

Министерство образования и науки Российской Федерации

Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

**М.А. ПЕРВУХИН
А.А. СТЕПАНОВА**

**ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
И ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ
(Комбинаторика)**

Практикум

Владивосток
Издательство ВГУЭС
2010

Рецензенты: Г.К. Пак, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой алгебры и логики ДВГУ;
А.А. Ушаков, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования и информатики ДВГТУ

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект НШ–2810.2008.1) и гранта АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/1502)

М.А. Первухин, А.А. Степанова

П 26 **ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ (КОМБИНАТОРИКА) [Текст]: практикум.** – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2010. – 48 с.

Знание комбинаторики необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам и специалистам по теории кодов. В данном практикуме приведены основные понятия и методы комбинаторики. Изложение материала построено на систематическом использовании теоретико-множественных понятий. Рассмотрено большое количество примеров. Простота и наглядность изложения материала делают его доступным самому широкому кругу читателей.

Предназначен студентам, изучающие такие дисциплины, как “Дискретная математика”, “Теория вероятностей и математическая статистика”, “Теория чисел”. Также материал, приведённый в данном практикуме, может быть использован учителями для проведения факультативных занятий в школе и при подготовке к математическим олимпиадам.

ББК 22.11

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

© Издательство Владивостокский
государственный университет
экономики и сервиса, 2010

ВВЕДЕНИЕ

Довольно часто при решении задач приходится иметь дело с подсчетом числа различных комбинаций, составленных из букв, цифр и иных объектов. Область математики, которая изучает вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется *комбинаторикой*.

Комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний; для составления планов производства и реализации продукции. Установлены связи между комбинаторикой и задачами линейного программирования, статистики и т.д. Комбинаторика используется для составления и декодирования шифров и для решения других проблем теории информации. Значительную роль комбинаторные методы играют и в чисто математических областях – теории вероятностей, теории групп и их представлений, изучении оснований геометрии, неассоциативных алгебр и т.д.

Поскольку, как правило, комбинаторика имеет дело с конечным числом объектов, то возникает вопрос: почему бы не составить полный перечень этих объектов и попросту пересчитать безо всяких там “комбинаторных рассуждений”? Рассмотрим пример.

Задача 1. *Монету бросают два раза. Сколько разных последовательностей орлов(o) и решек(p) можно при этом получить?*

Перечислим все случаи: (o,o) , (o,p) , (p,o) , (p,p) . Задача, как видим, оказалась простой. Но если решать подобную задачу, методом перебора, для 20 бросаний, то без помощи компьютера уже не обойтись. А если надо найти число различных последовательностей орлов и решек, когда монету бросают n раз, то перебор невозможен. В этом случае соображения комбинаторного характера позволяют мгновенно дать ответ: искоемое число есть 2^n . Данный пример ясно показывает преимущество общих комбинаторных соображений по сравнению с примитивным перебором. Не следует, конечно, думать, что все комбинаторные задачи можно решить так же мгновенно. Рассмотренная задача относилась к числу простейших. В комбинаторике много трудных задач, а есть и такие, решения которых ещё никому не удалось найти.

Особую роль в комбинаторике играет точная формулировка задачи. Приведём пример.

Задача 2. *Сколькими способами можно разложить три монеты по трём карманам?*

Ясно, что такая формулировка задачи некорректна, так как возникают вопросы: различны ли монеты, отличаются ли друг от друга карманы и можно ли положить все монеты, например, в один карман? В зависимости от способа понимания этой задачи можно получить шесть разных ответов – 1, 3, 5, 6, 10, 27! Допустим, что все монеты и карманы

считаются различными. Если в каждый карман кладётся по принципу справедливости по одной монете, то получаем 6 вариантов. Если же понимать распределение монет в общем смысле, то получаем максимальное число $3^3 = 27$ вариантов. Допустим, все карманы различны, а монеты не различаются. В этом случае получается 10 вариантов – 3 варианта типа (3, 0, 0) (когда все монеты кладутся в один карман) + 6 вариантов типа (2, 1, 0) + 1 вариант типа (1, 1, 1). Случай, когда все монеты различны, а карманы не различаются аналогичен только что рассмотренному. Если не различать ни карманы, ни монеты и учитывать принцип справедливости, то имеет место только один способ распределения. Ответы 3 и 5 предлагаем получить читателю самостоятельно.

Некоторая расплывчатость понятия о числе вариантов связана с тем, что варианты – это умозрительные понятия, их нельзя увидеть непосредственно (если нет перечня). Полезно поэтому мысленно представить себе полный перечень различных вариантов (закодированных каким-либо образом). Число вариантов при этом превращается в число записей. А это уже нечто материальное и может интерпретироваться, например, как количество ячеек машинной памяти. Такая мысленная “материализация” не имеет, конечно, ничего общего с решением задачи прямым подсчетом, требующим отнюдь не мысленного, а реального составления перечня. Да и речь идет не о решении, а лишь о лучшем понимании постановки задачи. Итак, **Главное Правило Комбинаторики**: *прежде чем подсчитывать число различных вариантов, необходимо точно выяснить смысл слов «различные варианты»*. Само по себе это правило не позволит решить ни одной задачи, зато поможет избежать путаницы и недоразумений при решении множества задач.

Данное учебно-практическое пособие соответствует разделу “Комбинаторика” учебной программы курса “Дискретная математика” для специальности 080116.65 – “Математические методы в экономике” и направления 080700 – “Бизнес-информатика.

Глава 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Факториал

Для сокращения записи $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ было введено обозначение $n!$ (читается “ n факториал”). Легко заметить, что для любого $n \geq 2$ верно равенство $n! = n \cdot (n-1)!$. Условились считать, что $0! = 1$. Тем самым равенство $n! = n \cdot (n-1)!$ стало выполняться и при $n = 1$.

Задача 1.1.1. Вычислите значения следующих выражений:

а) $1!$;

б) $2!$;

в) $3!$;

г) $5 \cdot 4 \cdot 3!$;

е) $\frac{8!}{6!}$;

ж) $\frac{13 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23!}{26!}$;

з) $\frac{10!}{6! \cdot 4!}$.

Задача 1.1.2. Докажите, что число $100!$ не является полным квадратом.

Решение. Если бы число $100!$ было полным квадратом, то каждое простое число входило бы в разложение этого числа на простые множители в чётной степени. Однако в произведении $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100 = 100!$ есть только одно число, делящееся на простое число 97 (само число 97). Поэтому число 97 входит в разложение числа $100!$ на простые множители в первой степени. Получено противоречие с тем, что $100!$ – полный квадрат.

Задача 1.1.3. Чему равно значение выражения

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{2000}{2001!}?$$

Решение. Воспользуемся тем, что $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$. Тогда данная в условии сумма запишется в виде

$$\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2000!} - \frac{1}{2001!}\right).$$

В полученной сумме почти все слагаемые (за исключением первого и последнего) сокращаются, поэтому значение этого выражения равно $1 - \frac{1}{2001!}$.

Задача 1.1.4. Найдите значение выражения

$$1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \dots - 2000! \cdot 2002 + 2001!.$$

Решение. Обозначим данное выражение за S и начнём преобразовывать его с конца: $-2000! \cdot 2002 + 2001! = 2000!(-2002 + 2001) = -2000!$. Таким образом, $S = 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \dots + 1999! \cdot 2001 - 2000!$. Далее, $1999! \cdot 2001 - 2000! = 1999! \cdot (2001 - 2000) = 1999!$. Отсюда $S = 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \dots - 1998! \cdot 2000 + 1999!$. Сокращая и дальше таким же образом сумму S , мы приходим к тому, что $S = 1! = 1$.

Задача 1.1.5. Докажите, что для любого натурального n ($n > 2$), выполнено неравенство $(n!)^2 > n^n$.

Решение. Представим $(n!)^2$ в виде произведения n сомножителей следующим образом:

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n) \cdot (n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1) = \\ &= (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot \dots \cdot (n \cdot 1). \end{aligned}$$

Каждый из сомножителей имеет вид $k \cdot (n+1-k)$ для некоторого k от 1 до n . Но каждое такое выражение не меньше, чем n . В самом деле, $k \cdot (n+1-k) - n = (k-1)(n-k)$ — неотрицательное выражение, а если k не равно 1 и n , то строго положительное выражение. Итак, если $n > 2$, то одно из выражений $(1 \cdot n), (2 \cdot (n-1)), \dots, (n \cdot 1)$ положительно, а остальные неотрицательные.

Задача 1.1.6. Найти все целые положительные решения уравнения

$$(n+2)! - (n+1)! - n! = n^2 + n^4.$$

Первое решение. Если воспользоваться равенствами $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ и $(n+2)! = (n+2)(n+1) \cdot n!$, то уравнение можно переписать в виде $n! \cdot ((n+2) \cdot (n+1) - (n+1) - 1) = n^2 \cdot (n^2 + 1)$ или $n! \cdot (n+2) \cdot n = n^2 \cdot (n^2 + 1)$. Проверяем, что $n = 1$ и $n = 2$ не являются решениями, а $n = 3$

является решением. Покажем, что при $n > 3$ или $n - 2 > 1$ равенство не выполняется. Пусть $n - 2 \geq 1$. Перепишем уравнение:

$$(n - 2)!(n + 2) \cdot (n - 1) = (n^2 + 1) \text{ или } (n^2 + 1) (n + 2) \cdot (n - 1).$$

Преобразовывая (раскрывая скобки), получим $n \leq 3$. Ответ: $n = 3$.

Второе решение. Перепишем уравнение в виде $n! = (n \cdot (n^2 + 1)) / (n + 2)$. Преобразовывая правую часть, получим $n! = n^2 - 2n + 5 - 10 / (n + 2)$. Последняя дробь будет целым числом при $n = 3$ и $n = 8$, но последнее число не является решением (подставьте!).

Задача 1.1.7. *Какое наименьшее натуральное число не является делителем $50!$?*

Решение. Простое число 53 не входит в разложение на простые множители числа $50!$, поэтому $50!$ не делится на 53. С другой стороны ясно, что $50!$ делится на $51 = 3 \cdot 17$ и на $52 = 4 \cdot 13$.

Задача 1.1.8. *Докажите, что найдётся такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.*

Решение. Например, при $n = 101!$ – 101 произведение первых $n + 100$ натуральных чисел равно произведению n подряд идущих чисел, начиная с 102 и заканчивая $n + 101$. Действительно, равенство

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 101 \cdot 102 \cdot \dots \cdot (n + 100) = 102 \cdot \dots \cdot (n + 101)$$

равносильно следующему

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 101 = n + 101,$$

которое верно.

1.2. Элементы теории множеств

Часто приходится говорить о нескольких вещах, объединённых некоторым общим признаком. Так, можно говорить о множестве всех стульев в комнате, о множестве учеников какой-то школы, о множестве всех рыб в океане, о множестве всех точек на данной окружности и т. д.

Предметы, составляющие данное множество, называются его *элементами*. Для того чтобы указать, что данное множество A состоит из элементов x, y, \dots, z , обычно пишут $A = \{x, y, \dots, z\}$. Например, множество дней недели состоит из элементов понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье, множество месяцев –

из элементов январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь. Если известно свойство P , которое связывает элементы данного множества A , то это множество записывают в виде $A = \{x \mid x \text{ обладает } P\}$. Например, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x:2\}^1$ – множество всех чётных натуральных чисел.

Фигурные скобки в обозначении множества показывают, что элементы объединены в одно целое – множество A . Тот факт, что x является элементом множества A , записывают с помощью знака \in так: $x \in A$ (читается “ x принадлежит множеству A ”). Если же данный элемент x не принадлежит множеству A , то пишут $x \notin A$. Например, если B означает множество всех чётных натуральных чисел, то $6 \in B$, а $3 \notin B$. Если A – множество всех месяцев в году, то “май” $\in A$, а “среда” $\notin A$. Таким образом, когда мы говорим о множестве, то объединяем некоторые предметы в одно целое, а именно, в множество, элементами которого они являются. Основатель теории множеств Георг Кантор подчеркнул это следующими словами: “Множество есть многое, мыслимое нами как единое”.

Само понятие “множество” наводит на мысль, что этот объект должен содержать много элементов. Но в математике рассматриваются и множества, содержащие только один элемент, и даже множество, не имеющее ни одного элемента. Это множество называется *пустым* и обозначается \emptyset .

На самом деле, школьная математика имеет дело с множествами на каждом шагу. Особенно часто встречаются числовые множества, т.е. множества, составленные из чисел. Приведем некоторые примеры числовых множеств:

$\mathbf{N} = \{2, 3, 4, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел;

$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ – множество всех целых чисел;

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$ – множество всех рациональных чисел;

\mathbf{R} – множество всех вещественных (действительных) чисел;

\mathbf{C} – множество всех комплексных чисел;

$\{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ – множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $-1 \leq x \leq 2$, и т.д.

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*. Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов. В противном случае, множество называется *бесконечным*. Примеры конечных множеств: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{0, 1\}, \{4, 7, 12, 8, 1\}$, множество учеников некоторой школы и т.д.

Множество B называется *подмножеством* множества A , если всякий элемент множества B является и элементом множества A . В этом случае пишут $B \subseteq A$ (или $A \supseteq B$).

Из школьного курса математики известно, что имеют место следующие включения:

$$\mathbf{N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R.}$$

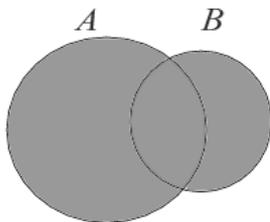
Два множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов. Иначе, два множества A и B равны тогда и только тогда когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. В этом случае применяется запись $A = B$.

Введем некоторые операции над множествами.

Объединением двух множеств A и B (обозначение $A \cup B$) называется множество C , элементы которого принадлежат множеству A **или** множеству B , т.е.

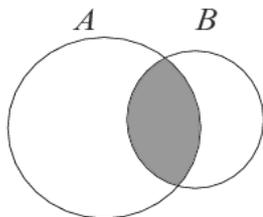
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Наглядно операции над множествами можно иллюстрировать, изображая множества в виде кругов (иногда их называют *кругами Эйлера*). Так на следующем рисунке область, закрашенная серым, показывает объединение множеств A и B .



Пересечением двух множеств A и B (обозначение $A \cap B$) называется множество C , элементы которого принадлежат **как** множеству A , **так и** множеству B т.е.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$



1.3. Основные правила комбинаторики

ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ. Пусть объект a можно выбрать t способами, объект b – n способами, не совпадающими со способами выбора объекта a . Тогда выбор “либо a , либо b ” можно осуществить $t+n$ способами. Если среди способов выбора объектов a и b есть k общих, то указанный выбор можно осуществить $t + n - k$ способами.

Задача 1.3.1. Имеется 15 билетов в цирк и 6 билетов в кинотеатр. Сколькими способами можно выбрать 1 билет?

Решение. Так как нам нужно выбрать 1 билет, который был бы **ЛИБО** билетом в цирк, **ЛИБО** билетом в кинотеатр (при этом подразумевается, что все билеты разные), то по правилу суммы получаем: $15 + 6 = 21$ способом.

Задача 1.3.2. Сколькими способами можно из 28 костей домино выбрать кость, на которой есть 1 или 2?

Решение. Выпишем все кости, содержащие 1:

(0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)

их 7 штук. Ясно, что костей, содержащих 2, тоже 7 штук. Заметим, что среди них есть кость которая содержит и 1, и 2. Это кость (1,2). Поэтому общее число способов равно $7 + 7 - 1 = 13$.

ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. Если объект a можно выбрать t способами, а объект b можно выбрать n способами, то выбор пары “ a и b ” можно осуществить $t \cdot n$ способами.

Задача 1.3.3. Из города A в город B идёт 6 дорог, из B в C – 4 дороги. Сколько путей, проходящих через B , ведут из A в C ?

Решение. Чтобы посчитать число путей, проходящих из A в C через B , нам нужно выбрать один путь из A в B (из возможных 6) **И** один путь из B в C (из возможных 4). По правилу произведения получаем: $6 \cdot 4 = 24$ дороги.

Задача 1.3.4. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную букву из букв слова “учебник”?

Решение. Гласную можно выбрать тремя способами (гласные: $у, е, и$), а согласную четырьмя способами (согласные: $ч, б, н, к$). Так как нужно выбрать гласную **И** согласную буквы, то число способов равно $3 \cdot 4 = 12$.

Задача 1.3.5. Сколько существует двузначных чисел, не содержащих цифру 8?

Решение. Вначале выпишем все числа, удовлетворяющие условию задачи:

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19,
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29,
30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39,
.....
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79,
90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99.

Легко посчитать, что получили $8 \cdot 9 = 72$ числа. Теперь применим методы комбинаторики к решению данной задачи. Любое двузначное число в десятичной системе счисления имеет вид \overline{ab} , где $1 \leq a \leq 9$ и $0 \leq b \leq 9$. Таким образом, для выбора числа десятков у нас имеется 9 вариантов, а для числа единиц – 10 вариантов. По условию цифра 8 не должна входить в полученное число. Значит имеем 8 вариантов для десятков и 9 вариантов для единиц. Так как нужно выбрать число десятков **И** число единиц, то по правилу произведения получаем $8 \cdot 9 = 72$ способов.

Задача 1.3.6. *Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?*

Решение. Такими числами, например, являются 12321, 58785. Первую цифру искомого числа (первую слева) мы можем выбрать из цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Заметим, что цифру 0 на первое место мы поставить не можем, так как иначе получим четырёхзначное число (например, число 02345 считается четырёхзначным). Итак, для первой цифры имеем 9 вариантов. Выбор второй и третьей цифры мы можем сделать 10 способами (можно использовать цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Раз число должно одинаково читаться слева направо и справа налево, то первая цифра числа совпадает с пятой, а вторая с четвёртой, поэтому для 4 и 5 цифры есть только один вариант. Тогда по правилу произведения имеем

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900 \text{ чисел.}$$

Задача 1.3.7. *Сколько различных слов, содержащих 6 букв, можно составить из 33-х букв при условии, что буквы не должны повторяться? (Словом называем любую последовательность букв.)*

Решение. Первую (слева) букву можно выбрать 33 способами. Вторую букву можно выбрать уже 32 способами (так как буквы не должны повторяться). Третью – 31 способом. Четвёртую – 30 способа-

ми. Пятую – 29 способами. Шестую – 28 способами. Используя правило произведения получаем

$$33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 = 797\,448\,960 \text{ способов.}$$

Задача 1.3.8. *В киоске продают 5 видов конвертов, 4 вида марок и 10 видов ручек. Сколькими способами можно купить ручку или конверт с маркой?*

Решение. По правилу произведения конверт с маркой можно купить $5 \cdot 4$ способами. Тогда по правилу суммы получаем, что купить ручку или конверт с маркой можно $10 + 5 \cdot 4 = 30$ способами.

Задача 1.3.9. *Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?*

Решение. Всего четырёхзначных чисел:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$$

Четырёхзначных чисел, в записи которых нет ни одной чётной цифры:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625,$$

так как мы можем использовать только цифры 1,3,5,7,9. Тогда получаем

$$9000 - 625 = 8375 \text{ чисел.}$$

1.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.4.1. *Делится ли число $30!$ на: а) 92; б) 94?*

Задача 1.4.2. *Выпишите все натуральные делители числа: а) $4!$; б) $5!$.*

Задача 1.4.3. *Докажите, что если $n < t$, то $t!$ делится на $n!$ без остатка.*

Задача 1.4.4. *Что больше и во сколько раз:*

а) $6! \cdot 5$ или $5! \cdot 6$; б) $(n+1)!n$ или $n!(n+1)$?

Задача 1.4.5. *Решите уравнения:*

$$\text{а) } \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72; \quad \text{б) } \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)!} = \frac{5}{6}.$$

Задача 1.4.6. Докажите, что тождество

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

имеет место для любого натурального n .

Задача 1.4.7. Докажите, что тождество

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

имеет место для любого натурального n .

Задача 1.4.8. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с неё? То же самое при условии, что спуск и подъём происходят по разным путям.

Задача 1.4.9. У одного человека есть 8 книг по математике, а у другого – 10. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?

Задача 1.4.10. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы W . а) Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трёх букв, причём эти буквы могут повторяться? б) Если позывные состоят из четырёх букв, которые не повторяются? (В современном латинском алфавите 26 букв.)

Задача 1.4.11. В автомашине 7 мест. Сколькими способами семь человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

Задача 1.4.12. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали? (На шахматной доске 64 клетки.)

Задача 1.4.13. Номер автомашины состоит из трёх букв русского алфавита (30 букв) и трёх цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?

Задача 1.4.14. Бросают игральную кость с 6 гранями и запускают волчок, имеющий 8 граней. Сколькими различными способами они могут упасть?

Задача 1.4.15. Сколькими способами на шахматной доске можно указать два квадрата – белый и чёрный? А если нет ограничений на цвет выбранных квадратов?

Задача 1.4.16. Из трёх экземпляров учебника алгебры, пяти экземпляров учебника геометрии и семи экземпляров учебника физики надо

выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 1.4.17. *В магазине есть 6 экземпляров романа “Рудин”, 3 – романа “Война и мир” и 4 – романа “Отцы и дети”. Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы “Рудин” и “Война и мир”, и 7 томов, содержащих романы “Война и мир” и “Отцы и дети”. Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?*

Задача 1.4.18. *Имеются три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами они могут упасть при условии, что по крайней мере два волчка упадут на сторону, помеченную цифрой 1?*

Задача 1.4.19. *Назовём натуральное число “симпатичным”, если в его записи встречаются только нечётные цифры. Сколько существует четырёхзначных “симпатичных” чисел?*

Задача 1.4.20. *Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?*

Задача 1.4.21. *Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости одну за другой так, чтобы вторую можно было приложить к первой?*

Глава 2. РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ

2.1. Размещения

Определение. Пусть дано n -элементное множество $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. *Неупорядоченной выборкой* из n элементов по k элементов (или просто, выборкой из n по k) называется любое k -элементное подмножество данного множества, т.е. подмножество, содержащее k элементов данного множества.

Пример. Пусть дано множество $\{1, 2, 3\}$. Тогда выборками из 3-х по 2 будут: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.

Определение. Выборка называется *упорядоченной*, если зафиксирован некоторый порядок следования её элементов. Упорядоченную выборку будем обозначать при помощи скобок: $\langle \rangle$.

Пример. Пусть дано множество $\{1, 2, 3, 4\}$. Упорядоченными выборками из 4-х по 2 будут: $\langle 1, 2 \rangle$, $\langle 2, 1 \rangle$, $\langle 1, 3 \rangle$, $\langle 3, 1 \rangle$, $\langle 1, 4 \rangle$, $\langle 4, 1 \rangle$, $\langle 2, 3 \rangle$, $\langle 3, 2 \rangle$, $\langle 2, 4 \rangle$, $\langle 4, 2 \rangle$, $\langle 3, 4 \rangle$, $\langle 4, 3 \rangle$.

Определение. *Размещением из n по k* называется любая упорядоченная выборка из n элементов по k элементов. Число всевозможных размещений из n элементов по k будем обозначать A_n^k ($n \geq k$). A – первая буква французского слова *arrangement*, что означает размещение, приведение в порядок.

Теорема 2.1.1.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Доказательство. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – некоторые различные элементы. Посчитаем число всевозможных размещений из этих n элементов по k элементов. Пусть $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$ – одно из таких размещений. Элемент a_{i_1} можно выбрать n способами, элемент a_{i_2} – $(n-1)$ способами, ..., элемент a_{i_k} – $(n-k+1)$ способами. По правилу произведения получаем $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$. Домножив и разделив правую часть последнего равенства на $(n-k)!$, имеем $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Задача 2.1.1. В составе гаражного кооператива 20 человек. На очередном заседании им предстояло выбрать из членов кооператива председателя и его заместителя. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение. Выбрать председателя можно 20 способами. Если председатель выбран, то выбор его заместителя мы можем произвести уже из 19 человек. По правилу произведения получаем: $20 \cdot 19 = 380$ способов. Используя понятие размещения, легко получить, что число способов равно A_{20}^2 .

Задача 2.1.2. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трёх цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещены?

Решение. Необходимо посчитать, сколько существует трёхзначных, четырёхзначных и пятизначных чисел, составленных из этих пяти цифр. Трёхзначных чисел – A_5^3 , четырёхзначных – A_5^4 , пятизначных – A_5^5 . По правилу сложения получаем $A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 60 + 120 + 120 = 300$ чисел.

Задача 2.1.3. Компания из семи юношей и десяти девушек танцует. а) Если в каком-то танце участвуют все юноши, то сколько имеется вариантов участия девушек в этом танце? б) Тот же вопрос, при условии, что относительно двух девушек можно с уверенностью сказать, что они будут приглашены на танец?

Решение. а) По условию все юноши принимают участие в танце, значит осталось выбрать партнершу каждому из юношей. Это можно сделать $A_{10}^7 = 604\ 800$ способами.

б) Партнеров по танцу для данных двух девушек можно выбрать A_7^2 способами, а для остальных 5 юношей есть A_8^5 способов выбора себе партнерш для танца. Тогда по правилу произведения получаем $A_7^2 \cdot A_8^5 = 282\ 240$ способов.

Задача 2.1.4. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюда и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдо и одну ложку)?

Решение. Так как все чашки отличаются друг от друга, то число способов распределения 4 чашек по 3 студентам равно числу размещений из 4 элементов по 3. Аналогично, число способов распределения 5 блюдец по 3 студентам равно числу размещений из 5 элементов по 3, и число способов распределения 6 ложек по 3 студентам равно числу

размещений из 6 элементов по 3. Число способов, которыми могут быть распределены между тремя студентами чашки, блюда и ложки находится по правилу произведения:

$$A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 172\ 800.$$

Задача 2.1.5. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к паровозу, а трое – спиной к паровозу, остальным троем безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

Решение. Число способов размещения четырёх пассажиров, которые желают сидеть лицом к паровозу, равно A_5^4 . Число способов размещения трёх пассажиров, которые желают сидеть спиной к паровозу, равно A_5^3 . Число способов размещения остальных трёх пассажиров по трём оставшимся местам равно $3!$. По правилу умножения искомое число равно $A_5^4 \cdot A_5^3 \cdot 3! = 3 \cdot (5!)^2 = 43\ 200$ способов.

2.2. Перестановки

Определение. Перестановкой из n различных элементов называется размещение из n по n . Таким образом, перестановки из n различных элементов отличаются друг от друга лишь порядком следования входящих в них элементов. Число всевозможных перестановок из n элементов будем обозначать P_n . P – первая буква французского слова *permutation*, что означает перемещение, перегруппировка.

Из теоремы 2.1.1. легко получается

Следствие 2.2.1. $P_n = n!$.

Задача 2.2.1. Сколькими способами можно расставить 15 различных книг на полке?

Решение. Всякий способ расстановки этих 15 книг соответствует некоторой перестановке из 15 элементов (книг). По предыдущему следствию получаем $P_{15} = 15!$ способов.

Задача 2.2.2. Сколько различных четырёхзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

Решение. Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить P_4 перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, т.к. натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число таких перестановок равно P_3 . Значит, искомое число четырёхзначных чисел

(без повторения цифр), которые можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, равно $P_4 - P_3$. Получаем, $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18$ чисел.

Задача 2.2.3. *Сколько слов можно образовать из букв слова **фрагмент**, если слова должны состоять: а) из восьми букв, б) из семи букв, в) из трёх букв?*

Решение. В слове фрагмент 8 букв алфавита.

а) Всевозможные перестановки 8 букв по восьми местам: $P_8 = 8!$.

б) Размещения 8 букв по 7 местам: $A_8^7 = 8!$.

в) Размещения 8 букв по 3 местам: $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Задача 2.2.4. *Сколькими способами можно расставить на полке семь книг, если а) две определённые книги должны всегда стоять рядом, б) эти две книги не должны стоять рядом?*

Решение. а) Мысленно положим эти две книги (которые должны стоять рядом) в один пакет. Тогда у нас 6 объектов: 5 книг и один пакет. Число способов расположить эти 6 объектов равно $P_6 = 6!$, но каждому из этих способов соответствует $P_2 = 2!$ способов расположения книг в пакете. По правилу произведения получаем $P_6 \cdot P_2 = 2 \cdot 6! = 1440$ способов.

б) Заметим, что справедливо равенство:

“число всевозможных перестановок 7 книг” – “число способов расстановки семи книг, когда две определённые книги всегда стоят рядом” = “число способов расстановки семи книг, когда две определённые книги никогда не стоят рядом”.

Тогда число способов расстановки семи книг, когда две определённые книги никогда не стоят рядом, равно $P_7 - P_6 \cdot P_2 = 7! - 2 \cdot 6! = (7 - 2) \cdot 6! = 5 \cdot 6! = 3600$.

Задача 2.2.5. *Бусы – это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. а) Сколько различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин? б) Предположим теперь, что бусы можно и переворачивать. Сколько тогда различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?*

Решение. а) Представим себе на время, что бусы нельзя поворачивать. Тогда их можно сделать 13! различными способами. Но ведь бусы остаются неизменными при циклических поворотах. Значит можно составить $\frac{13!}{13} = 12!$ бус.

б) Если к тому же бусы можно переворачивать, то различных бус будет в 2 раза меньше, т.е. $\frac{12!}{2} = 6 \cdot 11!$ бус.

Задача 2.2.6. *Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд так, чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом? В футбольной команде 11 игроков.*

Решение. По условию два игрока одной команды рядом стоять не могут. Значит, игроки двух команд чередуются. Размещаем игроков первой команды $11!$ способами. Теперь образовались 12 мест для размещения игроков второй команды. При этом возможны два варианта: игрок второй команды стоит первым или игрок второй команды стоит последним в шеренге. Следовательно, общее число размещений игроков двух команд будет $11! \cdot 11! + 11! \cdot 11!$ или $2 \cdot (11!)^2$.

Задача 2.2.7. *На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов, при условии, а) что Б не должен выступать до того, как выступит А; б) что А должен выступить непосредственно перед Б?*

Решение. а) *Решение первое.* Если А выступает первым, то на выступление следующих участников нет никаких ограничений. Тогда число способов равно $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$.

Если А выступает вторым, то первым может выступать любой из оставшихся, кроме Б. Тогда число вариантов равно $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 3!$.

Если А выступает третьим, то число способов равно $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3!$.

Если А выступает четвёртым, то пятым может выступать только Б. Тогда получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3!$ способов.

По правилу суммы получаем

$$4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 3! + 3!$$

Преобразуем последнее выражение

$$\begin{aligned} 4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 3! + 3! &= 4 \cdot 3! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 3! + 3! = \\ &= (4 + 3 + 2 + 1) \cdot 3! = 10 \cdot 3! = (20 \cdot 3!)/2 = \\ &= (5 \cdot 4 \cdot 3!)/2 = 5!/2 \text{ способов.} \end{aligned}$$

Число $5!/2$ наводит на второе решение.

Решение второе. Число перестановок из пяти человек равно $5!$, при этом с каждым правильным способом расположения докладчиков связан неправильный вариант. Например, рассмотрим расстановку “ДАГВБ” она удовлетворяет условию задачи. Если теперь в ней А и Б поменять местами, то получим “ДБГВА”, которая уже не будет удовлетворять условию. Поэтому и нужно исключить второй неправильный вариант, т.е. разделить число способов на 2.

б) Будем считать, что А и Б взялись за руки, и будем считать число всевозможных перестановок всех участников. Тогда число способов равно $4!$ (пару АБ считаем за одного человека).

2.3. Сочетания

Определение. Сочетанием из n по k называется любая неупорядоченная выборка из n элементов по k элементов. Число всевозможных сочетаний из n по k будем обозначать C_n^k ($n \geq k$). C – первая буква французского слова *combinaison*, что означает комбинация, согласование, подбор.

Теорема 2.3.1.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – некоторые различные элементы. Посчитаем число всевозможных сочетаний из этих n элементов по k элементов. Пусть $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$ – одно из таких сочетаний. Заметим, что этому сочетанию соответствуют $k!$ размещений (именно столько есть всевозможных перестановок из k различных элементов). Тогда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Задача 2.3.1. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

Решение. Для решения этой задачи необходимо использовать формулу для сочетания элементов, т.к. здесь не имеет значения порядок элементов в выборке. Тогда число способов равно

$$C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Задача 2.3.2. Сколькими способами можно составить трёхцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов и одна из полос должна быть красной?

Решение. Раз цвет одной из полос уже известен (красный), то осталось выбрать 2 других цвета. Это можно сделать C_4^2 способами. Теперь если мы перемешаем эти 3 цвета, то получим всевозможные варианты. Тогда число способов равно $C_4^2 \cdot 3!$.

Задача 2.3.3. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого n -угольника, если никакие 3 из них не пересекаются в одной точке?

Решение. Каждой точке пересечения двух диагоналей соответствует 4 вершины n -угольника, а каждому 4 вершинам n -угольника со-

ответствует 1 точка пересечения (точка пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в данных 4 точках). Поэтому число всех точек пересечения равно числу способов, которыми среди n вершин можно выбрать 4 вершины:

$$C_n^4 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!}.$$

Задача 2.3.4. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырёх человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как девочек всего 2, а в команде должна быть хотя бы одна девочка, то либо в команде 1 девочка, либо их 2. Если в команде 1 девочка, то её мы можем выбрать 2 способами (C_2^1) и укомплектовать команду недостающим количеством мальчиков мы можем C_7^3 способами. Если в команде 2 девочки, то их мы выбираем 1 способом, а мальчиков – C_7^2 способами. Итак, всего получаем $2 \cdot C_7^3 + C_7^2 = 91$ способ.

Задача 2.3.5. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?

Решение. Первую команду можно выбрать C_{10}^5 способами. Этот выбор полностью определяет вторую команду. Однако при таком подсчете каждая пара команд A и B учитывается дважды: один раз, когда в качестве первой команды выбирается команда A , и второй, – когда в качестве первой команды выбирается команда B . Таким образом, ответ: $C_{10}^5/2 = 252$ способами.

Задача 2.3.6. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

Решение. Четырёх девушек можно выбрать C_{12}^4 способами. После этого выбираем A_{15}^4 способами юношей (здесь уже существен порядок). По правилу произведения получаем $C_{12}^4 \cdot A_{15}^4 = 17\ 417\ 400$ способов.

Задача 2.3.7. Сколькими способами можно составить шесть слов из 32-х букв, если в совокупности этих шести слов каждая буква используется один и только один раз?

Решение. Добавим к 32-м буквам 5 одинаковых “перегородок” (они будут отделять друг от друга 6 слов) и рассмотрим все перестановки полученных объектов, при которых ни одна перегородка ни стоит в

начале или конце и никакие две перегородки не стоят рядом. Буквы переставляются $32!$ способами, а для перегородок имеем 31 место и их можно поставить C_{31}^5 способами. Так как порядок слов несуществен, получаем, что искомое число способов равно $\frac{32! \cdot C_{31}^5}{6!}$.

2.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.4.1. Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 местах?

Задача 2.4.2. Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать, если в один день можно сдать не более одного экзамена?

Задача 2.4.3. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги из 5?

Задача 2.4.4. Сколькими способами можно составить расписание занятий на 1 день, если преподается 15 предметов, в этот день 4 урока и все уроки различны?

Задача 2.4.5. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

Задача 2.4.6. Сколько четырёхбуквенных слов можно образовать из букв слова “сапфир”? б) Сколько среди них таких, которые содержат букву “р”? в) Сколько таких, которые начинаются с буквы “с” и оканчиваются буквой “р”?

Задача 2.4.7. В вазе стоят 9 различных красных и 7 различных розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из неё: а) 3 гвоздики; б) 6 гвоздик одного цвета; в) 4 красные и 3 розовые гвоздики?

Задача 2.4.8. Компания из двадцати мужчин разделяется на три группы, в первую из которых входят три человека, во вторую – пять, а в третью – двенадцать. Сколькими способами они могут это сделать?

Задача 2.4.9. Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трёх различных согласных и двух различных гласных, можно образовать из букв слова “уравнение”?

Задача 2.4.10. В турнире принимали участие n шахматистов. Каждые 2 шахматиста встретились 1 раз. Сколько партий было сыграно в турнире?

Задача 2.4.11. В чемпионате России по футболу (суперлига) участвует 16 команд, причём любые две команды встречаются друг с другом ровно 2 раза. Сколько матчей будет сыграно в конце сезона?

Задача 2.4.12. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (52 карты) по одной карте каждой масти? То же самое при условии, что среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, то есть двух королей, двух десятков и т.д.

Задача 2.4.13. Сколькими способами 5 девушек и 3 юноши могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

Задача 2.4.14. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого – 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Задача 2.4.15. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Задача 2.4.16. Сколькими способами можно выбрать из 15 различных книг набор, состоящий не более чем из 4 книг?

Задача 2.4.17. Сколькими способами можно переставить буквы слова “Юпитер” так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

Задача 2.4.18. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

Задача 2.4.19. Та же задача, но они садятся не за круглый стол, а на карусель и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими.

Задача 2.4.20. У отца есть 5 различных апельсинов, которые он выдает своим восьми сыновьям так, что каждый получает либо один апельсин, либо ничего. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 2.4.21. Имеется n абонентов телефонной сети. Сколькими способами можно одновременно соединить три пары?

Задача 2.4.22. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 2.4.23. Комплексная бригада состоит из двух маляров, трёх штукатуров и одного столяра. Сколько различных бригад можно создать из рабочего коллектива, в котором 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров?

Задача 2.4.24. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует а) треугольников; б) четырёхугольников с вершинами в этих точках?

Задача 2.4.25. Сколькими способами можно составить группу из 3 человек, выбирая её членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили одновременно?

Задача 2.4.26. В классе, в котором учатся Петя и Ваня – 31 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?

Задача 2.4.27. Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой?

Задача 2.4.28. Сколько существует шестизначных чисел, у которых по три чётных и три нечётных цифры?

Задача 2.4.29. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 2.4.30. Сколькими способами можно рассадить за круглый стол 6 мальчиков и 6 девочек так, чтобы мальчики и девочки чередовались? А если они садятся не за круглый стол, а на карусель, и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими?

Задача 2.4.31. Сколькими способами можно сформировать железнодорожно-дорожный состав из 9 вагонов так, чтобы 5-й и 7-й вагоны шли через один?

Задача 2.4.32. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5? Найдите сумму всех этих чисел.

Задача 2.4.33. Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

Задача 2.4.34. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как разделить их между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии?

Рассмотреть задачу также в том случае, когда комиссия состоит из n человек, а сейф можно открыть при наличии t членов комиссии.

Глава 3. РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

3.1. Размещения с повторениями

Определение. *Размещением с повторениями из n по k* называется упорядоченная выборка из n по k , элементы в которой могут повторяться. Число всевозможных размещений с повторениями из n по k будем обозначать \bar{A}_n^k . Заметим, что в данном случае не требуется выполнения неравенства $n \geq k$.

Теорема 3.1.1.

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Доказательство. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – некоторые различные элементы. Для того, чтобы выбрать размещение с повторениями $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$ из этих n элементов по k элементов, необходимо выбрать каждый элемент a_{i_j} ($1 \leq j \leq k$). Число вариантов выбора этих элементов – n . По правилу произведения получаем

$$\bar{A}_n^k = n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k.$$

Задача 3.1.1. *Надо отправить 6 электронных писем. Сколькими способами это можно сделать, если в нашем распоряжении 3 различных электронных адреса и каждое письмо можно отправить с любого из них?*

Решение. Перенумеруем 6 писем и 3 электронных адреса. Так как каждое из шести писем можно отправить с любого из трёх адресов, то искомое число – это число размещений с повторениями из трёх по шесть, т.е. 3^6 . Например, если письма 2, 3, 6 отправлены с первого электронного адреса, письма 1, 5 – со второго, письма 4, 3 – с третьего, то это соответствует размещению с повторениями $\langle 2, 1, 1, 3, 2, 1 \rangle$

Задача 3.1.2. *Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?*

Решение. Каждое трёхзначное число, удовлетворяющее условию задачи, соответствует некоторому размещению с повторениями из пяти элементов (цифр 1, 2, 3, 4, 5) по три. Тогда всего таких трёхзначных чисел: $\bar{A}_5^3 = 5^3 = 125$.

Задача 3.1.3. В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек. Трое судей должны независимо друг от друга перенумеровать их в порядке, отражающем их успехи в соревновании по мнению судей. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей. В какой доле случаев соревнования победитель будет определён?

Решение. Три судьи могут выбрать победителя 10^3 способами. В $A_{10}^3 = 720$ случаях они назовут трёх различных кандидатов в победители. Поэтому совпадение хотя бы у двух судей будет в $1000 - 720 = 280$ случаях. Доля таких случаев равна

$$\frac{280}{1000} = 0,28.$$

Задача 3.1.4. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. В городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают женщин) и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины. Сколькими способами могут они распределиться между, этими предприятиями?

Решение. Каждый юноша может выбирать любое из 5 мест работы, а каждая девушка – из 4 мест. По правилу произведения получаем $5^3 \cdot 4^2 = 2000$ способов выбора.

3.2. Перестановки с повторениями

Определение. Пусть у нас есть n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ..., n_k элементов k -го типа и общее число элементов – n , т.е.

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Перестановкой с повторениями из n элементов называется любая перестановка этих элементов, при условии, что элементы одного типа не различаются.

Число всевозможных перестановок с повторениями из n элементов будем обозначать $\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Теорема 3.2.1.

$$\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Доказательство. Число элементов в каждой перестановке равно $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Поэтому если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы $n!$. Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок. В самом деле, возьмем, например, перестановку

$$\underbrace{aa\dots a}_{n_1} \underbrace{bb\dots b}_{n_2} \dots \underbrace{xx\dots x}_{n_k}, \quad (1)$$

в которой сначала выписаны все элементы первого типа, потом все элементы второго типа, ..., наконец, все элементы k -го типа. Элементы первого типа можно переставлять друг с другом $n_1!$ способами. Но так как все эти элементы одинаковы, то такие перестановки ничего не меняют. Точно так же ничего не меняют $n_2!$ перестановок элементов второго типа, ..., $n_k!$ перестановок элементов k -го типа. Перестановки элементов первого типа, второго типа и т.д. можно делать независимо друг от друга. Поэтому (по правилу произведения) элементы перестановки (1) можно переставлять друг с другом $n_1!n_2!\dots n_k!$ способами так, что она останется неизменной. То же самое верно и для любого другого расположения элементов. Поэтому множество всех $n!$ перестановок распадается на подмножества, состоящие из $n_1!n_2!\dots n_k!$ одинаковых перестановок каждая. Значит, число различных перестановок с повторениями, которые можно сделать из данных элементов, равно

$$\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!},$$

где

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Задача 3.2.1. *Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове “математика”?*

Решение. Каждое слово, получающееся перестановкой букв в слове математика, является перестановкой с повторениями из 10-ти элементов, состоящей из двух элементов первого типа (букв “м”), трёх элементов второго типа (букв “а”), двух элементов третьего типа (букв “т”), одного элемента четвёртого типа (буквы “е”), одного элемента пятого типа (буквы “и”), одного элемента шестого типа (буквы “к”). Тогда число слов равно

$$\bar{P}_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

Задача 3.2.2. Сколькими способами можно переставить буквы в слове “опоссум” так, чтобы буква “п” шла непосредственно после буквы “о”?

Решение. Можем считать “оп” одной буквой. Тогда число способов равно

$$\bar{P}_6(1,1,2,1,1) = \frac{6!}{2!} = 360.$$

Задача 3.2.3. Сколькими способами можно переставить буквы в слове “перешеек” так, чтобы четыре буквы “е” не шли подряд?

Решение. Число различных перестановок из букв слова “перешеек” равно $\bar{P}_8(4,1,1,1,1)$. Из них в $5!$ случаях 4 буквы “е” будут идти подряд.

Следовательно, искомое число равно $\bar{P}_8(4,1,1,1,1) - 5! = 1560$.

Задача 3.2.4. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

Решение. Добавим к 20 книгам четыре одинаковых разделяющих предмета и рассмотрим все перестановки полученных объектов. Их число равно $\frac{24!}{4!}$. Каждой перестановке соответствует свой способ расстановки книг.

Задача 3.2.5. Сколькими способами можно разложить пять различных предметов по двум различным ящикам так, чтобы в первом ящике оказалось два предмета, а во втором – три предмета?

Решение первое. Нам достаточно посчитать число способов выбора двух предметов из пяти (этот выбор можно сделать $C_5^2 = 10$ способами). После выбора двух предметов остаются три, которые и попадут во второй ящик.

Решение второе. Перенумеруем все предметы и все ящики. Тогда каждой раскладке предметов по ящикам соответствует своя перестановка с повторениями из пяти предметов и наоборот. Например, если в первый ящик поместим предметы с номерами 2,4, а во второй – с номерами 1, 3, 5, то этой раскладке будет соответствовать перестановка (2,1,2,1,2). Всего число таких перестановок равно

$$P_5(2,3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

Задача 3.2.6. Сколькими способами можно положить 28 различных открыток в 4 одинаковых конверта так, чтобы в каждом конверте лежало по 7 открыток.

Решение. Перенумеруем все конверты и открытки. Число способов раскладки будет $\bar{P}_{28}(7, 7, 7, 7)$ (см. решение предыдущей задачи). Но конверты все одинаковые, поэтому их можно менять местами, не меняя результат раскладки. Так как число различных перестановок четырёх конвертов равно $P_4 = 4!$, то число различных раскладок уменьшится в $4!$ раз и станет равно

$$\frac{\bar{P}_{28}(7, 7, 7, 7)}{4!} = \frac{28!}{4! \cdot (7!)^4}.$$

3.3. Сочетания с повторениями

Определение. *Сочетанием с повторениями из n по k* называется неупорядоченная выборка из n по k , элементы в которой могут повторяться. Число всевозможных сочетаний с повторениями из n по k будем обозначать \bar{C}_n^k . Заметим, что и в данном случае не требуется выполнения неравенства $n \geq k$.

Теорема 3.3.1.

$$\bar{C}_n^k = \bar{P}_{n+k-1}(n-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

Доказательство. Надо зашифровать каждую комбинацию с помощью нулей и единиц: для каждого типа написать столько единиц, сколько предметов этого типа входит в комбинацию, а различные типы отделять друг от друга нулями (при этом если предметы какого-нибудь типа совсем не вошли в комбинацию, то надо писать подряд два или большее количество нулей). При этом мы получим столько единиц, сколько предметов входит в комбинацию, то есть k , а число нулей будет на 1 меньше, чем число типов предметов, то есть $n-1$ нулей. Различным комбинациям будут при этом соответствовать различные перестановки с повторениями, а каждой перестановке с повторениями соответствует своя комбинация. Итак, число \bar{C}_n^k сочетаний с повторениями из элементов n типов по k равно числу $\bar{P}(k, n-1)$ перестановок с повторениями из $n-1$ нулей и k единиц. А

$$\bar{P}_{n+k-1}(n-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Задача 3.3.1. В магазине продаются пирожные четырёх видов: заварное, картошка, трубочка и безе. Сколькими способами можно купить набор из 10 пирожных?

Решение. Каждому набору из 10 пирожных соответствует некоторое сочетание с повторениями из четырёх по десять и наоборот. Например, выбору пирожных: 2 заварных, 3 картошки, 1 трубочка и 4 безе сопоставим сочетание с повторениями (3, 3, к, к, к, т, б, б, б, б). Тогда получим $\bar{C}_4^{10} = 286$ наборов.

Задача 3.3.2. Сколькими способами 12 одинаковых пятаков можно разложить по пяти различным кошелькам так, чтобы ни один кошелёк не оказался пустым?

Решение. Пять пятаков раскладываем по кошелькам. Теперь кошельки уже не окажутся пустыми. Осталось посчитать количество способов разложить семь оставшихся пятаков по кошелькам. Это можно сделать $\bar{C}_5^7 = 330$ способами.

Задача 3.3.3. Сколькими способами три человека могут распределить между собой 6 одинаковых яблок, 4 одинаковых апельсина, 3 одинаковых сливы, 1 лимон, 1 грушу, 1 айву и 1 финик?

Решение. Шесть яблок трое могут разделить \bar{C}_3^6 способами (см. решение предыдущей задачи), 4 апельсина – \bar{C}_3^4 способами, 3 сливы – \bar{C}_3^3 способами, а каждый из остальных фруктов может достаться любому из трёх человек, и их можно разделить \bar{A}_3^4 способами. Всего получаем $\bar{C}_3^6 \cdot \bar{C}_3^4 \cdot \bar{C}_3^3 \cdot \bar{A}_3^4 = 204120$ способов.

Задача 3.3.4. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n?$$

Решение. Существует тесная связь между решениями указанного уравнения и сочетаниями с повторениями из m по n . Возьмём n единиц и $m-1$ перегородку. И рассмотрим всевозможные перестановки с повторениями указанных объектов (таких перестановок $\bar{P}_{n+m-1}(m-1, n)$). Каждой такой перестановке соответствует некоторое решение уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ и наоборот. По теореме 3.3.1. $\bar{P}_{n+m-1}(m-1, n) = \bar{C}_m^n$, т.е. равняется числу сочетаний с повторениями из m по n .

3.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.4.1. Сколько существует семизначных чисел, у каждого из которых цифра 6 встречается три раза, а цифра 5 – четыре раза?

Задача 3.4.2. В языке одного древнего племени было 6 гласных и 8 согласных букв, причем при составлении слов гласные и согласные буквы непременно чередовались. Сколько слов из девяти букв могло быть в этом языке?

Задача 3.4.3. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. а) Сколькими способами можно купить 12 открыток? б) Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

Задача 3.4.4. Сколькими способами можно разложить семь монет различного достоинства по трем различным карманам?

Задача 3.4.5. Обезьяну посадили за пишущую машинку с 45 клавишами. Определить число попыток, необходимых для того, чтобы она наверняка напечатала первую строку романа Л.Н. Толстого «Анна Каренина», если строка содержит 52 знака, включая пробелы?

Задача 3.4.6. Имеется пять различных стульев и семь рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев?

Задача 3.4.7. Сколько разных браслетов можно сделать из пяти изумрудов, шести рубинов и семи сапфиров (все камни одного вида одинаковы), если в браслет входят все 18 камней?

Задача 3.4.8. Сколькими способами можно разделить $t + n + s$ предметов на три группы так, чтобы в одной группе было t предметов, в другой – n , в третьей – s предметов?

Задача 3.4.9. У мамы два яблока, три груши и четыре апельсина. Каждый день в течение девяти дней подряд она даёт сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано, если фрукты одного сорта не различаются?

Задача 3.4.10. Сколько слов можно составить, используя ровно пять букв А и не более чем три буквы В?

Задача 3.4.11. Сколько различных слов можно образовать, переставляя буквы слова «переулок», при условии, что слова должны начинаться с буквы «п» и заканчиваться буквой «к»?

Задача 3.4.12. Сколько существует девятизначных чисел, сумма цифр которых чётна?

Задача 3.4.13. Сколькими способами 4 одинаковых чёрных шара, 4 одинаковых белых шара и 4 одинаковых синих шара можно разложить в 6 различных ящиков?

Задача 3.4.14. В классе 30 человек. Сколько существует способов разбить класс на две группы и в каждой выбрать старосту (группа может состоять и из одного человека)?

Задача 3.4.15. Сколькими способами можно прочитать слово “ТРЕУГОЛЬНИК”, двигаясь вправо и вниз?

```
Т Р Е У Г О Л Ь Н И К
Р Е У Г О Л Ь Н И К
Е У Г О Л Ь Н И К
У Г О Л Ь Н И К
Г О Л Ь Н И К
О Л Ь Н И К
Л Ь Н И К
Ь Н И К
Н И К
И К
К
```

Задача 3.4.16. Сколькими способами можно распределить 8 различных билетов в театр по трём группам первокурсников (какой-то группе могут достаться и все билеты)?

Задача 3.4.17. 12 человек прибыли в гостиницу, в которой есть один четырёхместный, два трёхместных и один двухместный номера. Сколько существует способов их размещения?

Глава 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ЗАДАЧИ

4.1. Число подмножеств конечного множества

Теорема 4.1.1. 2^n – число всех подмножеств n -элементного множества.

Доказательство. Пусть $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Сопоставим каждому подмножеству множества A размещение с повторением их двух по n , в котором на k -м месте стоит 1, если элемент k принадлежит данному подмножеству, и 0 в противном случае. Например, пустому множеству соответствует размещение, состоящее из одних нулей. Тогда число всех возможных подмножеств множества A равно $\overline{A}_2^n = 2^n$.

Задача 4.1.1. В конференц-зале 25 ламп. Сколько всего существует различных способов освещения зала?

Решение. Каждое подмножество 25-ти элементного множества ламп соответствует способу освещения зала. По теореме 4.1.1. имеем 2^{25} способов.

Задача 4.1.2. Известно, что в государстве нет двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть максимальная численность населения этой страны, если всего у человека может быть 32 зуба?

Решение. Так как число всех подмножеств 32-х элементного множества равно 2^{32} , то 2^{32} – максимальная численность населения этого государства.

Задача 4.1.3. Сколькими способами можно раздать 27 книг лицам A , B и C так, чтобы A и B вместе получили вдвое больше книг, чем C ?

Решение. Легко понять, что C получил 9 книг. Число способов дать C 9 книг из 27 равно C_{27}^9 . Остальные 18 книг нужно разделить между A и B . Рассмотрим множество, составленное из этих 18 книг. Любое его подмножество соотнесем с множеством книг, полученных A , а элементы не вошедшие в эти подмножества получает B . Число всевозможных подмножеств 18-ти элементного множества равно 2^{18} .

4.2. Бином Ньютона

Бином Ньютона – название формулы, выражающей степень двучлена в виде суммы одночленов. Из школьного курса математики всем учащимся хорошо известны формулы:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Перепишем эти формулы в другом виде:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2,$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3.$$

Как раскрыть скобки при вычислении выражения $(a+b)^n$ для любого натурального n ? Ответ на данный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4.2.1. (Бином Ньютона)

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n. \quad (1)$$

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} (1+t_1)(1+t_2) \cdot \dots \cdot (1+t_n) &= \underbrace{1}_{C_n^0 \text{ слагаемых}} + \underbrace{(t_1+t_2+\dots+t_n)}_{C_n^1 \text{ слагаемых}} + \\ &+ \underbrace{(t_1 t_2 + t_1 t_3 + \dots + t_{n-1} t_n)}_{C_n^2 \text{ слагаемых}} + \underbrace{(t_1 t_2 t_3 + \dots + t_{n-2} t_{n-1} t_n)}_{C_n^3 \text{ слагаемых}} + \dots + \underbrace{t_1 t_2 \cdot \dots \cdot t_n}_{C_n^n \text{ слагаемых}}. \end{aligned} \quad (2)$$

В равенстве (2) положим $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$. Получим

$$(1+t)^n = C_n^0 + C_n^1 t + C_n^2 t^2 + \dots + C_n^n t^n. \quad (3)$$

Если взять $t = \frac{b}{a}$, то

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = C_n^0 + C_n^1 \frac{b}{a} + C_n^2 \frac{b^2}{a^2} + \dots + C_n^n \frac{b^n}{a^n}. \quad (4)$$

Домножив обе части равенства (4) на a^n , получим

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n. \quad (5)$$

Равенство (5) искомое.

Бином Ньютона часто записывают в более компактном виде

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k. \quad (6)$$

Коэффициенты C_n^k равенства (6) называются *биномиальными коэффициентами*.

Свойства биномиальных коэффициентов

• Биномиальные коэффициенты симметричны относительно середины суммы, т.е. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

• $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ (равенство Паскаля).

• $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Доказательство. Равенство легко получить, если в формуле (1) положить $a = b = 1$.

• $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Доказательство. Равенство легко получить, если в формуле (1) положить $a = 1$ и $b = -1$.

Доказательство свойств 1 и 2 предлагается читателю в качестве легкого упражнения.

Заметим, что другое доказательство теоремы 4.2.1. можно получить, пользуясь методом математической индукции и равенством Паскаля:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

С помощью биннома Ньютона, легко получить иное доказательство теоремы 4.1.1.:

Доказательство. Число 0-элементных подмножеств n -элементного множества – C_n^0 ; число 1-элементных подмножеств n -элементного множества – C_n^1 ; ...; k -элементных подмножеств n -элементного множества – C_n^k и т.д. В силу свойства 3 число всех подмножеств равно 2^n .

4.3. Треугольник Паскаля

“Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В тоже время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике” [3]

Мартин Гарднер

Треугольником Паскаля называется треугольник,

$$\begin{array}{cccc}
 n = 0 & & & 1 \\
 n = 1 & & 1 & 1 \\
 n = 2 & & 1 & 2 & 1 \\
 n = 3 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 n = 4 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 n = 5 & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

который образован по следующему правилу: по краям каждой строки стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух стоящих над ним чисел предыдущей строки. По этому правилу легко выписывать одну за другой новые строки этого треугольника. Верхняя (нулевая) строка треугольника Паскаля состоит из одного числа $C_0^0 = 1$, следующая (первая) – из двух чисел $C_1^0 = C_1^1 = 1$, и вообще n -я строка состоит из $n + 1$ числа:

$$C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n.$$

Далее мы приводим лишь некоторые свойства треугольника Паскаля.

Свойства треугольника Паскаля

- Число второго столбца соответствует номеру строки, на которой расположено число.
- Числа третьего столбца являются треугольными числами.
- Числа четвертого столбца являются тетраэдрическими числами.
- Сумма чисел n -й восходящей диагонали, проведенной через строку треугольника с номером $n - 1$, есть n -е число Фибоначчи.
- Сумма всех чисел, стоящих на n -ой строке треугольника равна 2^n .

4.4. Формула включений и исключений

Пусть имеется N предметов, некоторые из которых обладают свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. При этом каждый предмет может либо не обладать ни одним из этих свойств, либо обладать одним или несколькими свойствами. Обозначим через $N(\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_k)$ количество предметов, обладающих свойствами $\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_k$ (быть может, ещё некоторыми из других свойств). Если нам потребуется подчеркнуть, что берутся лишь предметы, не обладающие некоторым свойством, то это

свойство пишем с чертой. Например, через $N(\alpha_1\alpha_2\bar{\alpha}_5)$ обозначено количество предметов, обладающих свойствами α_1 и α_2 , но не обладающих свойством α_5 .

Число предметов, не обладающих ни одним из указанных свойств, обозначается по этой договоренности через $N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$.

Теорема 4.4.1. *Число предметов, не обладающих ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, равно*

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) = & N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + \\ & + \dots + N(\alpha_1\alpha_n) + \dots + N(\alpha_{n-1}\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \dots - N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) + \dots + \\ & + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по числу свойств.

Пусть $n = 1$. При одном свойстве формула (1) очевидна. Каждый предмет либо обладает этим свойством, либо не обладает им. Поэтому

$$N(\bar{\alpha}_1) = N - N(\alpha_1).$$

Предположим теперь, что формула (1) доказана для случая, когда число свойств равно $n = 1$:

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}) = & N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \dots - N(\alpha_{n-1}) + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + \\ & + \dots + N(\alpha_1\alpha_{n-1}) + \dots + N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \dots - N(\alpha_{n-3}\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}) + \\ & + \dots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Эта формула, по предположению, справедлива для любой совокупности M . В частности, она верна для $N = N(\alpha_n)$, т.е. для совокупности элементов, обладающих свойством α_n . Тогда формула (2) примет вид:

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n) = & N(\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_n) - \dots - N(\alpha_{n-1}\alpha_n) + N(\alpha_1\alpha_2\alpha_n) + \\ & + \dots + N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_n) - \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\alpha_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Вычтем равенство (3) из равенства (2). В правой части получим правую часть формулы (1). А в левой части получим разность

$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}) - N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}\alpha_n). \quad (4)$$

Но $N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{n-1})$ — число предметов, не обладающих свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ и, быть может, обладающих свойством α_n . А

$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n)$ – число предметов, которые не обладают свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, но обладают свойством α_n . Значит, разность (4) как раз равна числу предметов, не обладающих ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Таким образом,

$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}) - N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n) = N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}, \bar{\alpha}_n).$$

Итак, мы доказали, что формула (1) верна и в случае, когда число свойств равно n .

Задача 4.4.1. В классе 35 учеников. 20 из них занимаются в математическом кружке, 11 – в биологическом, а 10 ничем не занимаются. Сколько ребят занимаются и математикой, и биологией?

Решение. Пусть N – число учеников в классе; $N(M)$ – количество учеников, интересующихся математикой; $N(B)$ – число учеников, увлекающихся биологией; $N(M, B)$ – количество учеников, посещающих оба кружка; $N(\bar{M}, \bar{B})$ – число учеников, не посещающих кружки. По условию, $N = 35$, $N(M) = 20$, $N(B) = 11$, $N(\bar{M}, \bar{B}) = 10$. Применим формулу включений и исключений:

$$N(\bar{M}, \bar{B}) = N - N(M) - N(B) + N(M, B).$$

Подставив значения, получим

$$10 = 35 - 20 - 11 + N(M, B).$$

Откуда, $N(M, B) = 6$ учеников.

Задача 4.4.2. Пусть a_1, \dots, a_n – взаимно простые натуральные числа, N – некоторое натуральное число. Найдите число натуральных чисел, не превышающих N и не делящихся ни на одно из чисел a_1, \dots, a_n .

Решение. Пусть A_i – множество натуральных чисел, не превосходящих N и делящихся на a_i . Тогда количество чисел, делящихся по крайней мере на одно из чисел a_1, \dots, a_n , равно

$$N(A_1 \cup \dots \cup A_n).$$

Очевидно,

$$N(A_i) = \left[\frac{N}{a_i} \right],$$

где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x .

Множество $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ – это множество тех чисел, которые делятся на a_{i_1}, \dots, a_{i_k} .

Поскольку числа a_{i_1}, \dots, a_{i_k} взаимно простые, то

$$N(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \left[\frac{N}{a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_k}} \right].$$

Согласно формуле включений и исключений получаем, что количество чисел не превышающих N и делящихся по крайней мере на одно из чисел a_1, \dots, a_n , равно

$$N(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{N}{a_i} \right] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \left[\frac{N}{a_{i_1} a_{i_2}} \right] + \dots + (-1)^{n-1} \left[\frac{N}{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \right].$$

Количество чисел, не превосходящих N и которые не делятся ни на одно из чисел a_1, \dots, a_n , равно

$$N - N(A_1 \cup \dots \cup A_n) = N - \sum_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{N}{a_i} \right] + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \left[\frac{N}{a_{i_1} a_{i_2}} \right] - \dots + (-1)^n \left[\frac{N}{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \right].$$

4.5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.5.1. Известно, что крокодил имеет не более 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух крокодилов с одним и тем же набором зубов.

Задача 4.5.2. Человек имеет 10 друзей и в течение нескольких дней приглашает некоторых из них в гости так, что компания ни разу не повторяется (в какой-то из дней он может не приглашать никого). Сколько дней он может так делать?

Задача 4.5.3. Есть 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько существует комбинаций для выбора нескольких птиц таких, что среди выбранных были и куры, и утки, и гуси?

Задача 4.5.4. Лестница состоит из 7 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некото-

рые ступеньки (можно даже через все 7). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

Задача 4.5.5. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, пользуясь тремя цифрами 1, 2, 3 при дополнительном условии, что цифра 3 применяется в каждом числе ровно два раза?

Задача 4.5.6. Найдите n , если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при x^5 и x^{12} равны.

Задача 4.5.7. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

Задача 4.5.8. Чему равен коэффициент при $x^2 y^3 z^2$ в выражении $(x+y+z)^7$?

Задача 4.5.9. Докажите следующие тождества

- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;
- $C_n^n + \dots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}$;
- $\binom{0}{n} + \binom{1}{n} + \dots + \binom{n}{n} = C_{2n}^n$.

Задача 4.5.10. Докажите, что

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Задача 4.5.11. Докажите, что

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}.$$

Задача 4.5.12. Показать, что при любом k сумма $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$ есть точный квадрат.

Задача 4.5.13. Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ равна 64. Определить слагаемое, не содержащее x .

Задача 4.5.14. При каких значениях x четвёртое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

Задача 4.5.15. Докажите, что числа $C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^{p-1}$ делятся на p если p – простое число.

Задача 4.5.16. 35% учащихся одного класса ходили в поход, а 75% этого класса были на экскурсии, причём все были в походе или на экскурсии. Сколько процентов учащихся класса были и в походе и на экскурсии?

Задача 4.5.17. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трёх языков?

Задача 4.5.18. В течении 30 дней сентября было 12 дождливых дней, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, а один день был и дождливым, и ветреным, и холодным. В течение скольких дней в сентябре стояла хорошая погода?

Задача 4.5.19. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, взаимно простых с 3, 5 и 7?

Задача 4.5.20. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

Задача 4.5.21. Сколько существует целых чисел от 1 до 1 000 000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

Задача 4.5.22. Пусть n – натуральное число, разложение которого на простые множители имеет вид

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

(p_1, \dots, p_k – простые числа), а $\varphi(n)$ – число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n . Доказать, что

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

(Функция $\varphi(n)$ называется функцией Эйлера.)

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ

ГЛАВА 1.

1.4.1. а) да, б) нет;

1.4.5. а) 8, б) 5;

1.4.6. *Указание:* Воспользуйтесь методом математической индукции;

1.4.7. *Указание:* Воспользуйтесь методом математической индукции;

1.4.8. 25, 20;

1.4.9. 80;

1.4.10. а) 676; б) 13 800;

1.4.11. 2160;

1.4.12. 768;

1.4.13. $30^3 \cdot 10^3$;

1.4.14. 48;

1.4.15. 1024, 4023;

1.4.16. 105;

1.4.17. 134;

1.4.18. 22 (исключаем случай 111, который учтён трижды);

1.4.19. 625;

1.4.20. 8;

1.4.21. 294.

ГЛАВА 2.

2.4.1. $A_{25}^4 = 303\,600$;

2.4.2. $A_8^4 = 1680$;

2.4.3. $C_5^3 = 10$;

2.4.4. $A_{15}^4 = 32\,760$;

2.4.5. $C_7^4 = 35$;

2.4.6. а) $A_6^4 = 360$, б) $A_6^4 - A_5^4 = 240$, в) $A_4^2 = 12$;

2.4.7. а) $C_{16}^3 = 560$, б) $C_9^6 + C_7^6 = 91$, в) $C_9^4 \cdot C_7^3 = 4410$;

2.4.8. $\frac{C_{20}^3 \cdot C_{17}^5 \cdot C_{12}^{12}}{3!}$;

2.4.9. $C_5^3 \cdot C_4^2 \cdot P_5 = 720$;

$$2.4.10. C_n^2;$$

$$2.4.11. 2 \cdot C_{18}^2 = 306;$$

$$2.4.12. 13^4 = 28\,561, \quad 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17\,160;$$

$$2.4.13. C_3^1 \cdot C_5^3;$$

$$2.4.14. C_6^3 \cdot C_8^3;$$

$$2.4.15. C_{10}^3;$$

$$2.4.16. C_{15}^1 + C_{15}^2 + C_{15}^3 + C_{15}^4;$$

$$2.4.17. \frac{6!}{3!};$$

$$2.4.18. 2 \cdot (5!)^2;$$

$$2.4.19. \frac{2 \cdot (5!)^2}{10};$$

$$2.4.20. A_8^5;$$

$$2.4.21. \frac{C_n^2 \cdot C_{n-2}^2 \cdot C_{n-4}^2}{3!};$$

$$2.4.22. C_4^2 \cdot C_7^4 + C_4^3 \cdot C_7^3 + C_4^4 \cdot C_7^2 = 371;$$

$$2.4.23. C_{15}^2 \cdot C_{10}^3 \cdot C_5^1;$$

$$2.4.24. \text{a) } 10 \cdot C_{11}^2 + 11 \cdot C_{10}^2 = 1045, \quad \text{б) } C_{11}^2 \cdot C_{10}^2 = 2475;$$

$$2.4.25. C_4^3 \cdot 2^3 = 32;$$

$$2.4.26. 2 \cdot C_{30}^{10} + C_{29}^{11};$$

$$2.4.27. \frac{C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5}{3!};$$

$$2.4.28. C_5^2 \cdot 5^6 + C_5^3 \cdot 4 \cdot 5^5;$$

$$2.4.29. C_6^3(C_6^3 - 1)(C_6^3 - 2)(C_6^3 - 3)(C_6^3 - 4);$$

$$2.4.30. 2(6!)^2, \quad \frac{(6!)^2}{6};$$

$$2.4.31. C_7^1 \cdot 7!2!;$$

$$2.4.32. 1080, \quad A_5^4 \cdot 15 \cdot 1000 + A_6^4 \cdot 15 \cdot 100 + A_6^4 \cdot 15 \cdot 10 + A_6^4 \cdot 15;$$

$$2.4.33. C_9^4 = 126;$$

2.4.34. Какие бы $m - 1$ членов комиссии ни собрались, должен найтись замок, который они не могут открыть, но ключ от этого замка имеется у каждого из остальных $n - m + 1$ членов комиссии (появление

кого-нибудь из которых дает возможность открыть сейф). Поэтому число замков равно C_n^{m-1} , а число ключей равно $(n-m+1)C_n^{m-1}$.

ГЛАВА 3.

3.4.1. $\bar{P}_7(3,4) = 35$;

3.4.2. $6^5 \cdot 8^4 + 6^4 \cdot 8^5$;

3.4.3. а) \bar{C}_{10}^{12} , б) $C_{10}^8 = 45$;

3.4.4. $3^7 = 2187$;

3.4.5. 45^{5^2} ;

3.4.6. $7^5 = 16\ 807$;

3.4.7. $\frac{\bar{P}_{18}(5,6,7)}{2 \cdot 18} = \frac{18!}{36 \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7!}$;

3.4.8. $\bar{P}_{m+n+p}(m, n, p)$;

3.4.9. $\bar{P}_9(2,3,4) = 1260$;

3.4.10. $\bar{P}_5(5) + \bar{P}_6(5,1) + \bar{P}_7(5,2) + \bar{P}_8(5,3) = 84$;

3.4.11. $\bar{P}_6(2,1,1,1,1) = \frac{6!}{2!} = 360$;

3.4.12. $45 \cdot 10^7$;

3.4.13. 4 черных шара можно разложить в 6 пакетов C_9^5 способами.

Для белых и синих шаров имеем столько же способов. По правилу произведения получаем $\binom{5}{9}$ способов;

3.4.14. $C_{30}^2 \cdot 2^{28}$;

3.4.15. $2^{11} = 2048$;

3.4.16. $3^8 = 65\ 61$;

3.4.17. $\bar{P}_{12}(4,3,3,2) = 277\ 200$.

ГЛАВА 4.

4.5.1. $2^{68} = 16^{17}$;

4.5.2. $2^{10} = 1024$;

4.5.3. $(2^3 - 1)(2^4 - 1)(2^2 - 1) = 315$;

4.5.4. $2^7 = 128$;

4.5.5. $2^8 \cdot C_{10}^2 = 11\ 520$;

4.5.6. $n = 17$;

4.5.7. 26;

4.5.8. 210;

4.5.10. *Указание:* Воспользуйтесь формулами

$$\frac{n+1}{k+1} C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$$

и

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n;$$

4.5.11. *Указание:* Воспользуйтесь формулой $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;

4.5.12. Сумма равна $(n+k)^2$;

4.5.13. Третье слагаемое;

4.5.16. 10 %;

4.5.17. 20;

4.5.18. 15;

4.5.19. 457;

4.5.20. 5^3 ;

4.5.21. 998 910.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.
2. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975. – 208 с.
3. Гарднер М. Математические новеллы. – М.: Мир, 1974. – 456 с.
4. Ежов И.И., Скороход А.В., Яренко М.И. Элементы комбинаторики. – М.: Наука, 1977. – 80 с.
5. Пак Г.К. Дискретная математика: учебное пособие. – Находка: Институт технологии и бизнеса, 2001. – 109 с.
6. Стратилатов П.В. Дополнительные главы по курсу математики: учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 9 классов. – М.: Просвещение, 1974. – 144 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ	5
1.1. Факториал.....	5
1.2. Элементы теории множеств.....	7
1.3. Основные правила комбинаторики	10
1.4. Задачи для самостоятельного решения.....	12
Глава 2. РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ	15
2.1. Размещения	15
2.2. Перестановки	17
2.3. Сочетания	20
2.4. Задачи для самостоятельного решения.....	22
Глава 3. РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ	25
3.1. Размещения с повторениями.....	25
3.2. Перестановки с повторениями.....	26
3.3. Сочетания с повторениями	29
3.4. Задачи для самостоятельного решения.....	31
Глава 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ЗАДАЧИ	33
4.1. Число подмножеств конечного множества	33
4.2. Бином Ньютона	33
4.3. Треугольник Паскаля.....	35
4.4. Формула включений и исключений	36
4.5. Задачи для самостоятельного решения.....	39
ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ	42
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРА	46

Учебное издание

Первухин Михаил Александрович
Степанова Алёна Андреевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ (Комбинаторика)

Практикум

В авторской редакции
Компьютерная верстка Н.А. Тятовой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 13.12.2010. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. ____.
Уч.-изд. л. ____ . Тираж 250 экз. Заказ

Издательство Владивостокский государственный университет
экономики и сервиса

690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41
Отпечатано во множительном участке ВГУЭС
690600, Владивосток, ул. Державина, 57