспорта:

– *речной* (используется на реках и каналах);

– *каботажный* (для перевозки из одного порта в другой вдоль побережья);

– *морской* (по основным морям).

Морские перевозки предусматривают длительные маршруты. При этом для перевозки разных грузов используют самые разные типы судов, обеспечивающие существенную экономию на масштабах. Это позволяет добиваться низких затрат на единицу перевозимой продукции.

Использование водного транспорта ограничено наличием портов. Отсюда негибкость водного транспорта. Перевозки от поставщика к заказчику требуют смены транспортного средства, даже если и поставщик и заказчик располагаются недалеко от портов.

Другие проблемы морских перевозок – их относительно небольшая скорость, долгое время объединения грузов и перевозки грузов в порты.

Воздушный транспорт. Значительная часть воздушного транспорта занимается перевозкой пассажиров. Авиаперевозки также используют для доставки документов, посылок и тех грузов, скорость доставки которых важнее затрат.

Благодаря воздушному транспорту были созданы совершенно новые отрасли (например, экспорт тропических фруктов). Воздушный транспорт более безопасен для сохранности грузов.

Так как груз требуется доставить в аэропорт и забрать из него, то вокруг аэропортов располагаются разнообразные сооружения, предназначенные для перемещения продукции. Из-за этих трансферов общие выгоды воздушных перевозок снижаются.

Для воздушного транспорта характерны высокие постоянные затраты (самолеты очень дорого покупать) и высокие переменные затраты (оплата топлива, услуги аэропортов и т.д.).

Самолеты обслуживают далеко не все места, где ведется бизнес, а хранение грузов в аэропортах дорого обходится. Ограничения по весу и размерам перевозимых грузов, экологические факторы (большой шум, значительные выбросы газообразных веществ и т.д.) – все это не в пользу воздушного транспорта.

Трубопроводный транспорт. Трубопроводы используют для передачи нефти и газа, а также в коммунальном хозяйстве для подачи воды и отвода канализации. Их основное преимущество – это перемещение больших количеств продукции на большие расстояния.

Трубопроводные системы закрыты, могут действовать независимо от погодных условий и очень дешевы в эксплуатации.

Недостатки трубопроводного транспорта: низкая скорость перемещения (не выше 10 км/ч), негибкость (транспортировка осуществляется между фиксированными точками), огромные первоначальные инвестиции для строительства трубопроводов и перемещение только определенных типов жидкостей.

Выбор способа перевозки. Выбор способа перевозки зависит от следующих факторов:

– характеристики перевозимого груза, его весогабаритные параметры;

– стоимость продукции (в случае дорогой продукции из-за повышения затрат на запасы выбирают быстрый способ перевозки);

– расстояние перевозки;

– время в пути (недопустимо использовать для доставки важной продукции медленный способ доставки);

– надежность поставщиков (иногда она важнее времени в пути);

– затраты;

– гибкость перевозки.

Самые дешевые перевозки одновременно и наименее гибкие. Конечно, предприятие не обязано использовать один способ по всей цепи поставок. Оно может разбить весь маршрут на отдельные участки, на каждом из которых выбрать наилучший вариант перевозки.

Интермодальная перевозка. *Интермодальная перевозка* – это использование в цепи поставок нескольких способов перевозки. Ее цель – получить комбинации преимуществ нескольких способов перевозки, избегая при этом их недостатков.

Успех интермодальной перевозки зависит от того, насколько удастся минимизировать задержки между способами перевозки и затраты, связанные с дополнительной грузопереработкой. Этого можно достичь, помещая все виды продукции в стандартные контейнеры и используя оборудование для работы с такими контейнерами (например, крупные контейнерные порты и терминалы).

Использование контейнеров повышает гибкость перевозки, стандартизирует переработку грузов, уменьшает число мелких хищений. При этом возрастают расходы на покупку или аренду контейнера, а крупные хищения становятся более легкими.

Перевозка и вопросы собственности. Когда речь идет о перевозках, предприятие оказывается перед выбором. Что лучше: иметь свой собственный транспорт, воспользоваться услугами перевозчиков третьей стороны или какой-то комбинацией первых двух вариантов?

Если предприятие для перевозки своей продукции пользуется собственным подвижным составом, то говорят, что оно использует **собственный транспорт.** Собственный транспорт обеспечивает гибкость, контроль и тесную интеграцию логистических видов деятельности за счет удобных графиков доставки. Но покупка и содержание собственного транспорта достаточно дороги. Один из способов, позволяющих избежать подобных затрат, – это лизинг.

Перевозчики третьей стороны – это специализированные транспортные предприятия, предлагающие клиентам широкий ассортимент услуг. Используя свою квалификацию и накопленный опыт, транспортные предприятия могут предоставить более качественные услуги и сделать затраты ниже, чем в случае собственного транспорта. При выборе между собственным транспортом и перевозчиками третьей стороны необходимо учитывать ряд факторов:

– операционные издержки;
– капитальные затраты;
– уровень обслуживания потребителей;
– степень контроля за перевозками;
– гибкость перевозок;
– затраты на персонал.

В настоящее время наблюдается тенденция использования услуг перевозчиков третьей стороны.

Возможна комбинация собственного транспорта с услугами перевозчиков третьей стороны. Для обеспечения ключевых видов деятельности предприятие использует собственный транспорт, а при резком и неожиданном росте спроса привлекает перевозчиков третьей стороны.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ

Ускорение темпов технического прогресса на современном этапе, обеспечение дальнейшего роста производительности общественного труда приводят к необходимости кооперации различных элементов логистики для выполнения сложных комплексов работ. При этом всё труднее становится, используя старые методы планирования и управления, координировать работы различных подразделений: определять и увязывать время выполнения определённых этапов работ между собой, добиваться выполнения всего комплекса работ в намеченный срок, определять необходимые ресурсы.

Однако все задачи логистики предусматривают оптимизацию работ: если затраты, то минимальные, если прибыль, то максимальная. Поэтому решение задач логистики основано на поиске оптимальных решений с использованием математических моделей.

Рассмотрим несколько примеров описания постановки задач на оптимизацию и применение математических методов для их решения.

3.1. Получение максимальной прибыли фирмой, изготовляющей продукцию на рынок

Методологию разработки математической модели и принятие решений на её основе покажем на примере получения максимальной прибыли фирмой, которая изготавливает продукцию на рынок.

Предположим, что фирма выпускает три различных продукта P_1, P_2 и P_3. Для этого закупается сырьё двух видов X_1 и X_2. При этом объёмы продуктов P_1, P_2 и P_3, которые можно получить из сырья X_1, отличаются по объёму этих же продуктов, полученных из такого же объёма сырья X_2. Данные показатели отражены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Вид продукта	Из 1 т сырья X_1	Из 1 т сырья X_2
P_1	0,2	0,3
P_2	0,2	0,1
P_3	0,3	0,3
Отходы	0,3	0,3

Требуется определить, какое количество сырья необходимо для его рационального использования при оптимальном планировании производства трёх видов продукта. Для этого следует найти две неизвестные величины X_1 и X_2. Однако решить поставленную задачу можно только тогда, когда определим прибыль, получаемую в случае использования сырья X_1 и X_2.

Предположим, что прибыль от использования 1 т сырья X_1 равна 5 тыс. руб., а от использования 1 т сырья X_2 равна 6 тыс. руб. Однако из этого вовсе не следует, что фирма должна использовать только сырьё X_2, дающее более высокую прибыль, так как величины X_1 и X_2 зависят ещё и от ограничений на производственные возможности самой фирмы. Для простоты будем считать, что в течение единицы времени работы продукт P_1 не может выпускаться фирмой в количестве, превышающем 1,8 т, продукт P_2 – в количестве, превышающем 1,2 т, а продукт P_3 – в количестве 2,4 т.

Заметим также, что по смыслу задачи величины X_1 и X_2 должны быть неотрицательными.

Из таблицы показателей имеем:

$$P_1 = 0{,}2\ X_1 + 0{,}3\ X_2;$$

$$P_2 = 0{,}2\ X_1 + 0{,}1\ X_2;$$

$$P_3 = 0{,}3\ X_1 + 0{,}3\ X_2.$$

С условиями ограничений на производственные мощности фирмы это можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &0{,}2\ X_1 + 0{,}3\ X_2 \le 1{,}8; \\ &0{,}2\ X_1 + 0{,}1\ X_2 \le 1{,}2; \\ &0{,}3\ X_1 + 0{,}3\ X_2 \le 2{,}4. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Кроме того, выполнено условие неотрицательности X_1 и X_2:

$$X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0. \qquad (3.2)$$

Согласно постановке задачи при использовании сырья X_1 и X_2 суммарная прибыль составляет

$$F = 5\ X_1 + 6\ X_2. \qquad (3.3)$$

Следовательно, оптимальными являются такие величины X_1 и X_2, при которых суммарная прибыль F будет максимальной при выполнении ограничений (3.1) и (3.2). Таким образом, задача сводится к максимизации функции F при наличии ограничений (3.1) и (3.2). Эта задача называется задачей линейного программирования.

Упростим модель: «выкинем» два первых неравенства в ограничениях (3.1). Получим, что при $X_1 = 0$ и $X_2 = 8$ (это обосновано тем, что прибыль при использовании сырья X_2 получается больше, чем при использовании сырья X_1) $P_3 = 0{,}3\ X_1 + 0{,}3\ X_2 = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 8 = 2{,}4$. Это соответствует ограничению. Тогда прибыль при $X_1 = 0$ и $X_2 = 8$ составит $F = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 8 = 48$ тыс. руб. Но такие значения X_1 и X_2 не соответствуют неравенству для P_1 ($P_1 = 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 8 = 2{,}4$, а должно быть $\le 1{,}8$).

Однако упрощение проведём другим путём: сложим первые два неравенства в (3.1): $(0{,}2\ X_1 + 0{,}3\ X_2) + (0{,}2\ X_1 + 0{,}1\ X_2) \le (1{,}8 + 1{,}2)$. Получим следующее неравенство: $0{,}4\ X_1 + 0{,}4\ X_2 \le 3{,}0$. Далее умножим полученное неравенство на 0,75 (чтобы при X_1 и X_2 получить коэффициенты 0,3, как это имеет место в третьем неравенстве): $0{,}3\ X_1 + 0{,}3\ X_2 \leq 2{,}25$. Сравнивая это неравенство с третьим неравенством в выражении (3.1), можно отметить, что первые два неравенства дают более сильное неравенство в сравнении с третьим. Поэтому третьим неравенством в выражении (3.1) можно пренебречь. Окончательно математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
F = 5\ X_1 + 6\ X_2 \rightarrow \max; \\
0{,}2\ X_1 + 0{,}3\ X_2 \leq 1{,}8; \\
0{,}2\ X_1 + 0{,}1\ X_2 \leq 1{,}2; \\
X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0.
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

Так как данная задача линейного программирования имеет две переменные, то её можно решить графическим методом, который основан на возможности изобразить в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости допустимые решения задачи и определить, в какой из её угловых точек целевая функция достигает экстремального значения.

Область допустимых решений задачи строится как пересечение (общая часть) областей решений каждого из заданных ограничений. Областью решений линейного неравенства $0{,}2\ X_1 + 0{,}3\ X_2 \leq 1{,}8$ является одна из полуплоскостей, на которые делится вся координатная плоскость прямой $0{,}2\ X_1 + 0{,}3\ X_2 = 1{,}8$. Областью решений линейного неравенства $0{,}2\ X_1 + 0{,}1\ X_2 \leq 1{,}2$ является одна из полуплоскостей, на которые делится вся координатная плоскость прямой $0{,}2\ X_1 + 0{,}1\ X_2 = 1{,}2$. Общая часть этих полуплоскостей является областью допустимых решений данной задачи.

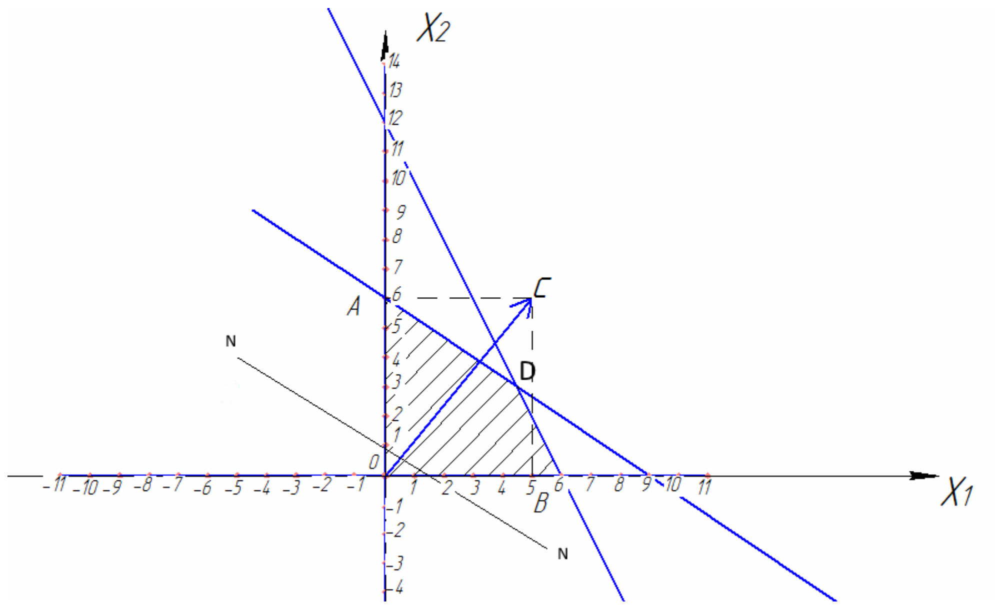


Рис. 3.1

Оптимальное решение определяется по следующему алгоритму (рис. 3.1):

1) строится область допустимых решений (на рисунке она отмечена заштрихованной областью);

2) согласно целевой функции строится вектор нормали, начало которого расположено в точке O(0;0), а конец – в точке C(5;6);

3) перпендикулярно вектору нормали проводится одна из линий уровня NN, пересекающая область допустимых решений;

4) в целях отыскания максимума линия уровня перемещается параллельно самой себе в направлении своей нормали до положения последней угловой точки в области допустимых решений (на рисунке такой точкой является точка D);

5) решая совместно уравнения прямых, пересекающихся в точке D, находим её координаты, а затем, подставляя значения координат точки в уравнение целевой функции, вычисляем максимальное значение задачи. (Совместное решение уравнений $0{,}2\ X_1 + 0{,}3\ X_2 = 1{,}8$ и $0{,}2\ X_1 + 0{,}1\ X_2 = 1{,}2$ позволяет определить координаты точки D: $X_1 = 4{,}5$ и $X_2 = 3$. Тогда $F = 5 \cdot 4{,}5 + 6 \cdot 3 = 40{,}5$. Таким образом, максимальная прибыль оценивается в 40,5 тыс. руб.)

3.2. Разработка математической модели расчёта числа поездок пассажиров между двумя остановками на маршруте по данным входа-выхода

Пусть имеется маршрут, на котором n остановок. Во время движения транспортного средства (ТС) по маршруту на каждой i-й остановке выйдут b_i и войдут a_i пассажиров. По окончании рейса получаются множества входящих (a_i, $1 \le i \le n$) и выходящих (b_j, $1 \le j \le n$) пассажиров. Поставим задачу разработать математическую модель определения поездок пассажиров между каждой парой остановок ($i;j$) на маршруте по данным входа-выхода – x_{ij}, $i \le j$.

Очевидно, что для каждого пассажира в отдельности информация о пути следования остаётся неизвестной, что позволяет считать его передвижение случайным и не зависимым от выбора путей следования другими пассажирами. Данное замечание позволяет принять следующее предположение: выбор каждым пассажиром пути передвижения (i,j) по маршруту, т.е. вход пассажира в салон ТС на i-й остановке и его выход на j-й остановке, является случайным и не зависит от выбора другими пассажирами своего пути передвижения по маршруту. Причём во время стоянки ТС на остановке маршрута для каждого пассажира в салоне событие выйти на этой остановке или поехать дальше можно считать равновероятным.

Таким образом, решение задачи определения поездок пассажиров на маршруте по данным входа-выхода требует вероятностной интерпретации.

Во время стоянки ТС на j-й остановке происходит пассажирообмен: из всех подъехавших с предыдущей остановки, которых обозначим через Q_{j-1}, вначале из салона выходит группа в количестве b_j пассажиров, а затем входит в салон группа из a_j пассажиров. При отправлении ТС от *j*-й остановки в салоне будет находиться Q_j пассажиров, число которых определяется по формуле

$$Q_j = (Q_{j-1} - b_j) + a_j = \sum_{r=1}^{j}(a_r - b_r)\,.$$

Так как во время стоянки ТС на *i*-й остановке в салон вошло a_i пассажиров, то не исключено, что некоторые из них могут выйти на (*i*+1)-й остановке, что соответствует числу пассажиров, которые совершили поездку между *i*-й и (*i*+1)-й остановками – $x_{i,i+1}$. И если это число вычесть из всех вошедших на *i*-й остановке, то получим оставшихся пассажиров, которые продолжат свои поездки дальше по маршруту. Обозначим это число через $a_{i,i+1}$, которое вычисляется следующим образом: $a_{i,i+1} = a_i - x_{i,i+1}$.

В целом, для любых *i* и *j* данная величина вычисляется по формуле

$$a_{ij} = a_i - \sum_{r=i+1}^{j-1} x_{ir},$$

причём для *j* = *i* $a_{ij} = a_i$.

Другими словами, a_{ij} – это число оставшихся пассажиров из всех вошедших на *i*-й остановке; определяется вычитанием из a_i всех тех, которые уже проехали отрезки на маршруте (*i*, *i*+1) – $x_{i,i+1}$, (*i*, *i*+2) – $x_{i,i+2}$,..., (*i*, *j*–1) – $x_{i,j-1}$.

В перевозочном процессе по маршруту, когда на *j*-й остановке стояло ТС, внутри салона находилось Q_{j-1} пассажиров, среди которых имелись и вошедшие на *i*-й остановке – a_{ij}. В результате пассажирообмена на остановке вместе с b_j могли выйти и те пассажиры, которые вошли в салон ТС на *i*-й остановке, т.е. из группы a_{ij}. В этом случае число x_{ij}, которое одновременно будет принадлежать a_{ij} и b_j, является искомой величиной.

Если таким образом определить все поездки пассажиров между двумя любыми остановками на маршруте, то их можно отобразить в виде табл. 3.2.

Таблица 3.2

Номера остановок входа	Номера остановок выхода							Вошло в ТС
	1	2	3	4	5	…	*n*	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	…	x_{1n}	a_1
2		x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	…	x_{2n}	a_2
3			x_{33}	x_{34}	x_{35}	…	x_{3n}	a_3

Окончание табл. 3.2

Номера остановок входа	Номера остановок выхода							Вошло в ТС
	1	2	3	4	5	…	*n*	
4				x_{44}	x_{45}	…	x_{4n}	a_4
5					x_{55}	…	x_{5n}	a_5
…						…		
…						…		
…						…		
n							x_{nn}	a_n
Вышло	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	…	b_n	

Примечание: n – число остановок на маршруте; a_i – число пассажиров, вошедших в ТС на i-й остановке; b_j – число пассажиров, вышедших из ТС на j-й остановке; x_{ij} – число пассажиров, совершивших поездку между i-й и j-й остановками, $i \le j$.

Из таблицы 3.2 видно, что математическая формализация постановки задачи определения x_{ij} по данным a_i и b_j заключается в следующем.

Задана система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=i}^{n} x_{ij} = a_i; \sum_{i=1}^{j} x_{ij} = b_j; x_{ij} \ge 0; 1 \le i \le n, 1 \le j \le n, \qquad (3.5)$$

причём выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ (или } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} x_{ij}\text{)}. \qquad (3.6)$$

Так как система (3.5) состоит из $2n$ уравнений с $n(n+1)/2$ неизвестными, то единственное решение возможно только при выполнении условия: $2n = n(n+1)/2$. Следовательно, единственное решение возможно при $n \le 3$, в то время как для $n > 3$ существует бесчисленное множество решений. Поэтому без дополнительного предположения относительно распределения поездок пассажиров между остановками на маршруте нельзя получить однозначного решения поставленной задачи.

С учётом вышепринятого предположения относительно поведения пассажиров при выборе пути передвижения по маршруту можно заметить, что во время стоянки ТС на j-й остановке в салоне находилось Q_{j-1} пассажиров, из которых вышло b_j человек. Так как выход любой группы пассажиров из ТС в количестве

b_j человек из всех подъехавших является равновозможным и несовместным событием, то общее число таких групп в различных комбинациях равно числу сочетаний из Q_{j-1} по b_j, т.е. $C_{Q_{j-1}}^{b_j}$.

Всех подъехавших пассажиров к *j*-й остановке (Q_{j-1}) условно можно разбить на две группы: одна группа состоит из тех пассажиров, которые вошли в салон ТС на *i*-й остановке и не вышли ранее *j*-й (a_{ij}), а вторая группа – все остальные $(Q_{j-1} - a_{ij})$. Так как на *j*-й остановке вышло b_j пассажиров, то среди них могут оказаться и те, которые принадлежат группе a_{ij} (обозначим их через λ_{ij}). Очевидно, что λ_{ij} является случайной величиной, которая принимает целочисленные значения. Группу λ_{ij} пассажиров из a_{ij} можно выбрать $C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}}$ способами в различных комбинациях. Но для каждой определённой группы λ_{ij} остальных пассажиров ($b_j - \lambda_{ij}$) также можно выбрать $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}$ различными способами. Тогда общее число благоприятствующих случаев будет равно $C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}$.

Согласно классической формуле определения вероятности события, что между остановками *i* и *j* совершат поездки λ_{ij} пассажиров, и на основании вышеизложенного можно вычислить вероятность того, что среди вышедших b_j пассажиров группе a_{ij} будет принадлежать ровно λ_{ij} пассажиров:

$$P_{b_j}(\lambda_{ij}) = \frac{C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}}. \tag{3.7}$$

При данном описании задачи возможны два случая: когда $a_{ij} \geq b_j$ и когда $a_{ij} \leq b_j$.

При $a_{ij} \geq b_j$ случайная величина λ_{ij} может принимать целочисленные значения от 0 до b_j, а при $a_{ij} \leq b_j$ – от 0 до a_{ij}. В общем случае она может принимать значения на отрезке

$$0 \leq \lambda_{ij} \leq \min[a_{ij}, b_j]. \tag{3.8}$$

Итак, при решении задач (3.5), (3.6) случайная величина поездок пассажиров (λ_{ij}) между i-й и *j*-й остановками на маршруте может принимать целые неотрицательные значения только на отрезке (3.8). Любое число вне этого отрезка не может быть принято в качестве решения задач (3.5), (3.6).

По сути случайная величина λ_{ij} является дискретной; принимает целочисленные неотрицательные значения. Так как между её возможными значениями на отрезке (3.8) и соответствующими им вероятностями, вычисленными по формуле (3.7), установлено некоторое соответствие, которое можно представить в виде табл. 3.3, то можно сказать, что она подчиняется закону распределения дискретной случайной величины.

Таблица 3.3

Значения λ_{ij}	0	1	2	…	*k*
Вероятности	p_0	p_1	p_2	…	p_k

Примечание: $k = \min[a_{ij}, b_j]$, а вероятности p_l, где $0 \le l \le k$, определяются по формуле (3.7) для конкретного значения λ_{ij}.

В этом случае из всех целых чисел λ_{ij} на отрезке (3.8) в качестве единственной искомой величины можно принять то значение, для которого вероятность достигает своего максимального значения по аргументу λ_{ij}:

$$x_{ij} = \max P_{b_j}(\lambda_{ij}).$$

Если x_{ij} является наивероятнейшим значением для случайной величины λ_{ij}, то для двух рядом стоящих чисел $(x_{ij} - 1)$ и $(x_{ij} + 1)$ должны выполняться следующие неравенства:

$$P_{b_j}(x_{ij} - 1)/P_{b_j}(x_{ij}) \le 1 \text{ и } P_{b_j}(x_{ij})/P_{b_j}(x_{ij} + 1) \ge 1.$$

Раскрывая эти неравенства, приходим к следующим выражениям:

$$\frac{P_{b_j}(x_{ij} - 1)}{P_{b_j}(x_{ij})} = \frac{x_{ij}(Q_{j-1} - a_{ij} - b_j + x_{ij})}{(a_{ij} - x_{ij} + 1)(b_j - x_{ij} + 1)} \le 1,$$

$$\frac{P_{b_j}(x_{ij})}{P_{b_j}(x_{ij} + 1)} = \frac{(x_{ij} + 1)(Q_{j-1} - a_{ij} - b_j + x_{ij} + 1)}{(a_{ij} - x_{ij})(b_j - x_{ij})} \ge 1.$$

Решение этих неравенств относительно x_{ij} приводит к результату

$$\frac{(a_{ij} + 1)(b_j + 1)}{Q_{j-1} + 2} - 1 \le x_{ij} \le \frac{(a_{ij} + 1)(b_j + 1)}{Q_{j-1} + 2}.$$

При больших значениях a_{ij}, b_j и Q_{j-1} данное выражение можно записать как

$$\frac{a_{ij} b_j}{Q_{j-1}} - 1 \le x_{ij} \le \frac{a_{ij} b_j}{Q_{j-1}}.$$

Из этого двойного неравенства следует, что для вычисления элементов x_{ij} можно применять формулу, округляя значения до целого числа:

$$x_{ij} = \frac{a_{ij} b_j}{Q_{j-1}}.$$

Тогда общая формула расчёта поездок пассажиров по маршруту при решении задач (3.5), (3.6) с учётом специфики формирования таблицы элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков (см. табл. 3.2) будет иметь следующий вид:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ b_j - \sum_{r=1}^{j-2} x_{rj}, & \text{если } j = i + 1, \\ a_i - \sum_{r=i}^{j-1} x_{ir}, & \text{если } j = n, \\ \frac{a_{ij} b_j}{Q_{j-1}}, & \text{при всех других } i \text{ и } j. \end{cases}$$

3.3. Получение наилучшего решения с использованием теории принятия решений

Теория игр **–** это совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций.

Содержание теории игр **–** установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности (конфликта), доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам, указание алгоритмов нахождения решений, их реализация.

Моделями теории игр можно описать экономические, правовые классовые, военные конфликты, взаимодействие человека с природой. Такие модели в теории игр принято называть *играми*.

Игры можно классифицировать по различным признакам: стратегические и чисто случайные, бескоалиционные и коалиционные, игры 1, 2, …, n лиц (по числу игроков), конечные и бесконечные (по числу стратегий), игры в нормальной форме и динамические, с нулевой суммой (антагонистические) и ненулевой суммой.

Рассмотрим простейшую модель – игру, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого игрока конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу второго (бескоалиционная, конечная антагонистическая игра двух лиц). Такую игру (Г) называют матричной. Она определяется тройкой Г = (X,Y,K), где X – множество стратегий 1-го игрока; Y – множество стратегий 2-го игрока; K = K(x,y) – функция выигрыша (выигрыш 1-го игрока и соответственно проигрыш 2-го при условии, что 1-й игрок выбрал стратегию $x \in X$, а 2-й игрок – стратегию $y \in Y$). Пару (x,y) называют ситуацией в игре Г.

Пусть 1-й игрок имеет всего m стратегий, а 2-й – n стратегий: X = M = {1, 2, …, m},Y = N = {1, 2, …, n}. Тогда игра Г полностью определяется заданием матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$, где $(a_{ij})=K(i,j)$ – выигрыш 1-го игрока при условии, что он выбрал стратегию (т.е. строку) *i*, а 2-й игрок – стратегию (т.е. столбец) *j* (эти стратегии называют *чистыми*).

Матрица А называется матрицей игры или платежной матрицей.

Пусть матрица игры $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Цель игрока получить как можно больший выигрыш. Но 1-му игроку нет смысла выбирать стратегию *i* = 1 в надежде выиграть 5 ед., так как 2-й игрок, действуя разумно, не станет выбирать стратегию *j* = 2, чтобы не проиграть максимальную сумму 5 ед. Игрокам удобнее выбрать «осторожные» стратегии.

Пусть $A=(a_{ij})_{m\times n}$ – платежная матрица игры Г. Если 1-й игрок выбрал стратегию *i*, то в худшем случае он выиграет $\min\limits_j a_{ij}$. Поэтому он всегда может гарантировать себе выигрыш $\max\limits_j \min\limits_i a_{ij}$. Обозначим его $\underline{v}$ – нижняя цена игры, или максимин; соответствующая стратегия 1-го игрока называется максиминной.

2-й игрок, выбрав стратегию *j*, в худшем случае проиграет $\max\limits_j a_{ij}$, а значит, может гарантировать себе проигрыш $\min\limits_i \max\limits_j a_{ij}$. Обозначим его $\overline{v}$ – верхняя фена игры, или минимакс; соответствующая стратегия 2-го игрока называется минимаксной.

Схема:

$$A=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{array}\right)\begin{array}{c}\min\limits_j a_{1j}\\ \min\limits_j a_{2j}\\ \dots\\ \min\limits_j a_{mj}\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\underline{v}\\ \underbrace{\max\limits_i a_{i1}\ \max\limits_i a_{i2}\dots\ \max\limits_i a_{in}}_{\min\limits_i \max\limits_i a_{1i}-\overline{v}}\end{array}$$

Пример:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 4\\ -3 & 4 & -5\\ 4 & -5 & 6\end{array}\right)\begin{array}{l}-3\\ -5\\ -5\end{array}\Rightarrow \underline{v}=-3$$
$$\begin{array}{ccc}4 & 4 & 6\end{array}\Rightarrow \overline{v}=4$$

Соответствующие стратегии: $i_0=1$ (максиминная), $j_0=1{,}2$ (минимаксная).

Справедливо неравенство: $\underline{v}\le\overline{v}$.

В игре Г естественно считать *оптимальной* такую ситуацию (*i*,*j*), от которой ни одному из игроков невыгодно отклоняться.

Ситуация (i^*,j^*) называется ситуацией равновесия, или седловой точкой, если для любых $i\in M$, $j\in N$ выполняется неравенство $a_{ij*}\le a_{i*j*}\le a_{i*j}$.

Соответствующие стратегии i^*, j^* называются оптимальными чистыми стратегиями 1-го и 2-го игроков, а число $v = a_{i*j*}$ называется ценой игры. Элемент a_{i*j*} является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце.

Ситуация равновесия существует тогда и только тогда, когда $\underline{v} \leq \overline{v}$ (это значение и является ценой игры).

Например:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5 \\ 4 \\ -5 \end{matrix} \Rightarrow \overline{v} = \underline{v} = 4$$
$$\begin{matrix} 5 & 5 & 4 & 20 \end{matrix}$$

(2,3) – ситуация равновесия, *v* = 4 – цена игры, $i^* = 2$, $j^* = 3$ – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков. Выбрав их, 1-й игрок обеспечит себе выигрыш не менее 4 ед., а 2-й игрок проиграет не более 4 ед. при любом выборе другого игрока.

Наряду с чистыми стратегиями игроков рассматривают также *смешанные* стратегии.

Смешанной стратегией для 1-го игрока называется упорядоченная система *m* действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, которые можно рассматривать как относительные частоты (вероятности) и с которыми 1-й игрок выбирает чистые стратегии $i = 1, 2, \dots, m$.

Аналогично определяется смешанная стратегия для 2-го игрока: $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Множества всех смешанных стратегий 1-го и 2-го игроков будем обозначать соответственно S_m и S_n.

Чистые стратегии можно рассматривать как частный случай смешанных стратегий. Например, чистую стратегию $j = 2$ можно рассмотреть как смешанную $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$, чистую стратегию $i = 1$ – как смешанную $x = (1, 0, \dots, 0)$.

Пару смешанных стратегий (*x*,*y*) называют *ситуацией* в смешанных стратегиях.

Функция выигрыша К(*x*,*y*) в ситуации (*x*,*y*) определяется как математическое ожидание выигрыша 1-го игрока при условии, что 1-й и 2-й игроки выбрали соответственно стратегии $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$: $K(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_i$.

Если для некоторых $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$ и для всех $x \in S_m$, $y \in S_n$ выполняется неравенство $K(x, y^*) \leq K(x^*, y^*) \leq K(x^*, y)$, то x^*, y^* называются *оптимальными смешанными стратегиями* игроков, число $v = K(x^*, y^*)$ называется *ценой игры*, пара (x^*, y^*) – *стратегической седловой точкой*, а тройка x^*, y^*, v – *решением игры*.

Основная теорема теории матричных игр, или теорема о минимаксе. Если $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – матрица игры Г для всех $x \in S_m$ и $y \in S_n$

$K(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_i y_i$, то величины $\underset{x\in S_m}{max}\ \underset{y\in S_n}{min} K(x,y)$ и $\underset{y\in S_n}{min}\ \underset{x\in S_m}{max} K(x,y)$ существуют и равны между собой (эта величина и является ценой игры v).

Из теоремы следует, что всякая матричная игра имеет цену; игрок в матричной игре всегда имеет оптимальную стратегию.

Свойства оптимальных стратегий:

1. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A с ценой v. Тогда, для того чтобы элемент $x^*\in S_m$ был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $y\in S_n$ выполнялось неравенство $v=\leq K(x^*,y)$. Аналогично, для того чтобы элемент $y^*\in S_n$ был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in S_m$ выполнялось неравенство $K(x,y^*)\leq v$.

2. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A, v – действительное число, $x^*\in S_m$, $y^*\in S_n$. Тогда, для того чтобы v было ценой игры, а x^* и y^* были оптимальными стратегиями соответственно 1-го и 2-го игроков, необходимо и достаточно, чтобы для любых $i\in M$ и $j\in N$ выполнялось неравенство $K(i,y^*)\leq v\leq K(x^*,j^*)$.

3. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A с ценой v. Тогда, для того чтобы элемент $x^*\in S_m$ был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $j\in N$ выполнялось неравенство $v\leq K(x^*,j^*)$. Аналогично, для того чтобы элемент $y^*\in S_n$ был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i\in M$ выполнялось неравенство $K(i,y^*)\leq v$.

4. Если x^*, y^* – решение $(m\times n)$ игры Γ_A, то

$$\max_i K(i,y^*) = \min_j K(x^*,j) = v.$$

5. Пусть $x^*=(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $y^*=(y_1,y_2,\dots,y_n)$, v – решение игры Γ_A. Тогда для любого $i\in M$, при котором $K(i,y^*)<v$, выполняется равенство $x_i=0$, а для любого $j\in N$, при котором $v<K(x^*,j)$, выполняется равенство $y_i=0$.

6. Лемма о масштабе. Если Γ_A – игра с матрицей $A=(a_{ij})_{m\times n}$, а $\Gamma_{A'}$ – игра с матрицей $A'=(a'_{ij})_{m\times n}$, где $a'_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta$, где $\alpha,\beta=\text{const}$, $\alpha>0$, то множества оптимальных стратегий игроков в играх Γ_A и $\Gamma_{A'}$ совпадают, а $v_{A'}=\alpha v_A+\beta$. Иначе говоря, две игры, отличающиеся лишь началом отсчета выигрышей и масштабом их измерения, стратегически эквивалентны.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для игры Γ_A, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ найдите $K(i,j)$ для ситуации (1;3), (3;2), (2;1).

2. Найдите $\underline{v}$ и $\overline{v}$ в игре Γ_A:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & 4 & 10 \\ 8 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Найдите седловую точку матрицы и решение соответствующей игры:

а) $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & 2 \\ 7 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Могут ли указанные векторы определять смешанные стратегии в матричной игре:

а) $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$; б) $(\frac{3}{11}; \frac{6}{11}; \frac{2}{11})$; в) $(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3})$; г) $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4})$?

5. Для игры Γ_A с платежной матрицей А найдите значение $K(x,y)$ в данной ситуации (x,y):

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $x = (\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$, $y = (\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3})$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = (\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0)$, $y = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$;

в) A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = (\frac{1}{4}; 0; \frac{3}{4})$, $y = (\frac{2}{5}; \frac{1}{5}; 0; \frac{2}{5})$.

6. Проверьте, является ли тройка x, y, v решением игры Γ_A:

а) A = $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $x = (\frac{1}{5}; \frac{4}{5})$, $y = (\frac{3}{5}; \frac{2}{5})$; $v = \frac{17}{5}$;

б) A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \\ 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $x = (\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}; 0)$, $y = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; $v = 3$;

в) A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $x = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $y = (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$; $v = \frac{5}{2}$;

г) A = $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, $x = (\frac{7}{8}; 0; \frac{1}{8})$, $y = (\frac{1}{4}; 0; \frac{3}{4})$, $v = \frac{3}{4}$.

Ответы: 1. 0; 5; 4. **2.** а) 2; 4; б) 6; в) 3; 5. **3.** а) (3;2), 3; б) (4;1), 7; в) (3;4), 5; г) (1;2), (1;4), (3;2), (3;4), 5. **4.** а), б) – да; в), г) – нет. **5.** а) $\frac{16}{9}$; б) $\frac{13}{6}$; в) 0. **6**. а), в), г) – да; б) – нет.

3.3.1. (2×2)-игры

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – платежная матрица игры Г. Если она не имеет седловой точки, то единственное решение игры Г можно найти:

1) решив две системы:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}y_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

2) по формулам:

$$x_1 = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}; x_2 = \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}; \;\; x_2 = 1 - x_1;$$

$$y_1 = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}; y_2 = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}; \;\; y_2 = 1 - y_1;$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};$$

3) в матричном виде:

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T}, y^T = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T}, v = \frac{|A|}{JA^*J^T},$$

где $|A|$ – определитель матрицы A, A^* – присоединенная к A матрица, J = (1 1), $x = (x_1 \;\; x_2)$, $y = (y_1 \;\; y_2)$, J^T и y^T – транспонированные матрицы J и y.

Найдем, например, решение игры с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, которая не имеет седловой точки:

1. Составим системы:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 = v \\ 2y_1 + 4y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = v \\ -x_1 + 4y_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решив системы, получим:

$y_1 = \frac{5}{6}$, $y_2 = \frac{1}{6}$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $v = \frac{7}{3}$, т.е. $x^* = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $y^* = (\frac{5}{6}; \frac{1}{6})$, $v = \frac{7}{3}$ – решение игры.

2. Найдем решение по формулам:

$$x_1 = \frac{4-2}{3+4-2+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$y_1 = \frac{4+1}{3+4-2+1} = \frac{5}{6};\ y_2 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6};\ v = \frac{3\cdot 4 + 2\cdot 1}{3+4-2+1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

3. Найдем решение в матричном виде:

$$|A| = 12 + 2 = 14,\ A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ JA^* = (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = (2 \quad 4),$$

$$JA^*J^T = (2 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6,\ A^*J^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$x = \frac{1}{6} \cdot (2 \quad 4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ y^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix},\ v = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найдите решения (2×2)-игр с заданными платежными матрицами, сделайте проверку найденных решений:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.3.2. $(2 \times n)$ и $(m \times 2)$-игры

Рассмотрим игру с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Если 1-й игрок примет смешанную стратегию $x^* = (x, 1 - x)$, а 2-й игрок чистую стратегию $j = 1$, то

$K(x^*,1) = 2x + 4(1 - x)$ – прямая (1).

Аналогично при выборе 2-м игроком чистых стратегий j = 2, j = 3, j = 4

$K(x^*,2) = 3x + 1(1 - x)$ – прямая (2).

$K(x^*,3) = 1x + 6(1 - x)$ – прямая (3).

$K(x^*,4) = 5x + 0(1 - x) \;\; x \in [0;1]$ – прямая (4).

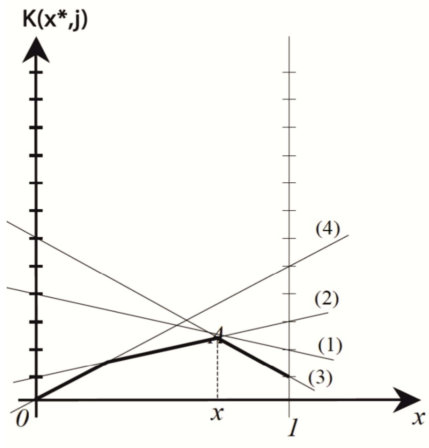


Рис. 3.2

Построим прямые (1) – (4) по двум точкам, придавая x значения 0 и 1 (рис. 3.2). Оптимальная стратегия 1-го игрока – его максиминная стратегия, которая соответствует самой высокой точке A, выделенной на рис. 1 нижней границы. Абсцисса этой точки – искомое значение x, ордината этой точки – значение v. Точка A является точкой пересечения прямых (2) и (3), поэтому решение исходной игры можно найти, решив игру $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

По формулам (2×2)-игры получим:

$$x_1 = \frac{6-1}{3+6-1-1} = \frac{5}{7}; x_2 = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7};$$

$$y_1 = \frac{6-1}{3+6-1-1} = \frac{5}{7}; y_2 = \frac{2}{7}; v = \frac{3 \cdot 6 + 1 \cdot 1}{3+6-1-1} = \frac{17}{7}.$$

Тогда решение исходной игры имеет вид $x^* = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right)$, $y^* = \left(0; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}; 0\right)$ (номерам столбцов, не вошедших в матрицу A^*, соответствуют нулевые координаты вектора y^*), $v = \frac{17}{7}$.

Аналогично решаются матрицы $(m \times 2)$-игры. Пусть, например, A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $y^* = (y, 1 - y)$ – смешанная стратегия 2-го игрока; 1-й игрок выбирает чистые стратегии i = 1, 2, 3.

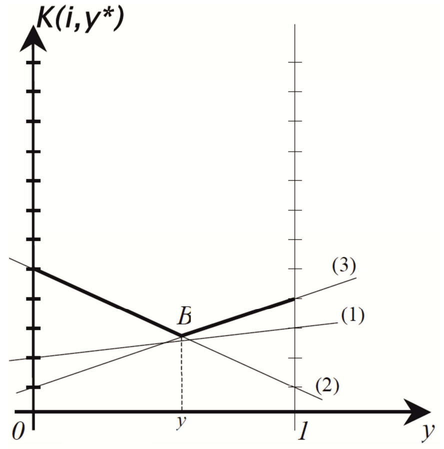


Рис. 3.3

$K(1,y^*) = 3y + 2(1-y)$ – прямая (1);

$K(2,y^*) = 1y + 5(1-y)$ – прямая (2);

$K(3,y^*) = 4y + 1(1-y)\ \ y \in [0;1]$ – прямая (3).

Построим прямые (1), (2), (3) по двум точкам, придавая y значения 0 и 1 (рис. 3.3). Оптимальная стратегия 2-го игрока – его минимаксная стратегия, которая соответствует самой низкой точке В, выделенной на рис. 2 верхней границы. Абсцисса этой точки – искомой значение *y*, ордината точки – значение *v*.

Точка В является точкой пересечения прямых (2) и (3). Найдем решение игры $A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$:

$$x_1 = \frac{1-4}{1+1-4-5} = \frac{3}{7};\ x_2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7};$$

$$y_1 = \frac{1-5}{1+1-4-5} = \frac{4}{7};\ y_2 = \frac{3}{7};\ v = \frac{1 \cdot 1 + 4 \cdot 5}{1+1-4-5} = \frac{19}{7}.$$

Тогда решение исходной игры будет выглядеть следующим образом:

$$x^* = \left(0; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right),\ y^* = \left(\frac{4}{7}; \frac{32}{7}\right),\ v = \frac{19}{7}.$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть дана платежная матрица игры

А= $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Построим соответствующие прямые (1), (2), (3) (рис. 3.4). На выделенной нижней границе есть горизонтальный участок АВ, все точки которого имеют одну и ту же (максимальную) ординату.

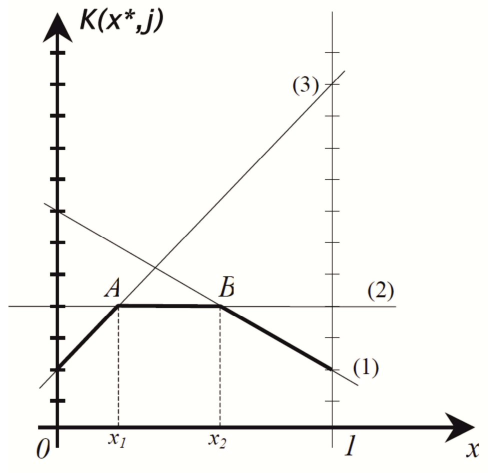


Рис. 3.4

А – точка пересечения прямых (2) и (3); ее абсциссу найдем, решая игру $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{2-4}{2+4-7-4} = \frac{3}{5}$. Решение исходной игры: $x^* = (x, 1-x)$, где $x \in \left[\frac{2}{9}; \frac{3}{5}\right]$, $y^* = (0;1;0)$, $v = 4$, т.е. 1-й игрок имеет множество оптимальных стратегий, 2-й игрок – единственную оптимальную стратегию; это чистая стратегия j = 2 (только она участвует в образовании отрезка АВ). Цена игры v – ордината точек отрезка АВ. Значит, v и y^* можно было получить, используя формулы решения (2×2)-игр для матрицы A' или A'' (проверьте!).

Задачи для самостоятельного решения

Найдите решения $(2 \times n)$ и $(m \times 2)$-игр с заданными платежными матрицами:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \\ 4 & 8 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 5 \\ 7 & 7 \\ 4 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ 10 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 4 \\ 6 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответы. 2. $x^* = (x, 1-x), x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{4}{7}\right], y^* = (0;1;0), v = 3$.

6. $x^* = (x, 1-x), x \in \left[\frac{2}{5}; \frac{7}{9}\right], y^* = (1;0;0), v = 2$.

8. $x^* = (x, 1-x), x \in \left[\frac{1}{6}; 1\right], y^* = (0;1;0), v = -1$.

12. $x^* = (1;0;0),\ y^* = (y, 1-y),\ y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], v = 3$.

14. $x^* = (0;0;1;0;0),\ y^* = (y, 1-y),\ y \in \left[\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right], v = 7$.

16. $x^* = (0;0;1;0),\ y^* = (y, 1-y),\ y \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right], v = 6$.

4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Представим на плоскости конечное множество точек V и некоторое множество линий X, соединяющих попарно какие-то точки из V. Например, схема автодорог, соединяющих населенные пункты Приморского края.

Множество точек (населенных пунктов) назовем **множеством вершин**, а соединяющие линии (автодороги) – **множеством ребер.** Совокупность двух множеств (вершин и ребер) называют **графом.**

На некоторых участках допускается только одностороннее движение. Тогда соответствующее ребро называется **дугой**; изображается стрелкой, направленной от начальной вершины к конечной вершине.

Граф, состоящий из дуг, называют **ориентированным** (или просто **орграфом**), а образованный ребрами – **неориентированным.**

Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Вершины можно располагать по своему усмотрению и произвольно выбирать форму соединяющих линий. В этом проявляется свойство **изоморфизма графов.**

Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется **петлей.** Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются **кратными.** **Изолированная вершина** не соединена с другими вершинами.

Пример 1. Задан граф G_1 состоящий из вершин v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 и ребер x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (рис. 4.1).

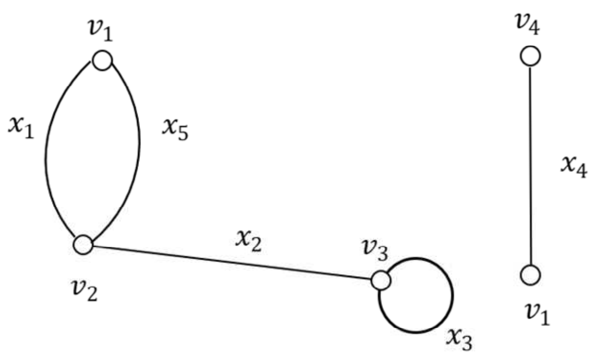
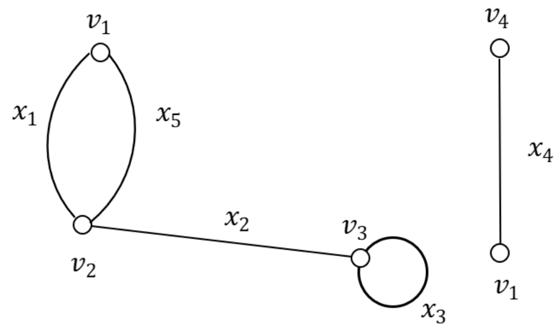


Рис. 4.1

Примечание: v_6 – изолированная вершина; x_1 и x_5 – кратные ребра, x_3 – петля, v_1 и v_2 – концевые вершины ребра x_1.



Задача 1. Для графа *G* указать вершины, рёбра, изолированные вершины, кратные рёбра, петли (рис. 4.2).

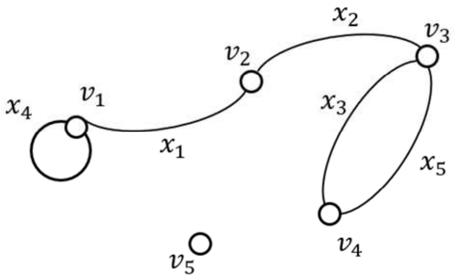


Рис. 4.2

Пример 2. Задан орграф G_2 (рис. 4.3). У дуги x_3 вершина v_2 – начальная, а вершина v_3 – конечная, x_7 – петля.

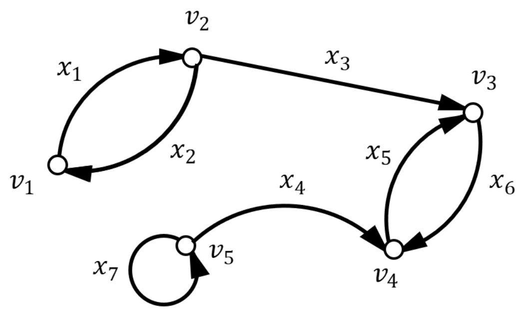


Рис. 4.3

Задача 2. Для орграфа *D* указать вершины, дуги, петли (рис. 4.4).

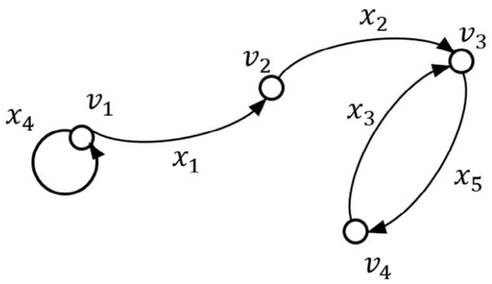


Рис. 4.4

Часто на графе требуется выделить различные маршруты, обладающие определенными свойствами. *Маршрут* длины *m* – последовательность $x_1,..., x_m$ ребер графа (не обязательно различных), таких, что любые два соседних ребра x_i, x_{i+1} имеют общую концевую вершину.

Замкнутый маршрут приводит в ту же вершину, из которой он начался. *Цепь* – маршрут, все ребра которого различны. *Простая цепь* – цепь без повторяющихся вершин. Замкнутая цепь называется *циклом*. *Простой цикл* – простая замкнутая цепь.

Пример 3. Дан граф G_3(рис. 4.5). x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_2 – маршрут длины 6, соединяющий вершины v_1 и v_2.

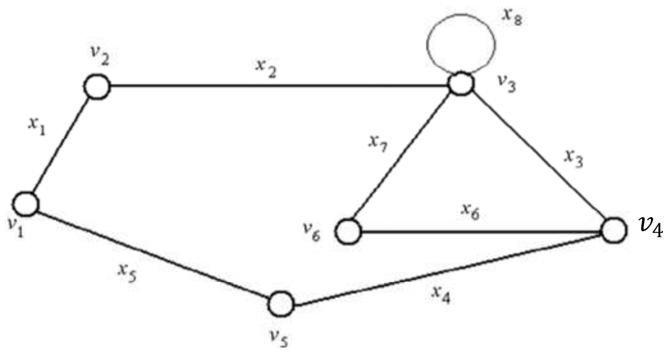


Рис. 4.5

x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_2 x_1 – замкнутый маршрут длины 7. Он начинается и заканчивается в вершине v_1. x_1, x_2, x_3, x_6, x_7 – цепь длины 5 (все ребра в ней различны). Эта цепь не является простой, так как при обходе вершину v_3 мы посетили два раза. $x_1\ x_2\ x_3$ – пример простой цепи (все вершины на нашем пути были различны). $x_6, x_7, x_8\ x_3$ – цикл, x_7, x_6, x_3 – простой цикл.

Задача 3. Для графа *G* из задачи 1 привести примеры маршрута, цепи, простой цепи, цикла, простого цикла.

В случае орграфа вместо слова «цепь» говорят «путь», а слово «цикл» заменяют на слово «контур».

Итак, для задания графа необходимо указать два множества: *V* (множество вершин) и *X* (множество ребер или дуг). Но при большом числе элементов рисунок графа становится громоздким. В этом случае используют матричный способ. Выбор матрицы определяется конкретной задачей.

Дан граф *G* с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ и ребрами $x_1, \ldots, x_m$.

Матрица смежности графа G – квадратная матрица A(G) размером $n \times n$ (*n* – число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ – если в графе G } v_i, v_j \text{ соединены ребром,} \\ 0 \text{ - иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности графа G – матрица B(G) размером $n \times m$ (*n* – число вершин, *m* – число ребер) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ – если вершина } v_i \text{ - концевая вершина ребра } x_j \\ 0 \text{ - иначе.} \end{cases},$$

Пример 4. Для графа *G* построим матрицу смежности A(G) и матрицу инцидентности B(G) (рис. 4.6).

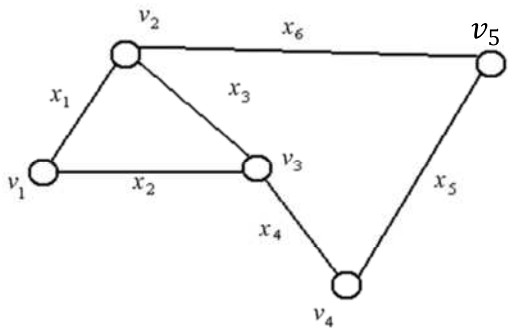


Рис. 4.6

Так как у графа 5 вершин и 6 ребер, то размер матрицы A(G) будет 5×5, а матрицы B(G) – 5×6:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a_{12}= 1 <=> – в графе *G* есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_2; a_{13}= 1 <=> – в графе *G* есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_3; a_{14}= 0 <=> – в графе *G* нет ребра, соединяющего вершины v_1 и v_4 и т.д.:

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b_{11} = 1 <=> v_2 – концевая вершина для ребра x_1; b_{12} = 1 <=> v_1– концевая вершина для ребра x_2; b_{13} = 0 <=> v_1 – не является концевой вершиной для ребра x_3 и т.д.

Задача 4. Для графа *G* построить матрицу смежности A(G) и матрицу инцидентности B(G) (рис. 4.7).

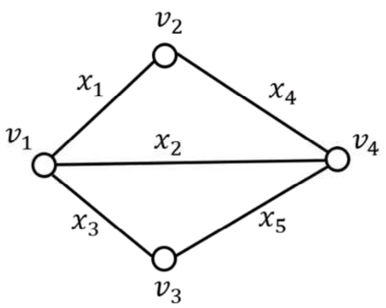


Рис. 4.7

Дан орграф *D* с вершинами $v_1,..., v_n$ и дугами $x_1,..., x_m$.

Матрица смежности орграфа D – квадратная матрица A(D) размером $n \times n$ (*n* – число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в орграфе D есть дуга из i - й вершины в j - ю,} \\ 0 \text{ –иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности орграфа D – матрица B(D) размером $n \times m$ (*n* – число вершин, *m* – число дуг) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ – если j - я дуга заканчивается в i - й вершине,} \\ -1 \text{ - если j - я дуга начинается в i - й вершине,} \\ 0 \text{ –иначе.} \end{cases}$$

Пример 5. Для орграфа D построим матрицу смежности A(D) и матрицу инцидентности B(D) (рис. 4.8).

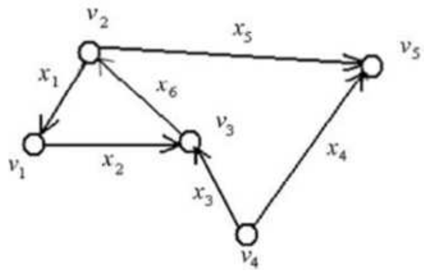


Рис. 4.8

Орграф D содержит 5 вершин и 6 дуг, поэтому размер матрицы A(D) будет 5×5, а матрицы B(D) – 5×6:

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{12} = 0$ <=> – орграф D не содержит дуги из v_1 в v_2; $a_{13} = 0$ <=> – орграф D не содержит дуги из v_1 в v_3 и т.д.:

$$B(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b_{11} = 1$ <=> – в вершине v_1 заканчивается дуга x_1; $b_{12} = -1$ <=> – в вершине v_1 начинается дуга x_2; $b_{13} = 0$ <=> – вершина v_1 не является концевой вершиной для дуги x_3 и т.д.

Задача 5. Для графа D построить матрицу смежности A(D) и матрицу инцидентности B(D) (рис. 4.9).

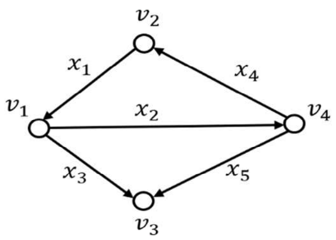


Рис. 4.9

Граф G называется *связным*, если для любых двух его вершин существует маршрут, их соединяющий. Связный граф, не содержащий циклов, называется *деревом* (примеры деревьев: генеалогический граф (родословное дерево), совокупность всех файлов на дискете).

Пример 6. Граф G не является деревом, так как содержит цикл v_1, v_2 и v_3 (рис. 4.10).

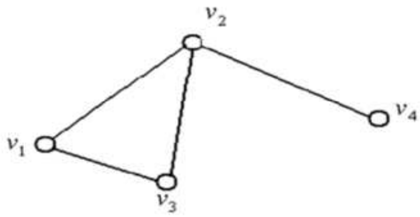


Рис. 4.10

Задача 6. Является ли граф G деревом (рис. 4.11)?

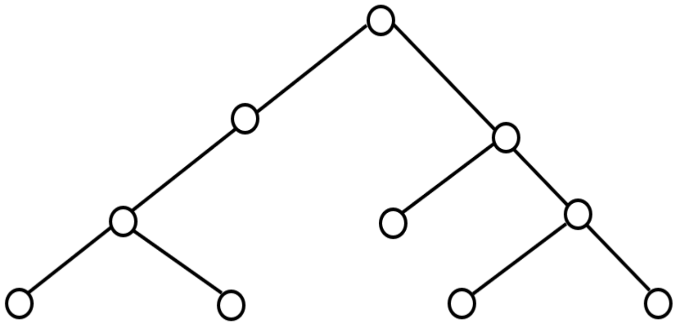


Рис. 4.11

Очень часто на ребрах графа пишут числа. Такие графы называются *структурными* (или *сетью*). Вершины сети будем называть *узлами*, а ребра – *дугами*.

5. ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Сетевой график и его основные элементы

Основным плановым документом в системе сетевого планирования и управления (СПУ) является сетевой график (сетевая модель, или просто сеть), представляющий собой информационно-динамическую модель, в которой изображаются взаимосвязь и результаты всех работ, необходимых для достижения конечной цели разработки.

В сетевом графике показываются основные моменты выполняемого комплекса работ и их последовательность, которая обеспечивает окончание всех работ не позже намеченного срока. Как правило, в сетевом графике имеются два основных элемента – работа и событие.

Работами называются любые процессы, действия, приводящие к достижению определенных результатов (событий). *Событиями* называются результаты произведенных работ.

Примерами работ являются: «Разработка технологии», «Разработка чертежей» и т.д. Всякая действительная работа требует затраты определенных ресурсов – времени, сил, средств, материалов, энергии и т.д. Иногда для выполнения работы может требоваться только время. В этом случае работа называется *ожиданием*. Например, между отливкой металла в формы и его дальнейшей обработкой должно пройти определенное время (время остывания заготовки). Кроме работ действительных существуют так называемые фиктивные работы (зависимости).

Фиктивной работой (зависимостью) называется связь между какими-нибудь результатами работ (событиями), не требующая затрат времени. Эта связь указывает лишь на то, что некоторое последующее событие не может произойти раньше предыдущего. Например, начать сборку агрегата можно лишь после сборки всех его узлов, но если все узлы собраны, то переход к сборке агрегата не требует затрат времени.

В отличие от работы, имеющей, как правило, протяженность во времени, события представляют собой только моменты свершения работ и не требуют сами по себе никаких затрат ресурсов. Разумеется, для того чтобы произошло некоторое событие, необходимо выполнить ряд работ и затратить определенные ресурсы. Но, когда все это сделано, событие наступит как бы автоматически.

События конкретизируют процесс планирования, исключают возможность различного толкования выполнения работ. Для того чтобы могло произойти некоторое событие, должны произойти некоторые другие события. Каждое событие может быть отправным моментом для начала следующих работ.

Введем определения, упорядочивающие расположение событий и работ в сети.

Событие, за которым непосредственно начинается данная работа, называется *начальным* для данной работы; оно обозначается символом *i*. Событие, которому непосредственно предшествует данная работа, называется *конечным* для данной работы; оно обозначается символом *j*. Событие, располагающееся в сети непосредственно перед данным событием так, что между ними нет никаких промежуточных событий, называется *предшествующим*. Событие, располагающееся в сети непосредственно после данного события так, что между ними нет никаких промежуточных событий, называется *последующим*.

В сетевой модели выделяются два основных события: исходное и завершающее. *Исходным* назовем первоначальное событие в сети, не имеющее предшествующих событий и отражающее начало выполнения всего комплекса работ, включенных в данную сеть: оно обозначается символом *I*. *Завершающим* назовем событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель комплекса работ, включенных в данную сеть; оно обозначается символом *C*. Исходным событием, например, может явиться приказ о назначении руководителя данного комплекса работ. Отметим, что все основные события в сети определяются, как правило, руководителем.

Из этих определений вытекают два следующих важнейших свойства сетевых графиков:

– ни одно событие не может произойти до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы;

– ни одна работа, выходящая из данного события, не может начаться до тех пор, пока не произойдет данное событие.

Любая последовательность работ в сетевом графике, в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется *путём*. Следует различать несколько видов путей:

а) от исходного события до завершающего события – *полный путь*, или просто путь;

б) от исходного события до данного – путь, *предшествующий* данному событию;

в) от данного события до завершающего – путь, *последующий* за данным событием;

г) между двумя какими-либо событиями *i* и *j* – путь (*i*,*j*) между событиями *i* и *j*.

5.2. Изображение работ и событий на сетевом графике

В сетевом графике событие изображается кружком или другой геометрической фигурой, в которой указывается порядковый номер или шифр события, а иногда и название события. Удобно в одном сетевом графике для наглядности различные по характеру события изображать различными геометрическими фигурами.

Работа изображается стрелкой (направленной дугой). Для обозначения фиктивной работы используется пунктирная стрелка. Каждая стрелка, кроме пунктирной, означает затрату какого-то времени, необходимого для выполнения соответствующей работы. Однако ни длина стрелки, ни ее направление не имеют значение. Желательно только при построении выдерживать направление стрелок так, чтобы исходное располагалось слева в сетевом графике, а завершающее событие – справа. Надо стремиться также к тому, чтобы графики имели простую форму без излишних пересечений.

Поскольку в графике логически увязаны в единую сеть все работы и события, то неправильное изображение даже отдельных работ может привести к серьезным ошибкам в последующих расчетах. Отметим некоторые наиболее характерные ошибки (рис. 5.1).

1. Работы не должны иметь одинаковых шифров, т.е. у двух различных работ не должны быть одинаковыми начальные и конечные события. На графике эта ошибка равносильна тому, что два события соединены более чем одной стрелкой. На рисунке 5.1 этой работе соответствует работа (*K*,*P*).

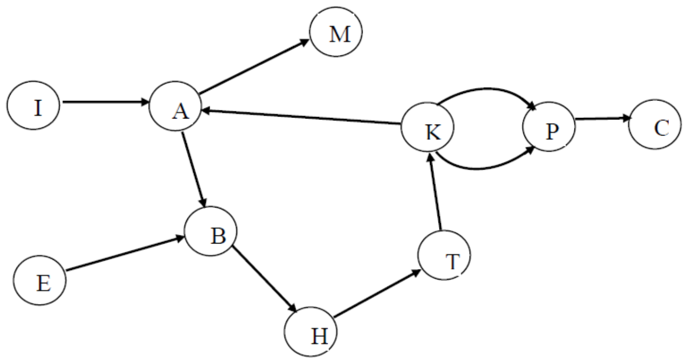


Рис. 5.1

2. В сети не должно быть «тупиковых» событий, т.е. событий, от которых не начинается ни одна работа. Например, событие *M* на рис. 5.1.

3. В сети не должно быть событий, которым не предшествует ни одна работа (событие *E*, см. рис. 5.1).

4. В сети не должно быть «замкнутых контуров» (циклов), т.е. путей, которые соединяют начальное событие с ним самим (путь *A*,*B*,*H*,*T*,*K*,*A*, см. рис. 5.1).

После устранения возможных ошибок целесообразно пронумеровать события таким образом, чтобы для каждой из работ (i,j) выполнялось условие $I < j$, где i – начальное событие; j – конечное событие. При этом любой путь пройдет через события с возрастающими номерами. Такая нумерация называется *правильной*. Она упрощает анализ и проведение расчетов на графике. Нумерацию событий можно получить, используя метод вычеркивания дуг. Он позволяет распределить все события по рангам. *Ранг события* – это максимальное число дуг путей, соединяющих данное событие с исходным. Для событий, сгруппированных по рангам, легко получить правильную нумерацию.

Метод вычеркивания дуг состоит в следующем. Исходному событию присваивается ранг 0. Затем на графике вычеркиваются все дуги, выходящие из события с рангом 0. В результате одно или несколько событий могут оказаться без входящих дуг. Всем им присваивается ранг 1. Для любого из этих событий максимальное число дуг пути, соединяющего их с событиями нулевого ранга, равно 1. После вычеркивания всех дуг, выходящих из событий первого ранга, получают вновь некоторое количество событий без входящих дуг. Их относят к событиям второго ранга. Характерным признаком событий второго ранга является то, что максимальное число дуг пути, соединяющего эти события с событиями нулевого ранга, равно 2.

Вообще событию присваивается i-й ранг, если максимальное число дуг пути, соединяющего данное событие с событием нулевого ранга, равно i.

После распределения всех событий по рангам нумерация осуществляется следующим образом. Единственное событие нулевого ранга получает номер 0. Затем нумеруются последовательно сначала все события первого ранга, затем второго, третьего и т.д.

Рассмотрим описанный метод нумерации событий на примере (рис. 5.2). Исходному событию I присваивается ранг 0. После вычеркивания дуг (I,A) и (I,B) события A и B не имеют входящих дуг. Это события первого ранга. Вычеркнув дуги (A,H), (A,E), (B,E), (B,C), получим события второго ранга H и E. И наконец, вычеркнув дуги (H,C) и (E,C), событию C присваиваем ранг 3.

События по рангам распределяются следующим образом:

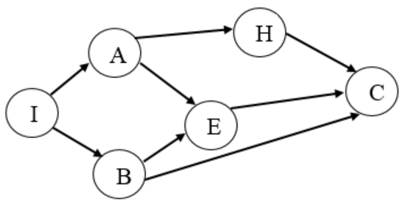
– события нулевого ранга – I;

– события первого ранга – A,B;

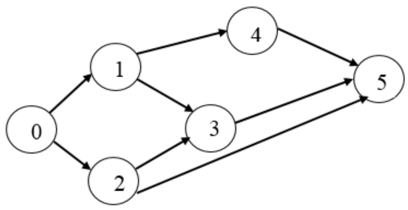
– события второго ранга – E,H;

– события третьего ранга – C.

Последовательно нумеруя события в порядке возрастания рангов (см. рис. 5.2, б), получаем правильную нумерацию: I – 0, A – 1, B – 2, E – 3, H – 4, C – 5 (внутри группы событий одного ранга нумерация может быть произвольной).



а



б

Рис. 5.2

5.3. Параметры сетевого графика

Наличие сетевого графика уже дает ответ на ряд вопросов. Например, от каких работ зависит, а от каких не зависит выполнение любой данной работы? Какую работу нужно сделать сначала, а какую – позже и т.д.? Однако дополнительно вычисленные характеристики, называемые параметрами сети, позволяют провести более глубокий анализ сети или, что то же самое, анализ составленного плана работ. К основным параметрам сети относятся критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ.

Критический путь – это наиболее протяженная по времени цепочка работ, ведущих от исходного к завершающему событию. Продолжительность работы (*i*,*j*) обозначим через t_{ij}. Иногда величину t_{ij} называют длиной дуги (*i*,*j*). Тогда длина пути на графике равна сумме длин дуг, входящих в данный путь, и численно равна протяженности во времени этого пути. Изменение продолжительности любой работы, лежащей на критическом пути, соответственным образом меняет срок наступления завершающего события. Поэтому в процессе выполнения всего комплекса работ внимание руководства сосредотачивается на главном направлении – работах критического пути. В некоторых случаях в сетевом графике может быть не один, а несколько критических путей, имеющих одинаковую протяженность. Имеются и другие полные пути, которые могут полностью проходить вне критического пути либо частично совпадать с критической последовательностью работ. Такие пути называются *ненапряженными*. Длина ненапряженного пути меньше критического, поэтому его участки, не совпадающие с критической последовательностью, обладают резервом времени. Это означает, что задержка в совершении событий, не лежащих на критическом пути, до определенного момента (пока не исчерпается резерв) не влияет на сроки завершения всего комплекса работ. Резервы времени существуют в сети во всех случаях, когда имеется более одного пути разной продолжительности. Рассмотрим некоторые основные параметры сетевого графика.

Наиболее ранним из возможных сроков $T_p(j)$ свершения события *j* назовем срок, необходимый для выполнения всех работ, предшествующих данному событию. Это время находится путем выбора максимального значения из продолжительности всех путей, предшествующих событию *j*. Множество событий, предшествующих данному событию *j*, обозначим через $i \subset j$. Тогда наиболее раннее возможное время наступления *j*-го события $T_p(j)$ определяется рекуррентной формулой

$$T_p(j) = \max_{i \subset j} \{T_p(i) + t_{ij}\}. \tag{5.1}$$

Эту формулу применяют, двигаясь в порядке правильной нумерации событий, начиная с исходного.

Рассчитаем ранние сроки свершения событий для сети, изображенной на рис. 5.3. Исходное событие 0 является началом всего комплекса работ, поэтому $T_p(0) = 0$. Тогда для событий 1 и 2, применяя формулу (5.1), получим:

$T_p(1) = T_p(0) + t_{01} = 1,$

$T_p(2) = T_p(0) + t_{02} = 2.$

Событию 3 предшествуют события 1 и 2, следовательно:

$$T_р(3) = \max\{T_р(1) + t_{13}; T_р(2) + t_{23}\} = \max\{4;2\} = 4.$$

Для события 4 найдем

$$T_р(4) = T_р(1) + t_{14} = 1 + 2 = 3.$$

Для завершающего события 5 имеем

$$T_р(5) = \max\{T_р(4) + t_{45}; T_р(3) + t_{35}; T_р(2) + t_{25}\} = \max\{4;8;5\} = 8.$$

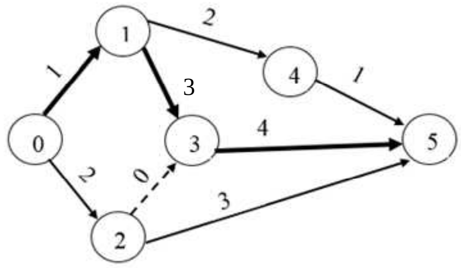


Рис. 5.3

Наиболее поздним из допустимых сроков $T_п(i)$ назовем такой срок совершения работы *i*, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события, т.е. если событие *i* наступило в момент времени $T_п(i)$, то оно попадает в критическую зону и последующие за ним работы должны находиться под таким же контролем, как и работы критического пути. Величина $T_п(i)$ равняется разности между продолжительностью критического пути и максимального из последующих за данным событием путей.

Множество событий $\{j\}$, последующих за событием *i*, обозначим через $i \supset j$. Тогда наиболее поздний из допустимых сроков $T_п(i)$ наступления события *i*, определяется с помощью рекуррентной формулы

$$T_п(i) = \min_{i \supset j} \{T_п(j) - t_{ij}\}. \tag{5.2}$$

Для определения $T_п(i)$ для каждого события необходимо «двигаться» в направлении, обратном правильной нумерации, т.е. от завершающего события к начальному. Обратимся к рис. 5.3. Для события 5 полагаем

$$T_п(5) = T_р(5) = 8.$$

Для событий 4 и 3 по формуле (5.2) получим

$$T_п(4) = T_п(5) - t_{45} = 8 - 1 = 7; T_п(3) = T_п(5) - t_{35} = 8 - 4 = 4.$$

Для события 2 имеем

$T_п(2) = \min\{T_п(3) - t_{23}; T_п(5) - t_{25}\} = \min\{4;5\} = 4.$

Продолжая этот процесс, получим

$T_п(1) = \min\{T_п(3) - t_{13}; T_п(4) - t_{14}\} = \min\{1;5\} = 1,$

$T_п(0) = \min\{T_п(1) - t_{01}; T_п(2) - t_{02}\} = \min\{0;2\} = 0.$

Разность между $T_п(i)$ и $T_р(i)$ для данного события называется *резервом времени R(i) события i*; вычисляется по формуле

$$R(i) = T_п(i) - T_р(i). \qquad (5.3)$$

Резерв времени события – это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено свершение этого события.

Для рисунка 5.3 имеем:

R(0) = 0; R (01) = 0; R(2) = 2; R(3) = 0; R(4) = 4; R(5) = 0.

В каждой сети некоторые события имеют нулевой резерв времени. Для таких событий наибольший допустимый срок свершения равен наименьшему ожидаемому. Путь, соединяющий эти события, и будет являться критическим путем. Таким образом, наиболее простой способ выявления критического пути – определение всех последовательно расположенных событий, имеющих нулевой резерв времени.

Для сетевого графика, представленного на рис. 5.3, события 0, 1, 3, 5 имеют нулевой резерв времени, следовательно, через эти события проходит критический путь (на рисунке он выделен утолщенными стрелками).

Знная ранние и поздние сроки свершения событий, можно для любой работы (*i,j*) определить также ранние и поздние сроки начала и окончания работ.

Самый ранний из возможных сроков начала работы:

$$T_{рн}(i,j) = T_р(i). \qquad (5.4)$$

Самый поздний из допустимых сроков начала работы:

$$T_{пн}(i,j) = T_п(j) - t_{ij}. \qquad (5.5)$$

Самый ранний из возможных сроков окончания работы:

$$T_{ро}(i,j) = T_р(i) + t_{ij}. \qquad (5.6)$$

И наконец, самый поздний из допустимых сроков окончания работы:

$$T_{по}(i,j) = T_п(j). \qquad (5.7)$$

Например, для работы (1,4) (см. рис. 5.3) имеем:

$$T_{рн}(1,4) = 1;\ T_{пн}(1,4) = 5;\ T_{ро}(1,4) = 3;\ T_{по}(1,4) = 7.$$

Важной характеристикой работ являются также резервы времени. *Полный резерв времени работы* – это максимальное количество времени, на которое можно увеличить продолжительность данной работы, не изменяя при этом продолжительности критического пути. Полный резерв времени $R_п(i,j)$ работы (*i,j*) определяется по формуле

$$R_п(i,j) = T_п(j) - T_р(i) - t_{ij}. \qquad (5.8)$$

Важным свойством полного резерва времени работ является возможность его частичного или полного использования для увеличения длительности какой-либо работы. Однако при этом уменьшатся или полностью будут исчерпаны резервы времени остальных работ, лежащих на этом пути.

У отдельной работы помимо полного резерва времени имеется свободный резерв $R_c(i,j)$. *Свободный резерв времени работы* – это максимальное количество времени, на которое можно увеличить продолжительность работы или отсрочить её начало, не изменяя при этом ранних сроков начала последующих работ при условии, что начальное событие этой работы наступило в свой ранний срок. Свободный резерв времени определяется по формуле

$$R_c(i,j) = T_p(j) - T_p(i) - t_{ij}. \tag{5.9}$$

Используя свободный резерв времени, исполнители данных работ могут маневрировать в его пределах сроком начала данной работы или её протяженностью.

Для рассматриваемого сетевого графика (см. рис. 5.3) полный и свободный резервы времени работы (1,4) соответственно равны:

$$R_п(1,4) = T_п(4) - T_p(1) - t_{14} = 4; R_c(1,4) = T_p(4) - T_p(1) - t_{14} = 0.$$

Отметим, что сетевой график – это модель всего комплекса работ, на которой можно провести эксперименты и выяснить, к каким результатам приведет то или иное изменение в модели. В частности, пусть продолжительность критического пути на сетевом графике превышает директивно установленные сроки завершения всего комплекса работ. В этом случае анализ графика и его основных параметров позволяет руководителю целенаправленно перераспределить имеющиеся ресурсы наилучшим образом.

5.4. Расчёт параметров сети

Расчет сетевых графиков, содержащих не более 300 событий, можно произвести без использования ЭВМ. Одним из наиболее распространенных методов является табличный метод расчета по срокам выполнения работ. Его суть состоит в последовательном заполнении таблицы параметров сети по определенным правилам. Правила заполнения таблицы следующие.

1. Количество предшествующих работ (графа 1) для исходного события равно 0; для остальных работ оно определяется по числу работ, имеющих второй цифрой в коде ту, с которой начинается данная работа. Например, в графе 2 таблицы имеются две работы, оканчивающиеся на цифру 5: (2,5) и (3,5), поэтому работе (5,6) предшествуют две работы.
2. Графа 2 (код работы) заполняется на основе сетевого графика или перечня работ, расположенных в порядке их выполнения.
3. Графа 3 заполняется на основе сетевого графика или перечня работ с временными оценками.
4. Раннее начало работ, выходящих из исходного события, равно 0, а раннее окончание этих работ равно их продолжительности. Раннее начало последующих работ определяется путем выбора максимального из сроков раннего окончания предшествующих работ. Количество сравниваемых сроков равно количеству предшествующих работ, указанному в графе 1. Таким образом, нельзя определить раннее начало последующих работ, не найдя раннего окончания предшествующих. Раннее окончание каждой работы находится как сумма величин раннего начала и продолжительности данной работы.

5. Продолжительность критического пути находится после заполнения граф 4 и 5 как максимальная величина из сроков раннего окончания работ, которые ведут к завершающему событию. Найденная величина критического пути заносится в графу 7 (позднего окончания работ) для всех работ, ведущих к завершающему событию.

6. Заполнение графы 7 (кроме уже заполненных строк, см. п. 5) ведется снизу-вверх следующим образом. Находятся все работы, последующие за рассматриваемой, и определяются разности между поздними окончаниями этих работ и их продолжительностями. Минимальная из полученных величин заносится в графу 7 напротив рассматриваемой работы.

7. Данные графы (позднее начало работы) находятся как разность позднего окончания этих работ и их продолжительности (из значений графы 7 вычитаются значения графы 3).

8. Полный резерв времени работы (графа 8) определяется разностью между значениями в графах 7 и 5 (или 6 и 4).

9. Резерв времени события j (графа 10) определяется следующим образом. В графе 7 отыскивается позднее окончание работы, заканчивающееся событием j. В графе 4 отыскивается раннее начало работы, начинающееся событием j. Разность этих величин является искомым резервом времени события j.

10. Свободный резерв времени работы $R_c(i,j)$ определяется вычитанием значений графы 10 из значений графы 8.

Задание для ведения расчётов. Построить сетевой график и рассчитать его параметры. Порядок выполнения работы:

1) построить сетевой график;
2) выполнить правильную нумерацию событий;
3) рассчитать параметры сетевого графика табличным методом;
4) определить критический путь.

Примечание. Варианты исходных данных приведены в конце раздела. В каждом варианте в первом столбце перечислены коды работ, во втором – их продолжительность.

Образец выполнения и оформления работы

Исходные данные представлены в таблице:

Вариант 0	
I, A	2
I, B	1
I, E	3
A, H	1
B, M	6
B, E	0
E, K	4
H, M	3
M, K	1
K, C	2

1. В соответствии со списком работ построим сетевой график (рис. 1).

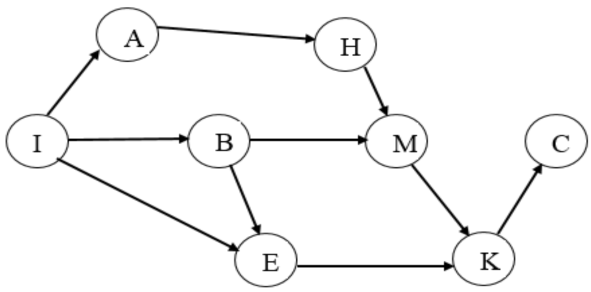


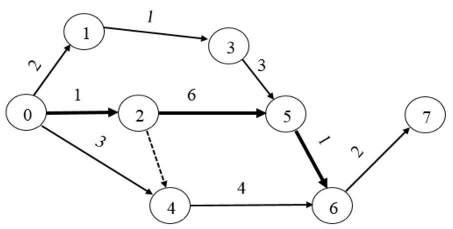
Рис. 1

2. Применяя метод вычеркивания дуг, сгруппируем события по рангам и выполним их правильную нумерацию:

Ранг	События
0	I
1	A,B
2	H,E
3	M
4	K
5	C

Правильная нумерация событий	
I – 0	E – 4
A – 1	M – 5
B – 2	K – 6
H-3	C-7

3. Построим сетевой график с правильной нумерацией событий и отметим на его дугах продолжительность работ (рис. 2).



Правильная нумерация событий	
I – 0	E – 4
A – 1	M – 5
B – 2	K – 6
H – 3	C – 7

Рис. 2

4. Произведем табличный расчет параметров сети. Результаты расчета представлены в таблице:

Количество предшествующих работ	Код работы (i,j)	Продолжительность работы t_{ij}	Раннее начало работы $T_{рн}(i,j)$	Раннее окончание работы $T_{ро}(i,j)$	Позднее начало работы $T_{пн}(i,j)$	Позднее окончание работы $T_{по}(i,j)$	Полный резерв времени $R_{п}(i,j)$	Свободный резерв времени $R_{c}(i,j)$	Резерв времени события j
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	(0,1)	2	0	2	1	3	1	0	1
0	(0,2)	1	0	1	0	1	0	0	0
0	(0,4)	3	0	3	1	4	1	0	1
1	(1,3)	1	2	3	3	4	1	0	1
1	(2,5)	6	1	7	1	7	0	0	0
1	(2,4)	0	1	1	4	4	3	2	1
2	(4,6)	4	3	7	4	8	1	1	0
1	(3,5)	3	3	6	4	7	1	1	0
2	(5,6)	1	7	8	7	8	0	0	0
2	(6,7)	2	8	10	8	10	0	0	0

5. Выберем из графы 10 таблицы события 2, 5, 9, 10, имеющие нулевой резерв времени. Путь, проходящий через эти события, является критическим. Его продолжительность равна 10. На сетевом графике (см. рис. 2) отметим критический путь утолщенными стрелками.

Варианты исходных данных

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5	
I, A	2	I, A	2	I, A	2	I, A	2	I, A	3
I, E	1	I, H	1	I, E	3	I, H	3	I, B	0
A, H	1	A, H	4	A, K	4	I, B	2	A, B	4
A, E	3	H, B	8	A, E	1	A, H	4	A, M	3
H, B	5	H, E	2	E, H	5	B, E	4	B, H	1
H, M	0	B, C	2	H, M	0	E, H	0	H, K	2
E, M	4	B, M	0	H, B	3	E, K	5	H, E	3
B, K	2	E, M	3	B, M	2	H, M	3	E, K	0
M, K	2	M, K	5	K, M	4	K, M	1	M, C	4
K, C	3	K, C	1	M, C	7	M, C	6	K, C	5

Вариант 6	
I, B	2
I, A	1
A, B	2
B, K	3
A, H	4
H, K	1
H, M	2
K, E	2
M, E	0
E, C	6

Вариант 7	
I, B	2
I, E	3
I, A	2
A, E	1
B, K	4
E, M	4
M, K	0
M, H	2
K, H	1
H, C	5

Вариант 8	
I, B	2
I, A	3
B, E	1
B, H	0
A, H	3
H, M	1
H, K	2
E, C	4
M, C	2
K, C	3

Вариант 9	
I, B	2
B, K	1
B, E	0
K, E	3
K, M	0
E, A	5
A, H	4
H, M	3
H, C	3
M, C	6

Вариант 10	
I, A	7
A, H	2
A, B	0
A, E	3
E, B	1
H, M	0
B, M	2
B, K	3
M, C	4
K, C	5

Вариант 11	
I, A	2
I, E	3
A, H	0
E, B	1
E, K	2
B, H	4
H, K	5
K, M	3
K, C	2
M, C	2

Вариант 12	
I, A	7
A, H	5
H, B	1
H, K	2
K, P	0
B, E	3
B, K	8
E, P	4
H, C	2
P, C	3

Вариант 13	
I, K	2
I, B	3
K, A	1
K, P	0
K, H	0
A, H	2
B, E	4
E, P	2
H, C	3
P, C	1

Вариант 14	
I, B	2
I, E	3
H, B	1
E, H	8
E, K	0
H, P	9
H, M	7
M, K	5
K, P	4
P, C	6

Вариант 15	
I, H	2
I, A	3
A, B	1
B, H	0
B, M	5
B, E	6
H, K	7
M, K	6
E, K	4
K, C	3

Вариант 16	
I, A	2
I, E	1
A, H	1
H, B	5
H, M	1
E, A	0
E, M	4
B, K	2
M, K	2
K, C	3

Вариант 17	
I, A	1
I, H	3
A, E	1
H, B	8
H, E	2
B, C	2
B, M	0
E, M	3
M, K	5
K, C	1

Вариант 18	
I, A	3
I, E	4
A, K	5
A, H	2
E, H	6
H, M	0
H, B	4
B, M	3
K, M	5
M, C	7

Вариант 19	
I, A	2
I, H	3
I, B	2
A, M	9
B, E	4
E, H	0
E, K	5
H, M	3
K, M	1
M, C	6

Вариант 20	
I, A	2
I, E	1
A, H	1
A, E	3
H, B	5
H, M	0
E, M	4
B, K	2
M, K	2
K, C	3

Вариант 21	
I, B	2
I, A	1
A, K	2
B, K	3
A, H	4
H, K	0
H, M	2
K, E	2
M, E	1
E, C	6

Вариант 22	
I, B	2
I, E	3
I, A	2
A, M	4
B, K	4
E, M	4
M, K	0
M, H	2
K, H	3
H, C	5

Вариант 23	
I, B	2
I, A	3
B, E	1
A, H	3
H, M	1
H, E	0
H, K	2
E, C	5
M, C	2
K, C	3

Вариант 24	
I, B	2
I, H	9
B, K	1
B, E	1
K, M	0
E, A	5
A, H	4
H, M	3
H, C	3
M, C	6

Вариант 25	
I, A	7
I, E	9
A, H	2
A, E	3
E, B	1
H, M	0
B, M	2
B, K	3
M, C	4
K, C	5

Вариант 26	
I, A	2
I, E	3
A, H	7
E, B	1
E, K	2
B, H	4
H, K	0
K, M	3
K, C	2
M, C	2

Вариант 27	
I, A	7
I, E	9
A, H	5
H, B	1
H, K	2
K, P	0
B, E	3
B, K	8
E, P	4
P, C	3

Вариант 28	
I, K	2
I, B	3
K, A	1
K, H	0
A, H	2
B, E	4
B, C	6
E, P	2
H, C	3
P, C	1

Вариант 29	
I, B	2
I, E	3
B, H	1
E, H	8
E, K	0
H, P	9
H, M	7
M, K	5
K, C	4
P, C	6

Вариант 30	
I, H	2
I, A	3
A, B	1
B, K	0
B, M	5
B, E	6
H, K	7
M, C	6
E, K	4
K, C	3

6. ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ ЖОРДАНА – ГАУССА

Метод Жордана – Гаусса представляет собой совокупность удобных вычислительных алгоритмов, построенных на последовательном применении эквивалентных преобразований системы уравнений. Этот метод лежит в основе симплексного метода решения задач линейного программирования.

Основные определения

Пусть имеется система из *m* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{6.1}$$

Определение 1. Будем называть неизвестное *базисным*, если это неизвестное входит только в одно уравнение системы с коэффициентом плюс единица.

Определение 2. Если неизвестное не является базисным, то оно называется *свободным*.

Говорят, что система (6.1) приведена к единичному базису, если её можно записать в специфичном диагональном виде:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1\,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2\,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i + a'_{i\,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{in}x_n = b'_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a'_{m\,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Решением системы является вектор $\overline{X} = (x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_m,\ x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Здесь переменные $x_1,\ x_2, \ldots, x_m$ – базисные, а переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$ – свободные.

Определение 3. Решением системы линейных уравнений называется совокупность значений неизвестных, при которых удовлетворяются все уравнения системы, т.е. обращаются в тождества.

Среди всех решений особо выделяют базисные решения.

Определение 4. Решение, в котором свободные переменные принимают нулевые значения, называется *базисным*.

Итак, если система приведена к единичному базису, то соответствующее этому базису решение может быть записано по следующему правилу: свободные переменные приравниваются к нулю, а базисные переменные приравниваются к соответствующим свободным членам системы уравнений.

Метод Жордана – Гаусса позволяет привести систему уравнений к единичному базису. Все вычисления в методе производят в специальных таблицах Гаусса по следующей схеме:

1-й этап. Выбирают разрешающий элемент и выделяют разрешающую строку и разрешающий столбец. В качестве разрешающих строки и столбца берут соответственно строку и столбец, на пересечении которых стоит разрешающий элемент. На выбор разрешающего элемента накладывается два ограничения:

1) он должен быть отличен от нуля, так как на него нужно будет делить;
2) его нельзя брать в том уравнении, где уже стоит базисная переменная.

Практически лучше за разрешающий элемент брать 1 или (–1).

2-й этап. Заполнение новой таблицы начинается с разрешающей строки. Для этого все элементы этой строки делятся на разрешающий элемент. В разрешающем столбце расставляются нули.

3-й этап. Все обыкновенные элементы, т.е. элементы, не стоящие в разрешающей строке или разрешающем столбце, вычисляются по правилу диагонали прямоугольника. Оно даётся следующей схемой:

$$a_{ij} \ldots a_{ik}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad a'_{ek} = a_{ek} - \frac{a_{ej} \cdot a_{ik}}{a_{ij}},$$

$$a_{ej} \ldots a_{ek},$$

где a_{ij} – разрешающий элемент.

Контрольные элементы вычисляются двумя способами:

1) по правилу диагонали прямоугольника;
2) суммированием элементов по строкам таблицы.

Если результаты совпадают, то вычисления сделаны верно.

Шаги по методу Жордана – Гаусса делают до тех пор, пока можно выбрать разрешающий элемент. В результате может представиться три случая.

1-й случай. Все уравнения разрешились относительно каких-то переменных, т.е. система привелась к единичному базису, и при этом число неизвестных равно числу уравнений. В этом случае система имеет единственное решение. Его записывают из последней таблицы Гаусса. Для этого базисные переменные приравнивают к соответствующим свободным членам.

2-й случай. Все уравнения системы разрешились относительно каких-то переменных, но число неизвестных больше числа уравнений. В этом случае неизвестные будут делиться на базисные и свободные и система уравнений будет иметь множество решений. Свободные переменные могут принимать любые значения. Метод Жордана – Гаусса позволяет сразу записать формулы, с помощью которых можно получить любое решение системы. Для этого нужно каждую базисную переменную выразить через соответствующий свободный член и свободные переменные.

3-й случай. После проведения нескольких шагов процесс прерывается из-за так называемых неразрешённых уравнений. Они бывают двух типов.

1-й тип: $OX_1 + OX_2 + ... + OX_n = 0$.

Это очевидное тождество; уравнения такого типа выбрасываются из системы уравнений.

2-й тип: $OX_1 + OX_2 + ... + OX_n = b_l \neq 0$ – несовместное уравнение. В этом случае система не имеет решений.

Пример 1. Решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2X_1 - 3X_2 + X_3 + X_4 = 3, \\ X_1 + 2X_3 - X_4 = 3, \\ 3X_1 + X_2 + X_3 = 8, \\ 2X_2 - 3X_3 + 2X_4 = 3. \end{cases}$$

Вносим систему в таблицу Гаусса. Для контроля вычислений вводим контрольный столбец ($\sum$ i):

X_1	X_2	X_3	X_4	B_i	$\sum$ i
2	–3	1	1	3	4
1	0	2	–1	3	5
3	1	1	0	8	13
0	2	–3	2	3	4
0	–3	–3	3	–3	–6
1	0	2	–1	3	5
0	1	–5	3	–1	–2
0	2	–3	2	3	4
0	0	–18	12	–6	–2
1	0	2	–1	3	5
0	1	–5	3	–1	–2
0	0	7	–4	5	8
0	0	1	–2/3	1/3	2/3
1	0	0	1/3	7/3	11/3
0	1	0	–1/3	2/3	4/3
0	0	0	2/3	8/3	10/3
0	0	1	0	3	4
1	0	0	0	1	2
0	1	0	0	2	3
0	0	0	1	4	5

Система определённая, имеет единственное решение: $X_1 = 1; X_2 = 2; X_3 = 3; X_4 = 4$ или в векторном виде $\overline{X} = (1, 2, 3, 4)$.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4 = 1, \\ 3X_1 + 13X_2 + 13X_3 + 5X_4 = 3, \\ X_1 + 5X_2 + 3X_3 + X_4 = 7, \\ 3X_1 + 7X_2 + 7X_3 + 2X_4 = 12, \\ 4X_1 + 5X_2 + 6X_3 + X_4 = 19\,. \end{cases}$$

Вносим систему в таблицу Гаусса:

X_1	X_2	X_3	X_4	B_i	$\sum i$
1	2	3	1	1	8
3	13	13	5	3	37
1	5	3	1	7	17
3	7	7	2	12	31
4	5	6	1	19	35
1	2	3	1	1	8
0	7	4	2	0	13
0	3	0	0	6	9
0	1	–2	–1	9	7
0	–3	–6	–3	15	3
1	0	7	3	–17	–6
0	0	18	9	–63	–36
0	0	6	3	–21	–12
0	1	–2	–1	9	7
0	0	–12	–6	42	24
1	0	0	–1/2	15/2	8
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	3
0	0	1	1/2	–7/2	–2

Из таблицы видно, что второе и третье уравнения являются тождествами; их нужно убрать из рассмотрения. Оставшаяся система приведена к единичному базису, но переменные разделились на базисные (X_1, X_2, X_3) и свободные (X_4), поэтому она имеет бесчисленное множество решений, которые находятся по формулам:

$$\begin{cases} X_1 = 15/2 + 1/2\ X_4, \\ X_2 = 2, \\ X_3 = -7/2\ - 1/2\ X_4\ . \end{cases}$$

Задачи для аудиторной работы

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 = 3, \\ 5X_1 + 3X_3 = 2, \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 = 1. \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

2. $\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + 11X_3 + 5X_4 = 5, \\ X_1 + X_2 + 5X_3 + 2X_4 = 3, \\ 3X_1 + 2X_2 + 8X_3 + 4X_4 = 5, \\ 3X_1 + 4X_2 + 14X_3 + 9X_4 = 4. \end{cases}$

Ответ: $X_1 = 1$; $X_2 = -1$; $X_3 = 1$; $X_4 = -1$.

3. $\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4 = 1, \\ X_1 + X_2 + 2X_3 - X_4 = -3, \\ 3X_1 + 3X_2 + 8X_3 + X_4 = -3. \end{cases}$

Ответ: $X_1 = -10 + 5X_4$; $X_2 = 1$; $X_3 = 3 - 2X_4$.

4. $\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 4X_3 = 2, \\ X_1 + 2X_2 - 3X_3 = -4, \\ 4X_1 + 3X_2 - 2X_3 = -6. \end{cases}$

Ответ: система имеет бесчисленное множество решений:

$\begin{cases} X_1 = - X_3, \\ X_2 = 2X_3 - 2. \end{cases}$

Задачи для домашней работы

Решить следующие системы уравнений методом Жордана – Гаусса:

1. $\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 4X_3 = 4, \\ X_1 - 3X_2 - X_3 = -5, \\ 3X_1 - 2X_2 + 2X_3 = -1, \\ 5X_1 - X_2 + 6X_3 = 3. \end{cases}$

Ответ: $X_1 = 1$; $X_2 = 2$; $X_3 = 0$.

2. $\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 - 5X_3 = 7, \\ 6X_1 + 8X_2 - 14X_3 = 17, \\ 2X_1 - 2X_2 - X_3 = 1, \\ 5X_1 + 2X_2 - 16X_3 = 4. \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

3. $\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + X_4 = 2, \\ X_1 + X_2 + 7X_3 + X_4 = 6, \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 5X_4 = 8. \end{cases}$

Ответ: система имеет бесконечное множество решений:

$\begin{cases} X_1 = 44 - 77X_3, \\ X_2 = -24 + 40X_3, \\ X_4 = -14 + 30X_3. \end{cases}$

Задачи для самостоятельной работы

Решить следующие системы линейных уравнений методом Жордана – Гаусса:

1. $\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 + X_3 = 2, \\ 2X_1 + X_2 = 8, \\ 8X_1 - 5X_2 + 2X_3 = -4. \end{cases}$

Ответ: $X_1 = 0$; $X_2 = - 2X_1 + 8$; $X_3 = - 9X_1 + 18$.

2. $\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 3X_3 = 0, \\ X_1 - 2X_2 - 2X_3 = 7, \\ 4X_1 - 3X_2 - X_3 = 5. \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

3. $\begin{cases} 3X_1 - X_2 - 2X_3 = 1, \\ 2X_1 + X_3 = 5, \\ 2X_2 - 3X_3 = 3, \\ 4X_1 - 4X_2 = -1. \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

4. $\begin{cases} X_1 - 2X_2 + X_4 = 1, \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 1, \\ X_3 + 2X_4 = -2. \end{cases}$

Ответ: $X_1 = 0$; $X_2 = -13$; $X_3 = -7$; $X_4 = 0$.

5. $\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 + X_3 = 1, \\ X_1 + X_2 - 2X_3 = 7, \\ 5X_1 - 3X_3 = 2. \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

6. $\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0, \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 = 0, \\ 2X_3 + X_4 = 2. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} X_1 = -2 + 4X_3, \\ X_2 = 2 - 5X_3, \\ X_4 = 2 - 2X_3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2X_1 - 3X_2 + X_3 = -4, \\ 5X_1 + X_2 - 4X_3 = 7, \\ X_1 + 7X_2 - 6X_3 = 0. \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

8. $\begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ 3X_1 - X_2 = 5, \\ 5X_1 + 2X_2 + X_3 = 1. \end{cases}$

Ответ: $X_1 = 1; X_2 = -2; X_3 = 0.$

9. $\begin{cases} 5X_1 + 3X_2 + X_3 = 0, \\ X_1 + 2X_3 = 0, \\ X_2 - X_3 = 2, \\ 3X_1 + 2X_2 = 0. \end{cases}$

Ответ: $X_1 = -2; X_2 = 3; X_3 = 1.$

10. $\begin{cases} 5X_1 - 4X_2 + X_3 = 0, \\ 2X_2 - X_4 = 4, \\ 3X_1 - X_3 - 2X_4 = 0. \end{cases}$

Ответ: $X_1 = -1; X_2 = 0; X_3 = 5; X_4 = -4$.

11. $\begin{cases} 3X_1 - X_2 + 2X_3 + 5X_4 = -1, \\ 3X_1 - 3X_2 + 6X_3 + 15X_4 = -3, \\ 3X_1 - X_2 + 3X_3 + 14X_4 = -8. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} X_1 = 0, \\ X_2 = -13 - 13X_4, \\ X_3 = -7 - 9X_4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} X_1 + X_2 + 4X_3 + 4X_4 + 9X_5 = 10, \\ 2X_1 + 2X_2 + 17X_4 + 82X_5 = 84, \\ 2X_1 + 3X_3 - X_4 + 4X_5 = 6, \\ X_2 + 4X_3 + 12X_4 + 27X_5 = 27, \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 10X_5 = 11. \end{cases}$

Ответ: $X_1 = 1; X_2 = X_3 = X_4 = 0; X_3 = 5; X_5 = 1$.

Нахождение всех базисных и опорных решений систем линейных уравнений

Прежде чем приступать к нахождению базисных и опорных решений, необходимо ответить на вопросы:

1. Система уравнений приведена к единичному базису? Почему?
2. Относительно каких переменных разрешены уравнения?
3. Какие переменные являются свободными, а какие – базисными?
4. Сколько базисных решений имеет система?

Пример 1. Найти все базисные решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 - 9X_3 = 4, \\ X_1 - 3X_3 + X_4 = 2. \end{cases}$$

Базисные решения проще находить, если система уравнений приведена к единичному базису. В заданной системе переменные X_2 и X_4 являются базисными, т.е. относительно этих переменных система разрешена, а X_1 и X_3 являются свободными переменными. Данному базису соответствует базисное решение $\overline{X} = (0, 4, 0, 2)$, получаемое из системы, если в ней положить свободные неизвестные равными нулю. Базисные решения, соответствующие другим базисным переменным, получают, выполняя преобразования однократного замещения (табл. 6.1). Для этого нужно выбрать среди неединичных столбцов коэффициентов отличный от нуля разрешающий элемент и сделать один шаг Жордана – Гаусса. Тогда разрешающий столбец коэффициентов станет единичным и, наоборот, единичный столбец, имеющий координату 1 в уравнении, превратится в неединичный.

Это соответствует тому, что переменная, стоящая в столбце, где встретилась 1 в разрешающей строке, выйдет из базиса. Удобно указанные расчеты проводить в таблицах Гаусса. Каждому единичному базису соответствует своё базисное решение. И таких базисных решений должно быть не более C_m^k, где *m* – число неизвестных в системе уравнений; *k* – число базисных переменных. При выполнении преобразований однократного замещения нужно следить за тем, чтобы в процессе не повторялся ранее встречающийся базис.

Таблица 6.1

Номер итерации	X_1	X_2	X_3	X_4	B_i	Базисные решения
Исходная система	3 1	1 0	–9 –3	0 1	4 2	$\overline{X_1} = \{0,4,0,2\}$
1	0 1	1 0	0 –3	–3 1	–2 2	$\overline{X_2} = \{2, -2,0,0\}$
2	0 –1/3	1 0	0 1	–3 –1/3	–2 –2/3	$\overline{X_3} = \{0, -2, -2/3, 0\}$
3	0 –1/3	–1/3 –1/9	0 1	1 0	2/3 –4/9	$\overline{X_4} = \{0,0, -4/9,2/3\}$
4	0 1	–1/3 1/3	0 –3	1 0	2/3 4/3	$\overline{X_5} = \{4/3,0,0,2/3\}$

Всего таким образом удалось выполнить 4 преобразования однократного замещения, получив при этом 5 (включая исходное) базисных решений. Дальнейший выбор отличного от нуля разрешающего элемента приведёт к уже ранее полученным базисным решениям.

Пример 2. Найти все опорные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} X_1 - X_3 + 2X_4 = 4, \\ \quad X_2 + 2X_3 + X_4 = 12. \end{cases}$$

Определение. Опорным решением системы линейных уравнений называется такое базисное решение, которое содержит только неотрицательные значения.

Решение. Рассматриваемая система может иметь $C_4^2 = 6$ базисных решений, однако только некоторые из них имеют все неотрицательные значения неизвестных, т.е. являются опорными. Если найдены все базисные решения, то среди них можно выбрать опорные решения, но это не самый короткий путь. Гораздо проще, если разрешающий элемент выбирать из дополнительных условий. Тогда те же преобразования однократного замещения обеспечат переход не просто к базисным, а к опорным решениям. Эти дополнительные условия заключаются в следующем:

1) разрешающий столбец выбирается так, чтобы в нём оказался хотя бы один положительный элемент;

2) разрешающая строка выбирается из условия, чтобы отношение правых частей к положительным элементам выбранного разрешающего столбца было наименьшим.

После выбора разрешающего элемента дальнейшие вычисления ведутся согласно обычным правилам преобразований однократного замещения. Как и при нахождении базисных решений, здесь также необходимо следить за тем, чтобы не возвращаться к уже найденным опорным решениям (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Номер итерации	X_1	X_2	X_3	X_4	B_i	Базисные решения
Исходная система	1 0	0 1	–1 2	2 1	4 12	$\overline{X_1} = \{4,12,0,0\}$
1	0 1	1/2 1/2	0 1	5/2 1/2	10 6	$\overline{X_2} = \{10,0,6,0\}$
2	2/5 –1/5	1/5 2/5	0 1	1 0	4 4	$\overline{X_3} = \{0,0,4,4\}$
3	1/2 –1/2	0 1	–1/2 5/2	1 0	2 10	$\overline{X_4} = \{0,10,0,2\}$

На исходном этапе выбираем за разрешающий 3-й столбец, имеющий один положительный элемент. Для выбора разрешающий строки не надо вычислять отношения, так как она заранее задается единственным положительным элементом. После выполнения одной итерации с выбранным разрешающим элементом $a_{23} = 2$ получаем опорное решение $\overline{X_2}$.

Далее выбираем 4-й разрешающий столбец, имеющий положительные элементы $a_{14} = 5/2$ и $a_{24} = 1/2$ и первую разрешающую строку $\left(\min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\} = \min\left\{\frac{10}{5/2}; \frac{6}{1/2}\right\} = 4\right)$.

После выполнения 2-й итерации с разрешающим элементом $a_{14} = 5/2$ получаем новое опорное решение $\overline{X_3}$. Аналогично после 3-й итерации находим опорное решение $\overline{X_4}$. Здесь при выборе разрешающего элемента надо следить за тем, чтобы не было повторов уже найденных опорных решений. Действительно, если за разрешающий взять 1-й столбец, то он содержит всего один положительный элемент $a_{11} = 2/5$, который и является разрешающим. Но преобразование с этим элементом приведёт к замене базисной переменной X_4 и X_1, что соответствует опорному решению $\overline{X_2}$.

Если выбрать за разрешающий 2-й столбец, то разрешающей строкой будет вторая строка $\left(\min\left\{\frac{4}{1/5}; \frac{4}{2/5}\right\} = 10\right)$. В этом случае произойдёт замещение базисной переменной X_3 на X_2, что соответствует новому опорному решению $\overline{X_4}$.

Больше опорных решений система не имеет, так как возможный выбор разрешающего элемента в 1-м ($a_{11} = 1/2$) или в 3-м ($a_{23} = 5/2$) столбцах после 3-й итерации приведёт соответственно к ранее найденным опорным решениям $\overline{X_1}$ или $\overline{X_3}$.

Задачи для аудиторной работы

1. Найти все базисные решения системы:

$$\begin{cases} 2X_1 - X_3 - X_4 = 4, \\ X_2 + 3X_3 + 2X_4 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{2,3,0,0\}$,

$\overline{X}_2 = \{0,15,-4,0\}$,

$\overline{X}_3 = \{0,11,0,-4\}$,

$\overline{X}_4 = \{11/4,0,0,3/2\}$,

$\overline{X}_5 = \{5/2,0,1,0\}$,

$\overline{X}_6 = \{0,0,11,-15\}$.

2. Найти все опорные решения системы:

$$\begin{cases} -2X_1 + 3X_2 + X_3 = 9, \\ X_1 + X_2 + X_4 = 8, \\ 3X_1 - 2X_2 + X_5 = 9. \end{cases}$$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{0,0,9,8,9\}$,

$\overline{X}_2 = \{3,0,15,5,0\}$,

$\overline{X}_3 = \{5,3,10,0,0\}$,

$\overline{X}_4 = \{13,5,0,0,10\}$,

$\overline{X}_5 = \{0,3,0,5,15\}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти все опорные решения следующих систем уравнений:

1. $\begin{cases} -2X_1 + 3X_2 + X_3 = 9, \\ 2X_1 + 5X_2 + X_4 = 31, \\ 3X_1 - X_2 + X_5 = 21. \end{cases}$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{0,0,9,31,21\}$,

$\overline{X}_2 = \{8,3,16,0,0\}$,

$\overline{X}_3 = \{0,3,0,16,24\}$,

$\overline{X}_4 = \{7,0,23,17,0\}$,

$\overline{X}_5 = \{3,5,0,0,17\}$.

2. $\begin{cases} X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 7X_4 = 15, \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 10. \end{cases}$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{3,4,0,0\}$,

$\overline{X}_2 = \{0,1,3.0\}$,

$\overline{X}_3 = \{0,0,2,1\}$,

$\overline{X}_4 = \{1,0,0,2\}$.

3. $\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 = 7, \\ 5X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4 = 11. \end{cases}$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{0,0,3,4\}$,

$\overline{X}_2 = \{0,3,0,1\}$,

$\overline{X}_3 = \{1,2,0,0\}$,

$\overline{X}_4 = \{2,0,1,0\}$.

4. $\begin{cases} 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 = 14, \\ 6X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_4 = 18. \end{cases}$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{0,0,4,6\}$,

$\overline{X}_2 = \{0,4,0,2\}$,

$\overline{X}_3 = \{1,3,0,0\}$,

$\overline{X}_4 = \{2,0,2,0\}$.

5. $\begin{cases} 3X_1 + 5X_2 + 2X_3 + X_4 = 14, \\ 4X_1 + 10X_2 + X_3 + 3X_4 = 22. \end{cases}$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{0,0,4,6\}$,

$\overline{X}_2 = \{4,0,0,2\}$,

$\overline{X}_3 = \{0,2,2,0\}$,

$\overline{X}_4 = \{3,1,0,0\}$.

6. $\begin{cases} 3X_1 - 3X_2 + 4X_3 - 2X_4 = 6, \\ -X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 1. \end{cases}$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{8,0,0,9\}$,

$\overline{X}_2 = \{0,0,4,5\}$,

$\overline{X}_3 = \{0,2,3,0\}$,

$\overline{X}_4 = \{5,3,0,0\}$.

7. $\begin{cases} -X_1 + 2X_2 + X_3 + 6X_4 = 14, \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 2X_4 = 10. \end{cases}$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{4,0,0,3\}$,

$\overline{X}_2 = \{0,4,0,1\}$,

$\overline{X}_3 = \{0,0,2,2\}$.

8. $$\begin{aligned} X_1 + X_3 - X_4 - X_5 &= 3, \\ -X_1 + X_3 + 3X_4 + 3X_5 &= 1, \\ X_2 + X_3 + 3X_4 + X_5 &= 13. \end{aligned}$$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{0,8,4,0,1\}$,

$\overline{X}_2 = \{1,11,2,0,0\}$,

$\overline{X}_3 = \{5,7,0,2,0\}$,

$\overline{X}_4 = \{8,0,0,4,1\}$,

$\overline{X}_5 = \{0,0,7,1,3\}$.

9. $$\begin{cases} X_1 - X_2 - 2X_4 + 4X_5 = 4, \\ X_2 - X_3 + 2X_4 + 2X_5 = 12, \\ X_2 + X_3 + 4X_4 - 4X_5 = 16. \end{cases}$$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{16,8,0,2,0\}$,

$\overline{X}_2 = \{18,14,2,0,0\}$,

$\overline{X}_3 = \{0,0,0,5,1\}$,

$\overline{X}_4 = \{0,0,8,6,4\}$,

$\overline{X}_5 = \{0,20,20,0,6\}$.

Найти все базисные решения следующей системы уравнений:

10. $$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = 1, \\ -X_2 + X_4 + X_5 = 4, \\ 3X_2 - X_3 - 2X_4 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\overline{X}_1 = \{1,0,-2,0,4\}$,

$\overline{X}_2 = \{1,0,-10,4,0\}$,

$\overline{X}_3 = \{9,-4,-14,0,0\}$,

$\overline{X}_4 = \{-19,10,0,14,0\}$,

$\overline{X}_5 = \{1,0,0,-1,5\}$,

$\overline{X}_6 = \{-1/3,2/3,0,0,14/3\}$,

$\overline{X}_7 = \{0,1/2,-1/2,0,9/2\}$,

$\overline{X}_8 = \{0,1/2,0,-1/4,19/4\}$.

7. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Формулировка задачи линейного программирования

Найти вектор переменных задачи $\overline{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, который удовлетворяет системе линейных ограничений (уравнений и неравенств) и обеспечивает экстремальное (максимальное или минимальное) значение линейной целевой функции $Z(X)$.

1. Общая форма записи в компактном виде:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \text{ -> } \max\ (\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,\ldots,l);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = l, l+1,\ldots,m);\ x_j \ge 0; j = \overline{1,n}.$$

2. Симметричные формы записи в компактном виде:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \text{ -> } \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \text{ -> } \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \ge 0 \quad (i = \overline{1,n}).$$

3. Каноническая форма записи в компактном виде:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \text{ -> } \max\ (\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m});\ x_j \ge 0; \quad (j = \overline{1,n}).$$

Определение 1. Вектор $\overline{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ называется допустимым решением (планом) задачи, если он удовлетворяет системе ограничений задачи и условиям неотрицательности.

Определение 2. Оптимальным решением (планом) задачи называется допустимое решение $\overline{X^*} = \{X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*\}$, которое обеспечивает экстремальное значение целевой функции.

Теорема 1. Целевая функция задачи линейного программирования достигает своего максимального (минимального) значения в угловой точке множества допустимых решений. Причем если целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение более чем в одной угловой точке, то она достигает того же значения в любой точке, лежащей на отрезке, соединяющем эти угловые точки.

Теорема 2. Каждое опорное решение задачи линейного программирования является угловой точкой множества допустимых решений.

Графический метод решения задач линейного программирования с двумя переменными, имеющих симметричную форму записи:

$$Z(x) = C_1x_1 + C_2x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \quad x_1,x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Графический метод основывается на возможности в случае двух переменных изобразить на рисунке область (множество) допустимых решений и определить, в какой из её угловых точек целевая функция достигает экстремального решения.

Область допустимых решений задачи строится как пересечение (общая часть) областей решений каждого из заданных ограничений. Областью решений линейного неравенства $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$ является одна из полуплоскостей, на которые делится вся координатная плоскость прямой $a_1x_1 + a_2x_2 = b$.

Область допустимых решений задачи является общей частью полуплоскостей – областей решений каждого из неравенств системы ограничений.

Угловые точки области допустимых решений, в которых целевая функция задачи достигает экстремального значения, определяется с помощью линий уровня.

Уравнение линии уровня имеет вид

$$C_1X_1 + C_2X_2 = \text{const}.$$

Теорема 3. Значение целевой функции $Z(x) = C_1X_1 + C_2X_2$, принимаемое в точках линии уровня, увеличивается, если линию уровня перемещать в направлении своей нормали $\overline{N}(C_1,C_2)$ параллельно некоторому её начальному положению, и убывает при перемещении линии уровня в противоположном направлении.

Таким образом, алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом заключается в следующем:

1) строится область допустимых решений (многоугольник планов);
2) строится вектор нормали $\overline{N}(C_1,C_2)$ с точкой приложения вначале координат;
3) перпендикулярно вектору $\overline{N}$ проводится одна из линий уровня, пересекающая область допустимых решений;
4) линия уровня перемещается параллельно самой себе в направлении, указанном вектором $\overline{N}$ в задаче на max, или в противоположном направлении в задаче на min до положения последней угловой точки;

5) решая совместно уравнения прямых, пересекающихся в найденной угловой точке, находим её координаты $X^* = (X_1^*, X_2^*)$, а затем вычисляем оптимальное значение целевой функции $Z_{max}(X^*)$ или $Z_{min}(X^*)$.

Пример 1.

$Z(x) = 2X_1 + 4X_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2X_1 + 3X_2 \le 12 \text{ –прямая } (1), \\ X_1 + X_2 \le 9 \text{ –прямая } (2), \\ 3X_1 - 2X_2 \le 12 \text{ –прямая } (3), \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение:

1-й шаг. Строим прямые $-2X_1 + 3X_2 = 12$; $X_1 + x_2 = 9$; $3X_1 – 2X_2 = 12$; $X_1 = 0$; $X_2 = 0$.

Исходя из геометрического смысла неравенств каждое из них определяет полуплоскость вместе с граничной прямой. Общая часть этих полуплоскостей и образует область допустимых решений.

2-й шаг. Строим вектор $\overline{N}(2,4)$ с точкой приложения в начале координат.

3-й шаг. Перпендикулярно вектору нормали $\overline{N}$ проводим линию уровня, пересекающую область допустимых решений.

4-й шаг. Перемещаем линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{N}$ до последней угловой точки M, в которой функция $Z(x)$ достигает максимума.

5-й шаг. Точка M является точкой пересечения прямых, соответствующих первому и второму неравенствам. Определим координаты этой точки (рис. 7.1):

$$\begin{cases} -2X_1 + 3X_2 = 12, \\ X_1 + X_2 = 9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 3, \\ X_2 = 6. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 30$ в точке $M(3,6)$.

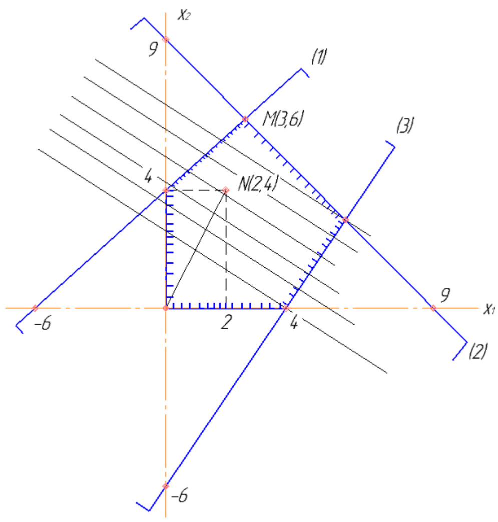


Рис. 7.1

Пример 2.

$Z(x) = 4X_1 - 3X_2 \to \min$

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \geq 0 \text{ –прямая} & (1), \\ -X_1 + 2X_2 \leq 8 \text{ –прямая} & (2), \\ X_1 - 3X_2 \leq 3 \text{ –прямая} & (3), \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{min}(x) = -7$ в точке $M(2;5)$ (рис. 7.2).

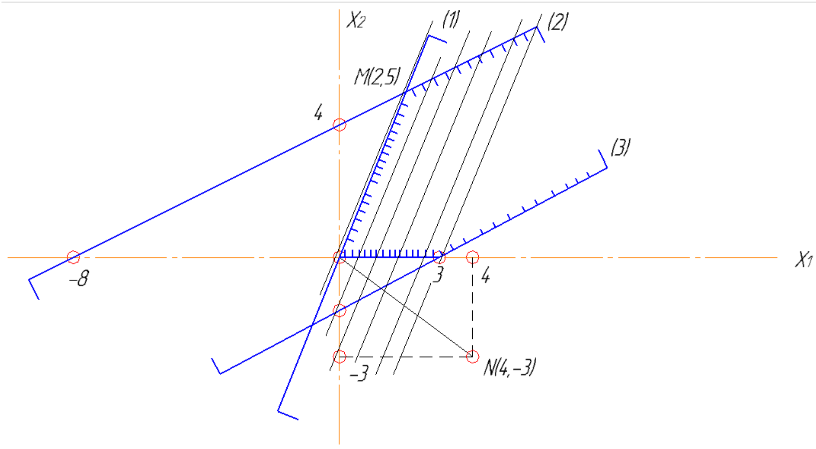


Рис. 7.2

Пример 3.

$Z(x) = X_1 + 3X_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 \leq 2 \text{ –прямая} & (1), \\ -X_1 + 2X_2 \leq 7 \text{ –прямая} & (2), \\ X_1 + 3X_2 \leq 18 \text{ –прямая} & (3), \\ 4X_1 - 3X_2 \leq 12 \text{ –прямая} & (4), \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -X_1 + 2X_2 = 7 \\ X_1 + 3X_2 = 18 \end{cases}$$

$5X_2 = 25$ $X_2 = 5, X_1 = 3,$ $M(3;5).$

$$+\begin{cases} X_1 + 3X_2 = 18 \\ 4X_1 - 3X_2 = 12 \end{cases}$$

$5X_1 = 30$ $X_1 = 6, X_2 = 4, P(6;4).$

Линия уровня проходит через одну из сторон многоугольника допустимых решений, поэтому задача имеет бесконечное множество решений (отрезок МР) (рис. 7.3):

$\max Z(x) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 18.$

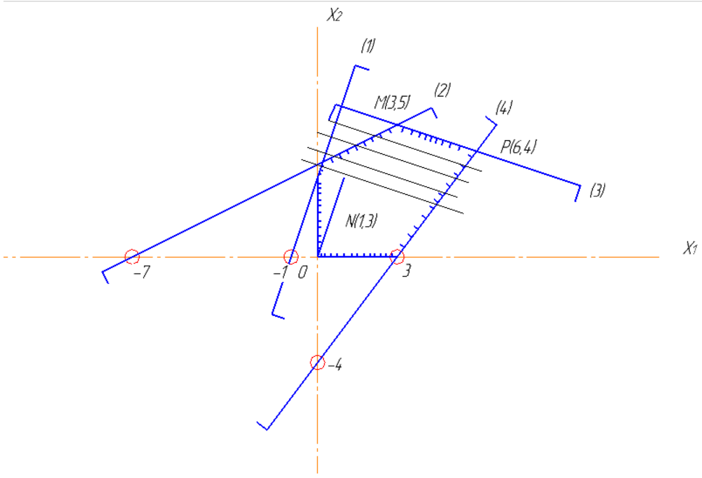


Рис. 7.3

Пример 4.

$Z(x) = X_1 + 4X_2 \text{ -> } \max$

$$\begin{cases} -4X_1 + X_2 \le 4 \text{ –прямая} & (1), \\ -X_1 + X_2 \le 5 \text{ –прямая} & (2), \\ -X_1 + 2X_2 \ge 2 \text{ –прямая} & (3), \\ 3X_1 + 4X_2 \ge 12 \text{ –прямая} & (4), \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $\max Z(x) \text{ -> } \infty$.

Задача не имеет решения, так как линии уровня при перемещении в направлении нормали уходят в бесконечность ввиду того, что область допустимых решений является неограниченным множеством (рис. 7.4).

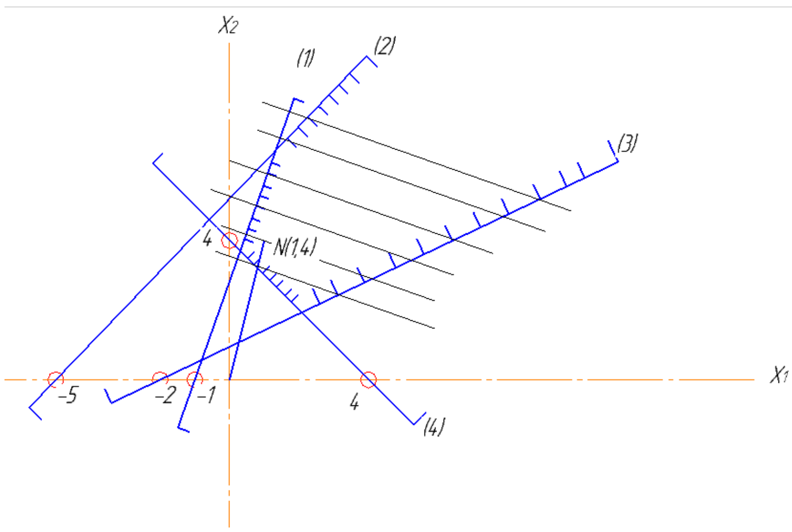


Рис. 7.4

Графический метод решения задач линейного программирования с *n* переменными

Каноническая задача линейного программирования с *n* неизвестными может быть решена графическим методом, если выполняется условие: $n - m = 2$, где m – число уравнений-ограничений. В этом случае, используя метод Жордана – Гаусса, необходимо систему уравнений-ограничений привести к разрешённому виду и исключить неизвестные из целевой функции. Затем, учитывая неотрицательность разрешенных неизвестных, отбросить их и перейти к системе ограничений-неравенств.

Пример 5.

Решить систему графическим методом:

$$Z(x) = -X_1 - 2X_2 + X_3 + 3X_4 + 7X_5 \to \min$$

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 - 3X_5 = 4 \text{ –прямая} \quad (1), \\ X_1 + X_2 + 4X_3 + X_4 - 8X_5 = 3 \text{ –прямая} \quad (2), \\ X_2 + X_3 - 4X_5 = -4 \text{ –прямая} \quad (3), \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$N = 5$; $m = 3$; $n - m = 2$.

Решение. С помощью таблицы Гаусса приводим систему к разрешенному виду. Одновременно исключаем из целевой функции базисные переменные. Для этого коэффициенты при переменных в целевой функции записываем в таблицу четвертой строкой как коэффициенты некоторого дополнительного уравнения с правой частью, равной нулю.

–1	1	1	2	–3	4
1	1	4	1	–8	3
0	1	1	0	–4	–4
–1	–1	1	3	7	0
–1	1	1	2	–3	4
2	0	3	–1	–5	–1
1	0	0	–2	–1	–8
–2	0	2	5	4	4
0	1	1	0	–4	–4
0	0	3	3	–3	15
1	0	0	–2	–1	–8
0	0	2	1	2	–12
0	1	0	–1	–3	–9
0	0	1	1	–1	5
1	0	0	–2	–1	–8
0	0	0	–1	4	–22

Коэффициент уравнений системы ограничений

Коэффициент целевой функции

В полученной системе ограничений отбрасываем неотрицательные разрешённые переменные X_1, X_2, X_3 и заменяем равенства неравенствами. В целевую функцию вводим свободный член –22, полученный на месте нуля в столбце правых частей. При этом изменяем его знак на противоположный. Получаем задачу линейного программирования с двумя переменными, которую решаем графическим методом (рис. 7.5):

$$Z(x) = -X_4 + 4X_5 + 22 \to \min.$$

$$\begin{cases} X_4 + 3X_5 \geq 9 \text{ –прямая} & (1), \\ X_4 - X_5 \leq 5 \text{ –прямая} & (2), \\ 2X_4 + X_5 \geq 8 \text{ –прямая} & (3), \\ X_4, X_5 \geq 0. \end{cases}$$

$$-\begin{cases} X_4 + 3X_5 = 9, \\ X_4 - X_5 = 5. \end{cases}$$

$4X_5 = 4; \quad X_5^* = 1; X_4^* = 6.$

$\min Z(x^*) = -1 \bullet 6 + 4 \bullet 1 + 22 = 20.$

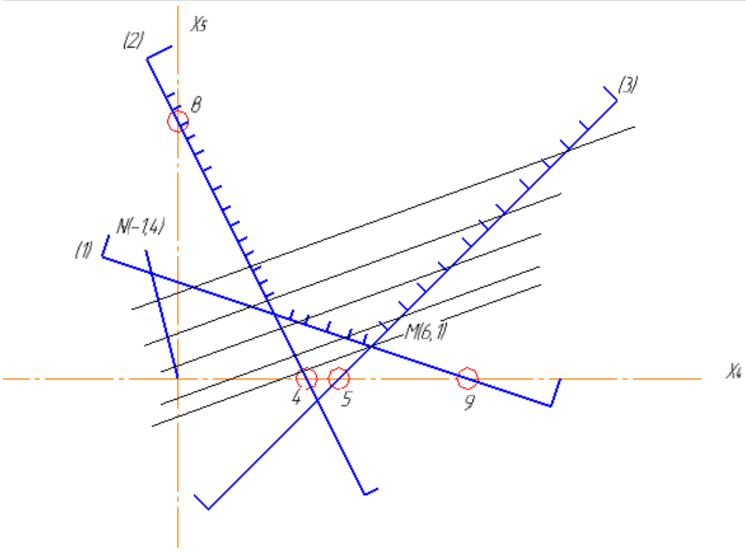


Рис. 7.5

Значения остальных переменных оптимального решения исходной задачи определяем исходя из системы ограничений, записанных в разрешённом виде: $X_1^* = 5,\ X_2^* = 0,\ X_3^* = 0.$

$Z_{min} = 20$ при $\overline{X^*} = \{5,0,0,6,1\}$.

Задачи для аудиторной работы

Решить систему графическим методом:

1. $Z(x) = 4X_1 + 2X_2 \text{ -> max}$

$$\begin{cases} -X_1 + 3X_2 \leq 9, \\ 2X_1 + 3X_2 \leq 18, \\ 2X_1 - X_2 \leq 10, \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 28$ при $X_1 = 6,\ \ X_2 = 2.$

2. $Z(x) = 3X_1 - 2X_2 \to \max$

$$\begin{cases} 7X_1 + 2X_2 \ge 14, \\ -X_1 + 2X_2 \le 2, \\ 7X_1 + 10X_2 \le 28, \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 12$ при $X_1 = 4,\ \ X_2 = 0$.

3. $Z(x) = 2X_1 - X_2 + X_3 - 3X_4 + 4X_5 \to \max$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 3X_3 - 18X_4 + 2X_5 = 4, \\ 2X_1 - X_2 + 4X_3 - 21X_4 + 4X_5 = 22, \\ 3X_1 - 2X_2 + 8X_3 - 43X_4 + 11X_5 = 38, \\ X_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 58$ при $X_1 = \frac{104}{5},\ \ X_2 = X_3 = 0, X_4 = 2,\ X_5 = 28/5$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить системы графическим методом:

1. $Z(x) = 2X_1 + 4X_2 \to \max$

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 \le 4, \\ X_1 + 2X_2 \le 14, \\ X_1 - 2X_2 \le 12, \\ X_1,\ X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 28$, M(2,6);K(8,3).

2. $Z(x) = -3X_1 - 4X_2 \to \min$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \le 14, \\ X_1 + X_2 \le 9 \\ -X_1 + 4X_2 \ge -4 \\ X_1 \ge 0,\ 0 \le X_2 \le 6. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{min} = -32$, M(4,5).

3. $Z(x) = X_1 - 5X_2 \to \min$

$$\begin{cases} -X_1 + 3X_2 \le 9, \\ 2X_1 + X_2 \ge 10, \\ -X_1 + 4X_2 \ge 2, \\ X_1,\ X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{min} = -\infty$.

4. $Z(x) = -15X_1 + 50X_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3X_1 - 10X_2 \ge -15, \\ 3X_1 + 5X_2 \le 30, \\ X_1 - 3X_2 \le 3, \\ X_1,\ X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 75$, M(0,3/2);K(5,3).

5. $Z(x) = -X_1 + 4X_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \le 12, \\ 2X_1 - X_2 \le 0, \\ -3X_1 + 2X_2 \le 3, \\ X_1 + 2X_2 \ge 3, \\ X_1,\ X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 27/2$, M(3/2, 15/4).

6. $Z(x) = 2X_1 + 3X_2$ -> max

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \le 4, \\ 3X_1 + X_2 \ge 4, \\ X_1 + 5X_2 \ge 4, \\ 0 \le X \le 3_1,\ 0 \le X_2 \le 3. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 11$, M(1,3).

7. $Z(x) = X_1 - X_2$ -> max

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 \le 2, \\ X_1 - X_2 \le 3, \\ X_1 + X_2 \ge 1, \\ X_1 + X_2 \le 2, \\ X_1,\ X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 3$, M(2,1);K(5/2, - 1/2).

8. $Z(x) = 60X_1 + 10X_2$ -> max

$$\begin{cases} 3X_1 - X_2 \ge 0, \\ 2X_1 + X_2 \ge 10, \\ X_1 + 2X_2 \ge 8, \\ X_1,\ X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = +\infty$.

9. $Z(x) = X_1 - 2X_2$ -> min

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \ge 2, \\ X_1 - X_2 \le 1, \\ X_1 - 2X_2 \le 0, \\ X_1,\ X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{min} = 0$, M(4/3, 2/3);K(2,1).

10. $Z(x) = X_1 - 4X_2$ -> max

$$\begin{cases} 4X_1 - X_2 \ge -4, \\ 3X_1 - 5X_2 \le 15, \\ X_1 + 4X_2 \ge 4, \\ X_1,\ X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 5$, M(5,0).

11. $Z(x) = 15X_1 + 10X_2$ -> max

$$\begin{cases} 6X_1 - X_2 \ge 3, \\ -X_1 + 2X_2 \le 8, \\ 3X_1 + 2X_2 \le 24, \\ X_1 - X_2 \le 3, \\ X_1 + 2X_2 \ge 2, \\ X_1,\ X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 20$, M(1,6);K(6,3).

12. $Z(x) = 3X_1 + 2X_2$ -> max

$$\begin{cases} 3X_1 - X_2 \ge 0, \\ X_1 - X_2 \ge -2, \\ 4X_1 - X_2 \le 16, \\ 2X_1 - X_2 \le 6, \\ X_1 \ge 7;\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

Ответ: Система ограничений несовместна.

13. $Z(x) = 2X_1 + 5X_2$ -> min

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \geq 4, \\ -X_1 + X_2 \leq 4, \\ X_1 + 2X_2 \leq 14, \\ -X_1 + 3X_2 \geq 5, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{min} = 12$, M(1,2).

14. $Z(x) = 2X_1 - X_2$ -> max

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 \leq 2, \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 16, \\ X_1 + X_2 \leq 10, \\ 2X_1 - X_2 \leq 8, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 8$, M(5,2);K(6,4).

15. $Z(x) = 2X_1 + 4X_2$ -> min

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \geq 9, \\ X_1 + 2X_2 \leq 15, \\ X_1 + 2X_2 \geq 9, \\ -2 + X_2 \leq 15, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{min} = 18$, M(3,3);K(7,1).

16. $Z(x) = -3X_1 + 2X_2$ -> max

$$\begin{cases} -3X_1 + 2X_2 \leq 12, \\ 3X_1 - 2X_2 \leq 6, \\ 3X_1 + X_2 \geq 3, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 12$, M(0,6);K(∞,∞).

17. $Z(x) = 3X_1 + 2X_2$ -> max

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \geq 0, \\ -X_1 + 2X_2 \leq 3, \\ X_2 \leq 3, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = +\infty$.

18. $Z(x) = 3X_1 - X_2$ -> max

$$\begin{cases} -3X_1 + 2X_2 \leq 6, \\ 2X_1 - 3X_2 \leq 6, \\ 0 \leq X_1 \leq 6, \\ 0 \leq X_2 \leq 6. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 16$, M(6,2).

19. $Z(x) = X_1 + X_2 - X_4$ -> min

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 = 5, \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 3X_4 = 9, \\ X_j \geq 0; j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{min} = -2$; $\overline{X^*} = \{0,0,1,2\}$.

20. $Z(x) = -X_1 - X_2 + X_4$ -> max

$$\begin{cases} -X_1 - X_2 + 2X_3 + 4X_4 = 10, \\ -2X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 2, \\ X_j \ge 0; j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{min} = 1$; $\overline{X^*} = \{0,0,3,1\}$.

21. $Z(x) = X_1 - X_2 - X_3 + 3X_4 - 2X_5 \to max$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - 3X_4 + 4X_5 = 11, \\ X_2 + X_3 + 3X_4 + 6X_5 = 33, \\ -2X_1 - 2X_2 + X_3 + 10X_4 - 5X_5 = 2, \\ X_j \ge 0; j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 5$; $\overline{X^*} = \{4,0,0,3,4\}$.

22. $Z(x) = 2X_1 + X_2 - 4X_3 + X_4 + X_5 \to min$

$$\begin{cases} -5X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 3, \\ X_1 - 2X_3 + X_4 + X_5 = 9, \\ 4X_1 - 5X_3 - 2X_4 + X_5 = 0, \\ X_j \ge 0; j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{min} = -7$; $\overline{X^*} = \{1,0,4,0,16\}$.

23. $Z(x) = -X_1 + 7X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \to max$

$$\begin{cases} 4X_1 + 4X_2 + X_3 + X_4 = 12, \\ 3X_2 + X_4 + X_5 = 18, \\ 7X_1 - 3X_2 - 2X_3 + X_5 = 2, \\ X_j \ge 0; j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 42$; $\overline{X^*} = \{4,6,4,0,0\}$; $\overline{X^*} = \{10,0,34,18,0\}$.

24. $Z(x) = X_1 - 8X_2 + X_3 - X_4 + X_5 \to max$

$$\begin{cases} X_1 + 8X_2 - X_3 + X_4 = 42, \\ -4X_1 + 6X_2 + X_4 + X_5 = 48, \\ 8X_1 - 7X_2 - X_3 + 2X_5 = 3, \\ X_j \ge 0; j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = +\infty$.

25. $Z(x) = X_1 + X_2 \to max$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \le 14, \\ -5X_1 + 3X_2 \le 15, \\ 4X_1 + 6X_2 \ge 24, \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 14$, $M(14,0)$.

26. $Z(x) = X_1 + 2X_2 \to max$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \le 12, \\ -X_1 + 3X_2 \le 6, \\ 2X_1 + 4X_2 \ge 16, \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 12$, $M(4,8;3,6)$.

27. $Z(x) = -2X_1 + X_2 \to min$

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 \le 12, \\ -X_1 + 2X_2 \le 8, \\ 2X_1 + 3X_2 \ge 6, \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{min} = -11$, $M(10,9)$.

28. $Z(x) = -X_1 + 4X_2 + 2X_4 - X_5 \to max$

$$\begin{cases} X_1 + 5X_2 + X_3 = 5, \\ -X_1 + X_2 + X_4 = 4, \\ X_1 + X_2 + X_5 = 8, \\ X_j \geq 0; j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $Z_{max} = 22$; $\overline{X^*} = \{2,6,33,0,0\}$.

29. $Z(x) = 3X_1 + 2X_2 \text{ -> } \min$

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \geq 18, \\ 2X_1 + X_2 \leq 6, \\ 2X_1 - X_2 \geq 2, \\ X_1 - 2X_2 \geq 2, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: Система ограничений несовместна.

8. ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Симплексный метод является основным методом решения общей задачи линейного программирования. Это универсальный метод; его можно применять для решения любой задачи линейного программирования. Метод реализует идею последовательного улучшения решения, применяется к задачам, приведённым к каноническому виду, и состоит из двух частей.

1-я часть – нахождение исходного опорного решения. Геометрически это соответствует нахождению одной из вершин многоугольника допустимых решений, безразлично какой.

2-я часть – последовательный переход от полученного опорного решения к новому, лучшему опорному решению. Геометрически это соответствует переходу к такой вершине многоугольника, в которой значение целевой функции больше (в задачах на максимум), чем в предыдущей точке. Повторяя этот переход конечное число раз, приходим к оптимальному решению.

Основу вычислительной схемы симплексного метода составляет метод Жордана – Гаусса.

Имеются два условия, по которым можно судить, найдено опорное решение или нет:

1-е условие. Каждое уравнение системы ограничений должно быть разрешено относительно какой-либо переменной, т.е. система ограничений должна быть приведена к единичному базису.

2-е условие. Базисные переменные должны принимать только положительные значения.

Если эти два условия выполняются, то можно сразу записать одно из опорных решений. Для этого свободные переменные приравниваются к нулю, а базисные переменные – к соответствующим свободным членам. Если эти два условия не выполняются, то первая часть симплекса распадается на следующие этапы.

1-й этап. По условию задачи составляется её математическая модель.

2-й этап. Составленная модель приводится к каноническому виду. Это делается путём введения балансовых переменных, которые считаются всегда положительными. Они вводятся только в ограничения-неравенства, чтобы обратить их в уравнения, и входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами.

3-й этап. Приведение системы к единичному базису с помощью метода Жордана – Гаусса. После выполнения 3-го этапа условие опорного решения будет выполнено.

4-й этап. Освобождение от отрицательных свободных членов, т.е. обеспечение выполнения 2-го условия опорного решения. Это осуществляется по следующему правилу:

Правило. В системе уравнений среди отрицательных свободных членов выбирается наибольший по абсолютной величине свободный член, и уравнение, которое ему соответствует, умножается на –1, а затем оно прибавляется почленно к тем уравнениям системы, которые содержат отрицательные правые части. Уравнения с положительными правыми частями переписываются в новую систему без изменений.

В результате применения этого правила в преобразованной системе все свободные члены станут положительными, но нарушится единичный базис. Он будет нарушен в том уравнении, которое умножалось на –1, т.е. уравнение, в котором стоит наибольший по абсолютной величине отрицательный свободный член.

5-й этап. Приведение преобразованной системы к единичному базису. Для этого используют метод Жордана – Гаусса, но разрешающий элемент берется не произвольно, а по следующему правилу, которое гарантирует, что свободные члены не изменят своих положительных знаков.

Правило выбора разрешающего элемента

1. Уравнение, в котором нарушен единичный базис, т.е. уравнение, которое умножалось на –1, проверяется на наличие в нём положительных коэффициентов:

а) если они имеются, то берётся один из них, и столбец, содержащий этот положительный коэффициент, берётся в качестве разрешающего столбца;

б) если таковых нет, то рассматриваемое уравнение противоречиво, так как левая часть отрицательна, а правая положительна. Это значит, что система ограничений-равенств несовместна, т.е. не имеет решения.

2. Разрешающая строка выбирается по наименьшему отношению положительных свободных членов к соответствующим коэффициентам разрешающего столбца.

3. Разрешающий элемент берётся на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки.

При выборе разрешающего элемента может представиться два случая:

1-й случай. Разрешающий элемент расположен в интересующем нас уравнении, т.е. в уравнении, в котором нарушен единичный базис. В этом случае, делая один шаг Жордана – Гаусса, получаем единичный базис и 5-й этап заканчивается.

2-й случай. Разрешающий элемент не расположен в интересующем нас уравнении. В этом случае один шаг по методу Жордана – Гаусса будет сделан вхолостую. Единичного базиса сразу не получим. Весь процесс 5-го этапа нужно повторить сначала (несколько раз). В результате обязательно или придём к случаю 1 (значит, к единичному базису), или установим противоречивость системы ограничений.

Все вычисления 5-го этапа производятся в таблице Гаусса.

6-й этап. Записываем опорное решение.

Пример 1. Найти начальное опорное решение:

$$Z(x) = 8X_1 + X_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 \le 6, \\ X_1 + 2X_2 \ge 1, \\ 2X_1 + 2X_2 \le 10, \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение:

1-й этап выполнять не надо, так как математическая модель уже есть.

2-й этап – приводим систему ограничений к каноническому виду с помощью балансовых переменных X_3, X_4, X_5:

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 + X_3 = 6, \\ X_1 + 2X_2 - X_4 = 1, \\ 2X_1 + 2X_2 + X_5 = 10, \\ X_j \geq 0; j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$Z(x) = 3X_1 + X_2 + 0 \bullet X_3 + 0 \bullet X_4 + 0 \bullet X_5 \text{ -> max}$$

3-й этап – приводим систему к единичному базису, преобразования ведём в таблице Гаусса:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B_i
1	3	1	0	0	6
1	2	0	–1	0	1
2	2	0	0	1	10
0	1	1	1	0	5
1	2	0	–1	0	1
0	–2	0	2	1	8

Нет единичного базиса из-за второго уравнения.

4-й и 5-й этапы не делаем, так как правые части B_i – числа положительные.

6-й этап – записываем опорное решение: $X_2 = 0,\ X_4 = 0,\ X_3 = 5,\ X_1 = 1,\ X_5 = 8$ или в виде вектора $\overline{X_{\text{опор}}} = \{1, 0, 5, 0, 8\}$.

Пример 2. Найти начальное опорное решение:

$$Z(x) = X_1 + X_2 - 2X_4 + X_5 + 3X_6 - X_7 \text{ -> min}$$

$$\begin{cases} X_1 - X_4 + X_5 + 2X_6 = -1, \\ X_2 - 4X_4 + 3X_5 - X_6 = -4, \\ X_3 + 4X_4 - 2X_5 + 3X_6 = 10, \\ 2X_4 + 2X_5 - X_6 + X_7 = -1, \\ X_j \geq 0; j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Решение:

1-й этап выполнять не надо, так как математическая модель уже есть.

2-й этап выполнять не надо, так как система ограничений записана в каноническом виде (ограничения-уравнения).

3-й этап – приводим систему к единичному базису, преобразования ведём в таблице Гаусса:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	B_i
1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	–1 –4 4 2	1 3 –2 2	2 –1 3 –1	0 0 0 1	–1 –4 10 –1
1 0 0 0	–1 –1 0 –1	0 0 1 0	3 4 4 6	–2 –3 –2 –1	3 1 3 0	0 0 0 1	3 4 10 3
1/3 –1/3 –1 0	–1/3 –2/3 1 –1	0 0 1 0	1 3 1 6	–2/3 –7/3 0 –1	1 0 0 0	0 0 0 1	1 3 7 3
1/3 –1/3 -1 0	–1/6 –1/6 7/6 –1/6	0 0 1 0	0 0 0 1	–1/2 –11/6 1/6 –1/6	1 0 0 0	–1/6 –1/2 –1/6 1/6	1/2 3/2 13/2 1/2

Умножаем второе уравнение на –1 и складываем его с 1-м и 4-м уравнениями.

Составляем отношения правых частей к положительным коэффициентам столбца $X_6 : \frac{3}{3} = 1; \frac{4}{1} = 4; \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$.

Находим минимум среди этих отношений $(\min = 1)$:

$\min\{1/1;3/3;7/1;3/6\} = 1/2$.

Второе уравнение противоречиво, так как левая часть отрицательна, а правая – положительна.

Задачи для аудиторной работы

Найти исходное опорное решение следующих задач линейного программирования:

1. $\begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 = 2, \\ X_2 + 3X_3 = 6, \\ 3X_3 + X_4 = 7, \\ X_j \geq 0; j = \overline{1,4}. \end{cases}$

$Z(x) = 2X_1 - X_2 + X_3 + 3X_4 \text{ -> } \max$

2. $\begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 10, \\ X_1 + 2X_2 \geq 2, \\ 2X_1 + X_2 \leq 10, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z(x) = X_1 + X_2 \text{ -> } \max$

3. $\begin{cases} 7X_1 + 2X_2 - X_3 = 14, \\ -X_1 + 2X_2 - X_4 = 2, \\ 7X_1 + 10X_2 + X_5 = 28, \\ X_j \geq 0; j = \overline{1,5}. \end{cases}$

$Z(x) = X_1 + 2X_2 + 2X_4 + X_5 \to \max$

4. $\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + X_5 = 6, \\ 2X_2 - X_3 - 3X_4 = 4, \\ 3X_1 + 2X_3 + X_4 = 2, \\ X_j \geq 0; j = \overline{1,5}. \end{cases}$

$Z(x) = 3X_1 - X_2 - X_3 + X_4 + 2X_5 \to \max$

5. $\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 4, \\ 6X_1 + 2X_2 \geq 8, \\ X_1 + 5X_2 \geq 4, \\ X_j \geq 0; j = \overline{1,2}. \end{cases}$

$Z(x) = 2X_1 + 3X_2 \to \max.$

8.1. Симплекс-метод. Переход от найденного опорного решения к лучшему опорному решению

Переход от найденного опорного решения к лучшему опорному решению выполняют с помощью специальных таблиц. Главная часть представляет собой таблицу Гаусса, в которой столбец свободных членов надо поставить на первое место, а контрольный столбец не писать.

Сверху к главной части добавляют одну строку, в которую вносят коэффициенты при неизвестных из целевой функции. Слева к главной части надо добавить два столбца. В первом столбце напротив каждого уравнения указывают соответствующие базисные переменные, а во втором столбце – коэффициенты из целевой функции при базисных переменных. Снизу к главной части добавляют строку для целевой функции; ее называют оценочной, или индексной, строкой. Элементы этой строки подсчитывают по следующему правилу:

Правило подсчета оценочной строки

Элемент оценочной строки равен сумме парных произведений элементов рассматриваемого столбца на элементы второго столбца слева минус элемент из верхней строки, стоящий в рассматриваемом столбце.

Элементы оценочной строки называют оценками, так как они показывают, можно ли улучшить найденное опорное решение или нет. Если задача решается на максимум, то наличие отрицательных оценок указывает на то, что найденное опорное решение не оптимально и может быть улучшено. Если решается задача на минимум, то наличие положительных оценок указывает на то, что найденное опорное решение может быть улучшено.

После составления симплекс-таблицы освобождаются от ненужных оценок. При решении задачи на максимум ненужными являются отрицательные оценки, а при решении задачи на минимум ненужными будут положительные оценки.

От ненужных оценок освобождаются с помощью преобразований Жордана – Гаусса по специальному правилу, которое гарантирует, что свободные члены не изменят своих положительных знаков и число ненужных оценок не увеличится.

Правило выбора разрешающего элемента

1. За разрешающий столбец берут столбец, содержащий ненужную оценку, в котором есть хотя бы один положительный элемент. Если ненужных оценок несколько, то начинают с наибольшей по абсолютной величине. Если разрешающий столбец не содержит положительных элементов, то это указывает на то, что целевая функция не ограничена сверху (в задачах на максимум) или не ограничена снизу (в задачах на минимум). Оптимальное решение достигается в бесконечности.

2. Разрешающая строка выбирается по наименьшему положительному отношению свободных членов (3-й столбец) к соответствующим коэффициентам разрешающего столбца.

3. Разрешающий элемент выбирается на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки.

Используя правило выбора разрешающего элемента, производят шаги методом Жордана – Гаусса до тех пор, пока не освободятся от всех ненужных оценок или установят неограниченность целевой функции.

Пример. Найти оптимальное решение задачи линейного программирования симплексным методом:

$$\begin{cases} X_1 + 5X_2 \le 40, \\ 2X_1 + 3X_2 \le 31, \\ 5X_1 + 2X_2 \le 50, \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$Z(x) = 2X_1 + 5X_2 \text{ -> } \max$$

Решение:

1-й этап выполнять не надо, так как модель уже есть.

2-й этап – приводим задачу к каноническому виду. Для этого в ограничения-неравенства вводим неотрицательные балансовые переменные X_3, X_4, X_5. Балансовые переменные входят в целевую функцию Z(X) с нулевыми коэффициентами; в результате получим:

$$\begin{cases} X_1 + 5X_2 + X_3 = 40, \\ 2X_1 + 3X_2 + X_4 = 31, \\ 5X_1 + 2X_2 + X_5 = 50, \\ X_j \ge 0; j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$Z(x) = 2X_1 + 5X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 \rightarrow \max$$

3-й этап выполнять не надо, так как балансовые переменные одновременно являются базисными.

4-й этап выполнять не надо, так как все свободные члены положительны.

5-й этап выполнять не надо, так как не делали 4-й этап.

6-й этап – записываем начальное опорное решение:

$X_{опор} = \{0, 0, 40, 31, 50\}$.

Используя вторую часть симплекс-метода, от найденного опорного решения перейдём к поиску лучшего опорного решения:

Баз. перем.	C	План	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_3	0	40	1	5	1	0	0
X_4	0	31	2	3	0	1	0
X_5	0	50	5	2	0	0	1
ΔZ		0	–2	–5	0	0	0
X_2	5	8	1/5	1	1/5	0	0
X_4	0	7	7/5	0	–3/5	1	0
X_5	0	34	23/5	0	–2/5	0	1
ΔZ		40	–1	0	1	0	0
X_2	5	7	0	1	2/7	–1/7	0
X_1	2	5	1	0	–3/7	5/7	0
X_5	0	11	0	0	11/7	–23/7	1
	45	0	0	0	4/7	5/7	0

$\min\left\{\frac{40}{5} : \frac{31}{3} : \frac{50}{2}\right\} = \frac{40}{5}$

Индексная строка содержит две отрицательные оценки. Разрешающий столбец – X_2

$\min\left\{\frac{8}{1/5} : \frac{7}{7/5} : \frac{34}{23/5}\right\} = \frac{7}{7/5}$

Индексная строка содержит одну отрицательную оценку. Разрешающий столбец – X_1

Все элементы оценочной строки положительны

По последней симплексной таблице записываем оптимальное решение. Для этого базисные переменные, указанные в первом столбце, приравниваем к числам, стоящим в столбце «план». Все остальные переменные являются свободными; они приравниваются к нулю. Окончательно оптимальное решение имеет вид: $X^* = \{5,7,0,0,11\}$, при этом максимальное значение целевой функции $Z_{max} = 45$.

Задачи для аудиторной работы

Решить задачи симплекс-методом:

1. $$\begin{cases} -X_1 + X_2 + X_3 = 1, \\ X_1 - X_2 + X_4 = 1, \\ X_1 + X_2 + X_5 = 2, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,5}\,. \end{cases}$$

$$Z(x) = 2X_1 - X_2 + 3X_3 - 2X_4 + X_5 \to \max$$

Ответ: $X^* = \{1,0,2,0,1\}$,

$Z_{max} = 9$.

2. $$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4 = 3, \\ X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 1, \\ X_1 - X_2 + X_3 + X_4 = 1, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}\,. \end{cases}$$

$$Z(x) = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \to \max$$

Ответ: $X^* = \{1,1,1,0,\}$,

$Z_{max} = 3$.

3. $$\begin{cases} -X_1 + X_2 + X_3 = 5, \\ -X_1 + 5X_2 + X_4 = 41, \\ 3X_1 + 5X_2 + X_5 = 77, \\ 5X_1 - X_2 + X_6 = 63, \\ 2X_1 + 5X_2 + X_7 = 16, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

$$Z(x) = 11X_I + 1OX_2 + 13X_3 - X_4 + X_5 + 3X_6 + X_7 \to max$$

Ответ: $X^* = \{8,0,13,49,53,23,0\}$,

$Z_{max} = 310.$

4. $$\begin{cases} X_1 - X_2 \geq -2, \\ 5X_1 + 3X_2 \leq 15, \\ X_2 \leq 25, \\ X_1 - 2X_2 \geq 2, \\ 2X_1 - X_2 \geq -2, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$Z(x) = 4X_1 + 3X_2 \to max$$

Ответ: $X^* = \{2,0\}$,

$Z_{max} = 8.$

5. $$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \geq 11, \\ -2X_1 + X_2 \leq 2, \\ X_1 - X_2 \leq 11, \\ 2X_1 - X_2 \geq -2, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$Z(x) = 4X_1 + 2X_2 \to min$$

Ответ: $X^* = \{1,4\}$,

$Z_{min} = 12.$

Задачи для домашней работы

Решить системы симплекс-методом:

1. $$\begin{cases} 4X_1 - 3X_2 - X_3 + X_4 + X_5 = 6, \\ X_1 - 4X_2 + X_3 + X_5 = 15, \\ 2X_1 - 4X_2 - X_3 + X_4 = -3, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$Z(x) = X_1 - X_2 \to max$$

Ответ: $X^* = \{3,0,9,0,3\}$,

$Z_{max} = 3.$

2. $$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 10, \\ X_1 + 2X_2 \geq 2, \\ 2X_1 + X_2 \leq 10, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$Z(x) = X_1 + X_2 \to max$$

Ответ: $X^* = \{10/3;10/3\}$,

$Z_{max} = 20/3$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить задачи симплекс-методом:

1. $Z = X_1 - 6X_2 + 2X_3 - X_4 + 3X_5 \to max$

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 + X_3 = 1, \\ 2X_1 + 3X_2 + X_4 = 11, \\ 1 - 2X_2 + X_5 = 2, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{4,1,8,0,0\}$,

$Z_{max} = 14$.

2. $Z = 3X_1 + 4X_2 + X_3 \to max$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 \le 10, \\ X_1 + X_2 + 2X_3 \le 6, \\ 3X_1 + X_2 + 2X_3 \le 12, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{2,4,0\}$,

$Z_{max} = 22$.

3. $Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3 \to max$

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 + 5X_3 \le 15, \\ X_1 + X_2 + X_3 \le 7, \\ 2X_1 + X_2 + 4X_3 \le 12, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{3,4,0\}$,

$Z_{max} = 18$.

4. $Z(x) = X_1 + X_2 + X_3 \to max$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \le 7, \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 \le 9, \\ 3X_1 + X_2 + 4X_3 \le 12, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: $X_1^* = \{0,7,0\}$,

$X_2^* = \{2,5,1\}$,

$X_3^* = \{0,6,1\}$,

$X_4^* = \{7,0,0\}$,

$Z_{max} = 7$.

5. $Z(x) = 3X_1 - X_2 + 3X_3 + 6X_4 \to max$

$$\begin{cases} X_1 + X_4 + 3X_5 = 2, \\ X_2 + 3X_4 - X_5 = 14, \\ X_3 + X_4 - 3X_5 = 18, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X_1^* = \{0,0,10,5,1\}$,

$X_2^* = \{8,0,0,6,4\}$,

$Z_{max} = 60.$

6. $Z(x) = 2X_1 + 3X_2 + 20X_4 + 2X_5 \to max$

$$\begin{cases} X_1 + 3X_3 + X_4 = 1, \\ X_2 - X_3 + 3X_4 = 11, \\ 5X_3 + X_4 + X_5 = 25, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{8,0,4,5,0\}$,

$Z_{max} = 116.$

7. $Z(x) = 3X_1 + 2X_2 - X_3 - 4X_4 - 2X_5 \to min$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_3 - X_4 = 4, \\ 2X_3 + X_4 + X_5 = 8, \\ X_2 + X_3 + 2X_4 = 10, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{4,0,2,4,0\}$,

$Z_{min} = -6.$

8. $Z(x) = X_1 + 2X_2 - 8X_3 - 2X_5 \to min$

$$\begin{cases} 2X_3 + X_4 + X_5 = 14, \\ X_1 - X_3 + 3X_4 = 7, \\ X_2 - X_3 + X_4 = 1, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{0,2,5,4,0\}$,

$Z_{min} = -36.$

9. $Z(x) = 2X_1 + 7X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 3X_5 \to max$

$$\begin{cases} X_1 - 4X_2 + X_3 = 1, \\ X_1 + 3X_2 + X_4 = 8. \\ -X_1 + 2X_2 + X_5 = 2, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X_1^* = \{2,2,7,0,0\}$,

$X_2^* = \{5,1,0,0,5\}$,

$Z_{max} = 32.$

10. $X_1 + 12X_2 + 3X_3 \to max$

$$\begin{cases} -2X_1 + 3X_2 + X_3 \le 12, \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 \le 15, \\ 2X_1 - X_2 - 3X_3 \le 10, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: $X_1^* = \{3,6,0\}$,
$X_2^* = \{7,4,0\}$,
$Z_{max} = 90$.

11. $Z(x) = 3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \to max$

$$\begin{cases} X_2 + X_3 \le 4, \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 \le 6, \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 \le 2, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{1,4,0\}$,
$Z_{max} = 11$.

12. $Z(x) = X_1 - X_2 + 3X_3 \to max$

$$\begin{cases} -X_1 + 2X_2 + X_3 \le 2, \\ X_1 + 3X_2 + X_3 \le 6, \\ X_1 + X_2 - X_3 \le 2, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{2,0,4\}$,
$Z_{max} = 14$.

13. $Z(x) = 3X_1 + 2X_2 - X_3 \to max$

$$\begin{cases} -3X_1 + X_2 + 2X_3 \le 3, \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le 14, \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 \le 16, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{6,4,0\}$,
$Z_{max} = 26$.

14. $Z(x) = 2X_1 - 3X_2 + 7X_3 - 5X_4 \to max$

$$\begin{cases} 5X_1 + 3X_2 - 2X_3 + X_4 \le 10, \\ 3X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4 \le 22, \\ -2X_1 - X_2 + X_3 + 4X_4 \le 4, \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{2,0,8\}$,
$Z_{max} = 60$.

15. $Z(x) = -5X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 \to min$

$$\begin{cases} X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 3X_4 \le 25, \\ 2X_1 + \ X_2 + 3X_3 + \ X_4 \le 14, \\ X_1 - 3X_2 + \ X_3 + 2X_4 \le 0. \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{6,2,0,0\}$,

$Z_{min} = -28.$

8.2. Метод искусственного базиса

Известно, что если система ограничений в задаче линейного программирования, записанной в канонической форме, имеет единичный базис, то легко можно написать начальное опорное решение. Однако для многих задач линейного программирования, записанных в канонической форме, не всегда имеется нужное число единичных векторов. Для того чтобы миновать весь процесс получения единичного базиса, используют метод искусственного базиса.

В этом случае в каждое из уравнений, не содержащих разрешенной переменной, вводится искусственная неотрицательная переменная. Искусственные переменные вводятся также в целевую функцию с коэффициентом (–M), если задача решается на максимум, и с коэффициентом (+M), если задача решается на минимум, где M – некоторое достаточно большое число, конкретное значение которого обычно не задаётся. В результате такого добавления получаем расширенную задачу.

Исходная задача:

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots \ + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n < b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n < b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mn}x_n < b_m, \\ x_j \ge 0;\ i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Расширенная задача

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots \ +c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ \dots -Mx_{n+m} \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n \ = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n,\ = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mn}x_n + \ x_{n+m} = b_m, \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,n+m}. \end{cases}$$

В дальнейшем решается расширенная задача и по результатам ее решения находится оптимальное решение исходной задачи или делается вывод о неразрешимости на основании следующих теорем:

Теорема 1. Если в оптимальном плане $X^* = \{X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*,\ 0, \dots, 0\}$ расширенной задачи компоненты, соответствующие искусственным переменным, равны нулю, то исходная задача разрешима и ее оптимальное решение имеет вид: $X^* = \{X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*\}$.

Если хотя бы одна компонента, соответствующая искусственной переменной, отлична от нуля, то исходная задача не разрешима из-за несовместимости системы ограничений.

Теорема 2. Если расширенная задача не имеет оптимального решения, то и исходная задача не имеет решения.

Расширенная задача имеет опорный план:

$$X_{опор} = \{0, 0, \ldots, 0, \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_m}\},$$

n нулей,

а значит, ее решение может быть найдено симплекс-методом. В этом случае симплексная таблица решения расширенной задачи имеет две индексные строки.

Оценки рассчитываются так же, как для обычного симплекса, но в первую строку (ΔZ) помещают слагаемые, не содержащие параметра M, а во вторую строку записывают коэффициенты при M. Выбор разрешающего элемента производят так же, как в обычном симплексе, но освобождаются от ненужных оценок сначала во второй строке. Причем если искусственная переменная выводится из базиса, то она не должна быть введена повторно, поэтому в таблице Гаусса в столбце, соответствующем выводимой переменной, ставится прочерк.

После исключения из базиса последней искусственной переменной, вторая оценочная строка не вводится и далее освобождаются от ненужных оценок в первой индексной строке.

Пример 1. Решить задачу линейного программирования методом искусственного базиса:

$$Z(x) = 2X_1 + 3X_2 + 2X_3 \to \max$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 1, \\ X_2 + X_3 \le 2. \\ X_1 + X_2 + X_3 \ge 3. \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$Z(x) = 2X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 0X_4 + 0X_5 \to \max$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 1, \\ X_2 + X_3 + X_4 = 2, \\ X_1 + X_2 + X_3 - X_5 = 3. \end{cases}$$

Система уравнений разрешена только относительно переменной X_4 во втором уравнении, поэтому вводим в первое и третье уравнения искусственные переменные X_6, X_7. Получаем расширенную задачу

$$Z(x) = 2X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 0X_4 + 0X_5 - MX_6 - MX_7 \to \max$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 + X_6 = 1, \\ \quad X_2 + X_3 + X_4 \ = 2, \\ X_1 + X_2 + X_3 - \ X_5 + \ X_7 = 3, \\ \qquad X_j \geq 0;\ j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Начальное опорное решение расширенной задачи:

$X_{опор} = \{0,0,0,2,0,1,3\}$.

Составим симплексную таблицу:

Баз. пер.	$C_{баз}$	План	2 X_1	2 X_2	1 X_3	2 X_4	M X_5	M X_6
1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_5 X_6	M M	2 2	–1 2	1 2	1 –1	2 1	1 0	0 1
ΔZ	–	0	–2	–2	–1	–2	0	0
ΔZ′	–	4	1	3	0	3	0	0
X_5 X_2	M 2	1 1	−2 1	0 1	3/2 −1/2	3/2 1/2	1 0	– –
ΔZ	–	2	0	0	−2	–1	0	–
ΔZ′	–	1	–2	0	3/2	3/2	0	–
X_3 X2	1 2	2/3 4/3	−4/3 1/3	0 1	1 0	1 1	– –	– –
ΔZ	–	10/3	–8/3	0	0	1	–	–
X_4 X_2	2 2	2/3 2/3	–4/3 5/3	0 1	1 –1	1 0	– –	– –
ΔZ	–	8/3	–4/3	0	–1	0	–	–

Первоначальное опорное решение расширенной задачи:

$\min\left\{\frac{2}{1}:\frac{2}{2}\right\} = 1$

В строке ΔZ находятся 3 положительных оценки, берем максимальную среди них. Пусть это будет столбец X_2

$\min\left\{\frac{1}{3/2}\right\} = \frac{2}{3}$

$\min\left\{\frac{2/3}{1}:\frac{4/3}{1}\right\} = \frac{2}{3}$

Оптимальное решение расширенной задачи:

$X^* = \{3;2;0;0;2;0;0\}$.

Тогда на основании теоремы 1 оптимальное решение исходной задачи, записанной в каноническом виде, имеет вид:

$X^* = \{3;2;0;0;2\}$.

Без учета дополнительных переменных (балансовых), которые не требовалось находить, окончательно имеем:

$X^* = \{3;2;0\}$, max Z = 12.

Пример 2. Решить задачу линейного программирования методом искусственного базиса:

$$Z\,(x) \ = 2X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -X_1 + \ X_2 + X_3 + 2X_4 = 2, \\ 2X_1 + 2X_2 - X_3 + \ X_4 = 2, \\ \quad X_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Решение. Система ограничений не содержит базисных переменных, поэтому без предварительных преобразований по формулам Жордана – Гаусса невозможно записать начальное опорное решение.

Введем в каждое уравнение по одной неотрицательной искусственной переменной X_5 и X_6 и перейдем к расширенной задаче:

$$Z(x) = 2X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 + MX_5 + MX_6 \to \min$$

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 + X_5 = 2, \\ 2X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 + X_6 = 2, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Составим симплексную таблицу:

Баз. пер.	$C_{баз}$	План	2	2	1	2	M	M
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_5	M	2	–1	1	1	2	1	0
X_6	M	2	2	2	–1	1	0	1
ΔZ	–	0	–2	–2	–1	–2	0	0
$\Delta Z'$	–	4	1	3	0	3	0	0
X_5	M	1	−2	0	3/2	3/2	1	–
X_2	2	1	1	1	−1/2	1/2	0	–
ΔZ	–	2	0	0	−2	–1	0	–
$\Delta Z'$	–	1	–2	0	3/2	3/2	0	–
X_3	1	2/3	−4/3	0	1	1	–	–
X2	2	4/3	1/3	1	0	1	–	–
ΔZ	–	10/3	–8/3	0	0	1	–	–
X_4	2	2/3	–4/3	0	1	1	–	–
X_2	2	2/3	5/3	1	–1	0	–	–
ΔZ	–	8/3	–4/3	0	–1	0	–	–

Первоначальное опорное решение расширенной задачи:

$\min\left\{\frac{2}{1} : \frac{2}{2}\right\} = 1$

В строке ΔZ находятся 3 положительных оценки, берем максимальную среди них. Пусть это будет столбец X_2

$\min\left\{\frac{1}{3/2}\right\} = \frac{2}{3}$

$\min\left\{\frac{2/3}{1} : \frac{4/3}{1}\right\} = \frac{2}{3}$

Последняя индексная строка не содержит ненужных положительных оценок. Это значит, что найдено оптимальное решение расширенной задачи: $X^* = \{0;2/3;0;2/3;0;0\}$.

На основании теоремы 1 исходная задача имеет решение: $X^* = \{0;2/3;0;2/3\}$, min Z = 8/3.

Задачи для аудиторной работы

Решить задачу методом искусственного базиса:

1. $Z(x) = 5X_1 + 3X_2 + 4X_3 - X_4 \to \max$

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 2X_4 = 3, \\ 2X_1 + 2X_2 + \ X_3 + \ X_4 = 3, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}\,. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{1,0,1,0\}$,

$Z_{max} = 9.$

2. $Z(x) = 5X_1 + 2X_2 - X_3 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 \leq 5, \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 = 6, \\ 5X_1 + 3X_2 + 4X_3 \geq 1, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{2,0,0\}$,

$Z_{max} = 10.$

3. $Z(x) = 3X_1 + X_2 + X_3 \rightarrow max$

$$\begin{cases} -2X_1 + \ X_2 + X_3 = 2, \\ -X_1 + 2X_2 \geq 8, \\ X_1 + \ X_2 \ \leq 5, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{5,0,12\}$,

$Z_{max} = 27.$

4. $Z(x) = X_1 \rightarrow max$

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 \leq 0, \\ X_1 - \ X_2 \geq -1, \\ X_1 + \ X_2 \geq 1, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Ответ: Функция Z(x) не ограничена сверху.

5. $Z(x) = X_1 + 2X_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 8, \\ X_1 - X_2 \geq 2, \\ X_1 \geq 3, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{5,3\}$,

$Z_{max} = 11.$

6. $Z(x) = X_1 - X_2 - 2X_3 + 3X_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + \quad X_3 + X_4 = 7, \\ 4X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 = 10, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{1,2,0,0\}$,

$Z_{\min} = -1.$

7. $Z(x) = 2X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -X_1 + \quad X_2 + X_3 + 2X_4 = 2, \\ 2X_1 + 2X_2 - X_3 + \quad X_4 = 2, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{4,0,6,0\}$,

$Z_{\max} = 14.$

8. $Z(x) = 3 + 4X_1 + X_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 \geq 2, \\ -X_1 + X_2 \leq 3, \\ 2X_1 - 2X_2 \leq 30, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{1,4\}$,

$Z_{\max} = 11.$

Задачи для самостоятельной работы

Решить задачи методом искусственного базиса:

1. $Z(x) = 2X_1 + 8X_2 + 3X_3 + 4X_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 13X_1 - 3X_2 + 2X_3 - 7X_4 = 4, \\ 7X_1 - 2X_2 + \quad X_3 - 4X_4 = 1, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Ответ: $X_1^* = \{1,3,0,0\}$,

$X_2^* = \{3,0,0,5\}$,

$Z_{\min} = 26.$

2. $Z(x) = 2X_1 - X_3 + X_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3X_1 + 3X_2 + \quad X_3 + X_4 = 12, \\ 4X_1 + 5X_2 + 2X_3 + X_4 = 18, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{1,2,0,0\}$,

$Z_{\max} = 4.$

3. $Z(x) = 5X_1 + 7X_2 + 2X_3 + 3X_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 = 5, \\ 4X_1 + X_2 + 2X_3 - X_4 = 1, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{0,2,0,1\}$,

$Z_{max} = 17.$

4. $Z(x) = 2X_2 - X_3 + X_4 \to \max$

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 + 2X_3 - X_4 = 4, \\ -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_4 = 1, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{0,3,0,2\}$,

$Z_{max} = 8.$

5. $Z(x) = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 - 6X_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 3, \\ X_1 + X_2 + 2X_3 - 2X_4 = 4, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{0,2,1,0\}$,

$Z_{max} = 10.$

6. $Z(x) = X_1 + 4X_2 + X_3 \to \max$

$$\begin{cases} -X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 4, \\ 3X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 9, \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 6, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{2,3,0\}$,

$Z_{max} = 14.$

7. $Z(x) = X_I - X_2 + X_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 6, \\ -X_1 + X_2 + X_3 \geq 1, \\ X_1 - X_2 + 4X_3 \leq 24, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{4,0,5\}$,

$Z_{max} = 9.$

8. $Z(x) = 5X_1 + 2X_2 + X_3 \to \max$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \geq 3, \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 4, \\ 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 12, \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{4,0,0\}$,

$Z_{max} = 20.$

9. $Z(x) = -X_1 + 8X_2 + 3X_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 6, \\ X_1 + X_2 + X_3 \geq 4, \\ -X_1 + 3X_2 - X_3 \geq 4, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{2,2,0\}$,

$Z_{min} = 14.$

10. $Z(x) = X_1 + 3X_2 + X_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 + X_3 \geq 6, \\ X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 10, \\ -X_1 + 3X_2 - X_3 \geq 2, \\ X_j \geq 0;\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: $X_1^* = \{1,3,0\}$,

$X_2^* = \{0,2,4\}$,

$Z_{min} = 10.$

11. $Z(x) = X_1 + 2X_2 + 3X_3 \to \min$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} & X_{11} + X_{12}, + X_{13} + X_{14} = 30 \\ & X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 60 \\ & X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 10 \end{aligned}\right\} & \text{Ограничения по поставщикам.} \\ \left.\begin{aligned} & X_{11} + X_{21} + X_{31} = 15 \\ & X_{12} + X_{22} + X_{32} = 40 \\ & X_{13} + X_{23} + X_{33} = 25 \\ & X_{14} + X_{24}, + X_{34} = 20 \end{aligned}\right\} & \text{Ограничения по потребителям.} \end{cases}$$

Ответ: $X^* = \{2,1,0\}$,

$Z_{min} = 4$

9. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И МЕТОДЫ ЕЁ РЕШЕНИЯ

Транспортной задачей принято называть любую задачу, которая возникает при составлении оптимального плана перевозок по доставке грузов от поставщиков к потребителям.

Транспортные задачи делятся на два вида: закрытые и открытые. Если суммарная возможность поставщиков равна суммарной потребности в грузе потребителей, то транспортные задачи называются закрытыми, т.е. в закрытых задачах спрос равен предложению. В противном случае задача является открытой.

Теорема. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т.е. чтобы задача была закрытого типа.

Открытые транспортные задачи приводят к закрытым путем введения фиктивного потребителя или фиктивного поставщика.

При решении транспортных задач можно преследовать различные цели. Большинство народно-хозяйственных задач решаются с целью получения наименьшей стоимости перевозки грузов, но можно решать транспортные задачи с целью выигрыша времени по доставке грузов.

С формулировкой транспортной задачи познакомимся на следующем примере. Предположим, что с трех баз требуется доставить в магазины однородный товар. Пусть на 1-й базе А1 имеется 30 ед. груза, на базе А2 – 60 ед., на базе А3 – 10 ед. Указанный товар нужно отгрузить четырем потребителям: В1, В2, В3, В4, потребности которых составляют соответственно 15, 40, 25, 20 ед. товара.

Стоимость перевозки от баз до потребителя запишем в виде табл. 9.1

Таблица 9.1

База	Потребитель			
	В1	В2	В3	В4
А1	7	3	6	4
А2	2	5	3	9
А3	8	1	7	3

Требуется составить такой план перевозок груза, который обеспечит минимальные транспортные расходы.

Решение:

1-й этап – переносим условия задачи в специальную табл. 9.2, называемую матрицей перевозок. Это делают для лучшего обзора условия задачи, с тем чтобы в процессе решения не потерять данные, особенно в больших задачах.

Матрица перевозок представляет собой таблицу, в которой строк на две больше, чем поставщиков, а столбцов на два больше, чем потребителей.

Таблица 9.2

Потребитель / Поставщик	B1	B2	B3	B4	Наличие товаров
A1	7	3	6	4	30
A2	2	5	3	9	60
A3	8	1	7	3	10
Потребности в товаре	15	40	25	20	–

2-й этап – составляем математическую модель задачи; для этого вводим неизвестные. Исходя из условия задачи неизвестными являются количества единиц товара, перевозимого от каждого поставщика к каждому потребителю:

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}$,

$X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}$,

$X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{34}$.

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} X_{11} + X_{12}, + X_{13} + X_{14} = 30 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 60 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 10 \end{array}\right\} \text{Ограничения по поставщикам.} \\ \left.\begin{array}{l} X_{11} + X_{21} + X_{31} = 15 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 40 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 25 \\ X_{14} + X_{24}, + X_{34} = 20 \end{array}\right\} \text{Ограничения по потребителям.} \end{cases}$$

$X_{11} \geq 0; X_{12} \geq 0; X_{13} \geq 0; \ldots X_{ij} \geq 0; i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}$ – ограничения по здравому смыслу.

Цель задачи в математической форме:

$Z(x) = 7X_{11} + 3X_{12}, + 6X_{13} + 4X_{14} + 2X_{21} + 5X_{22}, + 3X_{23} + 9X_{24} + 8X_{31} + X_{32}, + 7X_{33} + 3X_{34}$ min, где Z(x) – стоимость всей перевозки.

Проверяем задачу на разрешимость. Для этого, согласно теореме, она должна быть закрытой, т.е. $\sum_{i=1}^{3} Ai = 30 + 60 + 10 = 100$ и $\sum_{j=1}^{4} Bj = 15 + 40 + 25 + 20 = 100$.

Полученная задача является задачей линейного программирования канонического типа. Решение транспортной задачи начинают с отыскивания 1-го опорного плана. Первоначальный опорный план транспортной задачи как задачи линейного программирования можно довести до оптимального с помощью симплекс-метода. Однако сетевая структура транспортной задачи позволяет использовать более простые методы.

3-й этап – составляем первоначальное опорное решение.

Метод северо-западного угла

Метод заключается в том, что заполнение таблицы начинается с верхней левой клетки табл. 9.2 (это соответствует северо-западному углу на географической карте). После загрузки этой клетки всегда загружают соседнюю клетку в строке или столбце; если ни в ту, ни в другую из соседних клеток нечего поставить, т.е. возможности строки (поставщика) и столбца (потребителя) исчерпаны, то в любой из них ставится «0» и от него процесс продолжается дальше, всё время двигаясь вправо и вниз.

Загрузить клетку – это значит поставить в нее минимально допустимое количество груза (сравнивают количество груза в строке и в столбце, на пересечении которых стоит загружаемая клетка, и наименьшее из этих грузов ставят в клетку).

Клетки, в которые поставили определенное количество груза, принято называть загруженными, а клетки, в которые груз не попал, принято называть свободными.

Для того чтобы задача имела решение, нужно, чтобы любой план или программа перевозок удовлетворяли двум условиям разрешимости задачи:

– число загруженных клеток должно быть ровно $m+n–1$, где m – число поставщиков, а n – число потребителей;

– загруженные клетки не должны образовывать замкнутого цикла.

Если эти два условия выполнены, то транспортная задача будет иметь оптимальное решение, причём метод северо-западного угла гарантирует выполнение этих двух условий разрешимости.

Таблица 9.3

Поставщик	Потребитель				Наличие товаров
	B1	B2	B3	B4	
A1	**7** 15	**3** 15	**6**	**4**	30
A2	**2**	**5** 25	**3** 25	**9** 10	60
A3	**8**	**1**	**7**	**3** 10	10
Потребности в товаре	15	40	25	20	100 / 100

Чтобы завершить 3-й этап, необходимо подсчитать стоимость 1-го плана перевозок:

$Z_{\mathrm{I}} = 15 \bullet 7 + 15 \bullet 3 + 25 \bullet 5 + 10 \bullet 9 + 10 \bullet 3 = 470.$

Метод минимального элемента

В отличие от метода северо-западного угла данный метод учитывает при построении исходного плана стоимость перевозок. Метод минимального элемента, как правило, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость груза меньше, чем стоимость перевозки при плане, найденном с помощью метода северо-западного угла.

Заполнение начинается с клетки, имеющей минимальную стоимость перевозки (минимальный тариф). Если таких клеток более одной, то выбирается первая по порядку. Затем так же, как и в методе северо-западного угла, в клетку ставят минимальное значение из грузов, стоящих в строе и столбце, на пересечении которых стоит загружаемая клетка. Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворён. Если окажется, что надо исключить строку и столбец одновременно, т.е. израсходован запас и удовлетворен спрос, то нужно поставить «0» в соседнюю клетку с наименьшим тарифом и считать клетку загруженной. Затем в оставшейся части таблицы проделываем аналогичные операции, начиная опять с клетки, имеющей минимальный тариф. На последнем шаге процесса остается одна строка и один столбец. После заполнения клетки, стоящей на их пересечении, процесс завершается.

Проверка невырожденности осуществляется так же, как для метода северо-западного угла.

Таблица 9.4

		V1	V2	V3	V4	
	Поставщик	Потребитель				Наличие товаров
		B1	B2	B3	B4	
U1	A1	**7**	− **3** 30	**6**	+ **4**	30
U2	A2	**2** 15	**5** 0 +	**3** 25	**9** 20 −	60
U3	A3	**8**	**1** 10	**7**	**3**	10
	Потребности в товаре	15	40	25	20	100 / 100

$Z_1 = 30 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 20 \cdot 9 + 10 \cdot 1 = 385.$

4-й этап – построение оптимального плана перевозок.

Для проверки полученного опорного плана на оптимальность и построения этого оптимального плана используется распространённый метод потенциалов.

Метод потенциалов

1-й этап – каждому поставщику A_i (т.е. каждой строке) поставим в соответствие некоторое число U_i ($i = \overline{1,n}$), называемое потенциалом A_i, а каждому потребителю B_j (столбцу) поставим в соответствие число V_j ($j = \overline{1,m}$), называемое потенциалом B_j.

Для каждой загруженной клетки строится соотношение $U_i + V_j = C_{ij}$, где C_{ij} – тарифы, стоящие в заполненных клетках таблицы. Таких уравнений будет $m + n - 1$ (по количеству занятых клеток), а число неизвестных U_i и V_j – $m + n$. Как известно, система имеет множество решений. Чтобы найти одно из решений, значение одного потенциала в системе задается произвольно. Обычно считают, что U1 = 0 и находят значения остальных потенциалов:

$$\begin{cases} U1 + V2 = 3 \\ U2 + V1 = 2 \\ U2 + V2 = 5 \\ U2 + V3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} U2 + V4 = 9 \\ U3 + V2 = 1 \\ U3 = -2, \\ V4 = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} U1 = 0, \\ U2 = 2, \\ V3 = 1 \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} V1 = 0 \\ V2 = 3 \\ \\ \end{matrix}$$

2-й этап – для каждой незаполненной клетки рассчитываем так называемые косвенные тарифы по формуле $C'_{ij} = U_i + V_j$.

Для определенности возьмем опорный план, полученный по методу минимального элемента. Полученные числа заносим в левый угол клетки:

C’11 = U1 + V1 = 0 + 0 = 0

C’13 = U1 + V3 = 0 + 1 = 1

C’14 = U1 + V4 = 0 + 7 = 7

C’31 = U3 + V1 = –2 + 0 = –2

C’33 = U3 + V3 = –2 + 1 = –1

C’34 = U3 + V4 = –2 + 7 = 5

3-й этап – проверяем полученный план на оптимальность по следующему критерию: если для каждой свободной клетки разность между тарифом клетки и ее косвенным тарифом $\Delta ij = Cij - C'ij$ неотрицательна, то план оптимален. Если хоть одна оценка Δij отрицательна, то план можно улучшить:

$\Delta 11 = C11 - C'11 = 7 - 0 = 7$ $\quad$ $\Delta 31 = C31 - C'31 = 8 + 2 = 10$

$\Delta 13 = C13 - C'13 = 6 - 1 = 5$ $\quad$ $\Delta 33 = C33 - C'33 = 7 + 1 = 8$

$\Delta 14 = C14 - C'14 = 4 - 7 = -3$ $\quad$ $\Delta 34 = C34 - C'34 = 3 - 5 = -2$

Полученный план перевозок не является оптимальным, так как среди оценок Δij имеются отрицательные ($\Delta 14 = -3; \Delta 34 = -2$).

4-й этап – для свободной клетки с наибольшей по величине (абсолютной) отрицательной оценкой (если таких клеток более одной, то договоримся брать первую по порядку) строим замкнутый цикл, т.е. замкнутый путь, соединяющий выбранную незаполненную клетку с ней же самой и проходящей через заполненные клетки. Направление построения цикла несущественно.

Примечание. Если два условия разрешимости задачи выполнены, то для каждой свободной клетки существует только один цикл.

В нашем примере $\Delta 14 = -3$, следовательно в качестве свободной клетки берем клетку (1,4) и строим замкнутый цикл, который будет включать клетки: (1;4), (1;2), (2;2), (2;4), (1;4).

5-й этап – в каждой клетке цикла (см. табл. 9.4), начиная со свободной, проставляются поочередно знаки «+» и «–». В клетках со знаком «–» выбирается минимальная величина, которая прибавляется к величинам, стоящим в клетках со знаком «+», и вычитается из величин, стоящих в клетках со знаком «–». В результате такого «перемещения» груза по циклу получим новый план перевозок. Откорректированный план переносится в новую табл. 9.5. После этого осуществляется переход к этапу 1.

Примечание. Метод потенциалов обеспечивает монотонное убывание значений целевой функции и позволяет за конечное число шагов найти минимум.

В таблице 9.4 $\min\{30;20\} = 20$.

Таблица 9.5

		V1	V2	V3	V4	
	Поставщик	Потребитель				Наличие товаров
		B1	B2	B3	B4	
U1	A1	7	3 10	6	4 20	30
U2	A2	2 15	5 20	3 25	9	60
U3	A3	8	1 10	7	3	10
	Потребности в товаре	15	40	25	20	100

$Z_2 = 10 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 15 \cdot 2 + 20 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 325.$

Ш а г 1

U1 + V2 = 3 ё — U1 = 0, V1 = 0
U1 + V4 = 4 — U2 = 2, V2 = 3
U2 + V1 = 2 — U3 = –2, V3 = 1
U2 + V2 = 5 — V4 = 4
U2 + V3 = 3
U3 + V2 = 1

Ш а г 2

C’11 = U1 + V1 = 0 + 0 = 0
C’13 = U1 + V3 = 0 + 1 = 1
C’24 = U2 + V4 = 2 + 4 = 6
C’31 = U3 + V1= –2 + 0 = –2
C’33 = U3 + V3 = –2 + 1 = –1
C’34 = U3 + V4 = –2 + 4 = 2

Ш а г 3

$\Delta 11 = C11 - C'11 = 7 - 0 = 7$

$\Delta 13 = C13 - C'13 = 6 - 1 = 5$

$\Delta 24 = C24 - C'24 = 9 - 6 = 3$

$\Delta 31 = C31 - C'31 = 8 + 2 = 10$

$\Delta 33 = C33 - C'33 = 7 + 1 = 8$

$\Delta 34 = C34 - C'34 = 3 - 2 = 1$

Все полученные оценки оказались положительными, следовательно, полученный в табл. 9.5 план перевозок является оптимальным, при этом расходы минимальны и равны $Z_{min} = 325$.

Открытая модель транспортной задачи

Транспортная задача, в которой суммарные запасы поставщиков не совпадают с суммарными потребностями потребителей $\sum_{i=1}^{m} ai \neq \sum_{j=1}^{n} bj$ называется открытой задачей. Для открытой модели могут быть два случая:

Случай 1. Количество груза у всех поставщиков ($\sum_{i=1}^{m} ai$) больше потребности в данном грузе всех потребителей ($\sum_{j=1}^{n} bj$):

$$\sum_{i=1}^{m} ai > \sum_{j=1}^{n} bj\,.$$

Случай 2. Количество груза у всех поставщиков меньше потребности в данном грузе всех потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} ai < \sum_{j=1}^{n} bj.$$

Открытая модель решается приведением к закрытой модели. В случае 1 вводится фиктивный потребитель B_{n+1}, потребности которого $b_{n+1} = \sum ai - \sum bj$. В случае 2 вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запасы которого $a_{m+1} = \sum bj - \sum ai$.

В таблицу исходных данных задачи в случае 1 добавляется столбец, в случае 2 –строка.

Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя или от фиктивного поставщика принимается равной 0, так как груз фактически не перевозится. После преобразований задача принимает вид закрытой модели и решается обычным способом.

Задачи для аудиторной работы

Задача 1 (закрытая). Найти оптимальную программу перевозок груза от трех поставщиков к четырем потребителям. Цель – получить наименьшую стоимость перевозки. Все данные приведены в таблице (матрица перевозок):

Поставщик	Потребитель				Наличие товаров
	B1	B2	B3	B4	
A1	5	3	4	2	100
A2	4	2	6	1	70
A3	1	4	5	3	130
	70	50	80	100	

Ответ: $Z_{min} = 730$.

Поставщик	Потребитель				Наличие товаров
	B1	B2	B3	B4	
A1			80	20	100
A2		50		20	70
A3	70			60	130
	70	50	80	100	

Задача 2 (открытая). Найти оптимальную программу перевозок груза от трех поставщиков к четырем потребителям. Цель – получить наименьшую стоимость перевозки. Все данные приведены в таблице:

Поставщик	Потребитель				Наличие товаров
	B1	B2	B3	B4	
A1	**4**	**3**	**2**	**7**	46
A2	**1**	**1**	**6**	**4**	34
A3	**3**	**5**	**9**	**4**	40
	40	35	30	45	

Ответ: $Z_{min} = 277$.

Поставщик	Потребитель				Наличие товаров
	B1	B2	B3	B4	
A1		16	30		46
A2	15	19			34
A3	25			15	40
A4				30	
	40	35	30	45	

Задачи для домашней работы

Задача 1 (закрытая). Найти оптимальную программу перевозок груза от трех поставщиков к пяти потребителям. Цель – получить наименьшую стоимость перевозки. Все данные приведены в таблице:

Поставщик	Потребитель					Наличие товаров
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	2	6	3	4	8	30
A2	1	5	6	9	7	35
A3	3	4	1	6	10	40
	20	34	16	10	25	

Ответ: $Z_{min} = 417$.

Поставщик	Потребитель					Наличие товаров
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20			10		30
A2		10			25	35
A3		24	16			40
	20	34	16	10	25	

Задача 2 (открытая). Найти оптимальную программу перевозок груза от трех поставщиков к трем потребителям. Цель – получить наименьшую стоимость перевозки. Все данные приведены в таблице:

Поставщик	Потребитель			Наличие товаров
	B1	B2	B3	
A1	7	3	6	75
A2	4	8	2	40
A3	1	5	9	35
	20	45	30	

Ответ: $Z_{min} = 215$.

Поставщик	Потребитель				Наличие товаров
	В1	В2	В3	В4	
А1		45		30	75
А2			30	10	40
А3	20			15	35
	20	45	30		

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. На три базы А1, А2, А3 поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 140, 180, 160 ед. Этот груз требуется перевезти в пять пунктов назначения В1, В2, В3, В4, В5 соответственно в количествах 60, 70, 120, 130 и 100 ед. Тарифы перевозок груза с каждого из пунктов отправителя в соответствующие пункты назначения указаны в матрице:

$$C = \begin{pmatrix} 2\ 3\ 4\ 3\ 4 \\ 8\ 4\ 1\ 4\ 1 \\ 9\ 7\ 3\ 7\ 2 \end{pmatrix}$$

Найти план перевозок, минимизирующий транспортные расходы.

Ответ: $Z_{min} = 1330$.

$$X = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 50\ 110 \\ 120\ 20\ 0\ 0 \\ 0\ 30\ 140\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2. На трех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 180, 60 и 80 ед. Этот груз необходимо развести в четыре магазина. Каждый из магазинов должен получить соответственно 120, 40, 60 и 80 ед. груза. Тарифы перевозок единицы груза из каждого склада во все магазины задаётся матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 2\ 3\ 4\ 3 \\ 5\ 3\ 1\ 2 \\ 2\ 1\ 4\ 2 \end{pmatrix}$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок была бы минимальной.

Ответ: $Z_{min} = 540$.

$$X = \begin{pmatrix} 120\ 0\ 0\ 40\ 20 \\ 0\ 0\ 60\ 0\ 0 \\ 0\ 40\ 0\ 40\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Производственное объединение имеет в своем составе три филиала, которые производят однородную продукцию соответственно в количествах, равных 50, 30 и 10 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя, расположенных в разных местах. Их потребности равны соответственно 30, 30, 10 и 20 ед. Тарифы перевозок единицы продукции от каждого из филиалов соответствующим потребителям задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Составить план перевозок, общая стоимость которых была бы минимальной:

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 140$.

Задача 4. Три предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 180, 350 и 20 ед. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям в количествах, соответственно равных 110, 90, 120, 80 и 60 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Составить план перевозок, общая стоимость которых была бы минимальной.

Ответ: $Z_{min} = 2240$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 120 & 60 & 0 \\ 110 & 90 & 0 & 20 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Составить план перевозок грузов с наименьшей общей стоимостью от трех поставщиков соответственно в количествах 80, 80, 60 и 80 ед. Стоимость перевозок единицы груза содержится в матрице:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 780$.

$$X = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 60\ 80 \\ 20\ 80\ 0\ 0 \\ 60\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 6. Составить план перевозок грузов с наименьшей общей стоимостью от трех поставщиков соответственно в количествах 80, 140 и 70 ед. к четырем потребителям соответственно в количествах 80, 50, 50 и 70 ед. Стоимость перевозок дана в матрице С:

$$C = \begin{pmatrix} 4\ 2\ 3\ 1 \\ 6\ 3\ 5\ 6 \\ 3\ 2\ 6\ 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 720$.

$$X = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 10\ 70 \\ 10\ 50\ 40\ 0 \\ 70\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача 7. На трех складах имеется товар соответственно в количествах 180, 90 и 170 ед. Потребности в этом товаре четырех магазинов равны соответственно 45, 45, 100 и 160 ед. Стоимость перевозок единицы товара от каждого склада к магазинам задается следующей матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 6\ 7\ 3\ 2 \\ 5\ 1\ 4\ 3 \\ 3\ 2\ 6\ 2 \end{pmatrix}$$

Найти оптимальный план перевозки, минимизирующий транспортные расходы:

$$X = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 100\ 80\ 0 \\ 0\ 45\ 0\ 45\ 0 \\ 45\ 0\ 0\ 35\ 90 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 815$.

Задача 8. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготовленный на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготовлять 100, 150 и 50 ед. кирпича. Известны ежедневные потребности на каждом из строящих объектов (соответственно 75, 60, 60 и 85 усл. ед.). Известны тарифы перевозок одной условной единицы кирпича с заводов в каждом из строящихся объектов:

$$C = \begin{pmatrix} 6\ 7\ 3\ 5 \\ 1\ 2\ 5\ 6 \\ 0\ 10\ 20\ 1 \end{pmatrix}$$

Составим план перевозок кирпича с заводов к объектам, общая стоимость которых была бы минимальной:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 665$.

Задача 9. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Найти оптимальный план перевозки муки, минимизирующий транспортные расходы:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 1280$.

Задача 10. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Стоимость перевозок 1 т бензина с хранилища к заправочным станциям задается матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Составить такой план перевозки бензина, который обеспечивал бы наименьшие транспортные расходы:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 110 & 60 & 0 \\ 125 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 1675$.

Задача 11. На трех железнодорожных станциях А1, А2, А3 скопилось соответственно 120, 110 и 130 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать под загрузку на железнодорожные станции В1, В2, В3, В4, В5. На каждой из этих станций потребность в вагонах соответственно равна 60, 60, 70, 100 и 50. Зная тарифы перегонки одного вагона, составить план перегонок вагонов, чтобы общая стоимость была минимальной:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 900$.

$$X = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 30 & 60 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 20 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Мясокомбинат имеет в своем составе четыре завода, на каждом из которых может изготавливаться три вида колбасных изделий. Мощности каждого из заводов соответственно равны 320, 280, 270 и 350 т (сутки). Ежедневные потребности в колбасных изделиях каждого вида также известны и соответственно равны 450, 370 и 400 т. Себестоимость 1 т каждого вида колбасных изделий на каждом заводе определяется матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти такое распределение выпуска колбасных изделий заводами, при котором себестоимость изготовленной продукции является минимальной.

Ответ: $Z_{min} = 2750$.

$$X = \begin{pmatrix} 170 & 150 & 0 \\ 280 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 50 \\ 0 & 0 & 350 \end{pmatrix}$$

Задача 13. Совхозы А1, А2, А3 выделяют соответственно 11, 11 и 8 т молока для ежедневного снабжения четырех молочных кухонь, потребности которых составляют соответственно 5, 9, 9 и 7 т молока. Стоимость перевозок от каждого совхоза к каждой кухне известна и задается матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Требуется организовать снабжение таким образом, чтобы добиться минимальных транспортных расходов при условии полного обеспечения потребителей молока:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 93$.

Задача 14. На трех складах имеется соответственно 74, 40 и 36 ед. однородного товара. Потребность магазинов соответственно равна 20, 45 и 30 ед. Стоимость перевозок от каждого склада к каждому магазину задается матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Найти план перевозок, чтобы общая стоимость всех перевозок была минимальная и потребности магазинов были удовлетворены:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 30 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 215$.

Задача 15. В резерве трех железнодорожных станций А, Б, В находятся соответственно 60, 80 и 70 порожних вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки зерна, если потребность в вагонах соответственно равна 40, 60, 80 и 60. Стоимость перегона одного вагона от железнодорожной станции к пункту погрузки зерна соответственно равна:

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 15 & 14 \\ 14 & 13 & 12 & 11 \\ 15 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

При этом следует помнить, что в пунктах 2 и 3 нет условий для длительного хранения зерна, а поэтому его необходимо вывезти из этих пунктов полностью.

Ответ: $Z_{min} = 2510$.

Задача 16. Четыре различных предприятия могут выпускать любой из четырех видов продукции. Производственные мощности предприятий позволяют обеспечить выпуск продукции каждого вида в количествах 50, 70, 100 и 30 тыс. штук, а плановое задание составляет соответственно 30, 80, 20 и 100 тыс. штук.

Матрица С характеризует себестоимость единицы *i*-го вида продукции при производстве его на *j*-м предприятии:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Найти оптимальное распределение планового задания между предприятиями.
Ответ: $Z_{min} = 120$.

Задача 17. Для контроля за работой космической ракеты установлены датчики четырех типов: Д1, Д2, Д3 и Д4 в количествах 20, 40, 50 и 40 штук соответственно. Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и т.п.) и результат передает по отдельному каналу связи любому из трех типов наземных автоматических регистрирующих устройств Р1, Р2, Р3, количество которых соответственно равно 70, 30 и 60 штук. Затраты времени на включение соответствующего канала связи определяются элементами матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Здесь элемент «4» означает время, затраченное на включение канала связи датчика Д2 с регистратором Р3. Как закрепить датчики за регистрирующими устройствами, чтобы суммарные затраты времени на переключение каналов связи были минимальными?
Ответ: $Z_{min} = 240$.

Задача 18. Найти оптимальное распределение трех видов механизмов, использующихся в количествах 45, 20 и 35 ед. между четырьмя участками работ, потребности которых соответственно равны 10, 20, 30 и 40 ед., при следующей матрице производительности каждого из механизмов на соответствующем участке работы:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 565$.

Задача 19. Завод имеет три цеха и четыре склада. Ежедневная производительность цехов соответственно равна 30, 40 и 20 тыс. изделий. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад № 1 – 25; № 2 – 30; № 3 – 35; № 4 – 15 тыс. изделий. Стоимость перевозки единицы изделия из цеха в склад задается матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 2\ 3\ 1/2\ 4 \\ 3\ 2\ 5\ 1 \\ 4\ 3\ 2\ 6 \end{pmatrix}$$

Составить план перевозки изделий в склады, минимизирующий транспортные расходы. При этом необходимо учесть, что на складах № 1 и 4 созданы лучшие условия хранения, поэтому их следует загрузить полностью.

Ответ: $Z_{min} = 152{,}5$.

Задача 20. Найти такой план перевозок товаров от поставщиков (a_i) к потребителям (b_j), который обеспечивал бы минимальные транспортные расходы. Тарифы перевозок единицы груза задаются следующими таблицами:

a_i \ b_j	150	120	80	50
130	3	5	7	11
100	1	4	6	3
170	5	8	12	7

$$X = \begin{pmatrix} 0\ 50\ 80\ 0 \\ 50\ 0\ 0\ 50 \\ 100\ 70\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 2070$.

Задача 21.

a_i \ b_j	22	35	25	41
30	23	27	16	18
40	12	17	20	51
53	22	28	12	32

$$X = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 30 \\ 5\ 35\ 0\ 0 \\ 17\ 0\ 25\ 11 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 2221$.

Задача 22.

b_j / a_i	100	50	150	100
200	5	1	3	4
150	2	3	4	2
50	8	5	1	6

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 100 & 50 \\ 100 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 900$.

Задача 23.

b_j / a_i	1000	550	490	960
400	15	7	11	4
1200	6	4	12	8
500	7	11	5	10

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 400 \\ 650 & 550 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 490 & 0 \\ 340 & 0 & 0 & 560 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 10\,220$.

Задача 24.

b_j / a_i	54	32	25	15
120	8	11	1	4
97	5	2	7	3
69	10	4	3	5

Ответ: $Z_{min} = 408$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 & 4 & 91 \\ 54 & 32 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 69 \end{pmatrix}$$

Задача 25.

b_j / a_i	15	7	14	62
51	24	19	21	15
19	14	21	15	16
28	10	9	6	11

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 51 \\ 15 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 1263$.

Задача 26.

b_j / a_i	10	25	215	40
133	7	1	4	2
94	2	15	4	3
154	7	10	5	8
28	2	4	11	10

Ответ: $Z_{min} = 1038$.

Задача 27.

b_j / a_i	95	325	416	800
1210	11	21	13	8
1100	4	7	10	13
730	8	6	11	7

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 68 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 94 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 53 & 0 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Ответ: $Z_{min} = 12\,485$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 395 & 815 \\ 95 & 0 & 416 & 0 & 589 \\ 0 & 325 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Костров, В.Н. Транспортная логистика: учеб. пособие / В.Н. Костров, В.В. Цверов, А.А. Никитин. – Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2021. – 304 с. – ISBN 978-5-9729-0559-1. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1832080 (дата обращения: 18.06.2024).

2. Кочнева, Д.И. Транспортная логистика: учеб. пособие / Д.И. Кочнева. – Екатеринбург, 2023. – 100 с. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/369485 (дата обращения: 17.06.2024).

3. Веремчук, Н.С. Прикладная математика: учебно-методическое пособие / Н.С. Веремчук, Т.А. Полякова. – Омск: СибАДИ, 2022. – 198 с. – ISBN 978-5-00113-195-3 // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/270887 (дата обращения: 17.06.2024).

4. Макаров, С.И. Высшая математика: математический анализ и линейная алгебра: учеб. пособие / С.И. Макаров. – Москва: КноРус, 2023. – 320 с. – ISBN 978-5-406-11035-5. – URL: https://book.ru/book/947276 (дата обращения: 17.06.2024).

5. Экономико-математические методы планирования перевозок грузов в транспортной логистике: учеб. пособие / сост. Е.С. Галактионова. – Омск: СибАДИ, 2020. – 55 с. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/163765 (дата обращения: 17.06.2024).

6.Ембулаев, В.Н. Разработка математической модели расчёта поездок пассажиров на маршруте по данным входа и выхода / В.Н. Ембулаев // Математическое моделирование. – № 12, т. 31. – Москва, 2019. – С. 86–96.

7. Ембулаев, В.Н. Расчётный способ определения маршрутных корреспонденций пассажиропотоков при обработке данных входа и выхода / В.Н. Ембулаев // Известия РАН. Теория и системы управления. – № 5. – Москва, 2021. – С. 79–84.

8. Embulaev, V.N. Development of a Mathematical Model to Calculate Passenger Journeys on a Route According to the Entry and Exit Data / V.N. Embulaev // Mathematical Model and Computer Simulations. – 2020. – Vol. 12, No. 4. – P. 590–596.

9. Embulaev, V.N. A method for calculating the route correspondence of passenger flows by the entry and exit data / V.N. Embulaev // Journal of computer and systems sciences international. – 2021. – Vol. 60, No. 5. – P. 770–775.