Лабораторная работа 3[1]

Цель работы. Закрепить алгоритмы обработки нормальных форм алгебры логики, реализовать метод резолюций на компьютере.

Основные понятия

Литералом называется формула, которая является либо переменной, либо отрицанием переменной. Например, A, $\overline{B}$ — это литералы, а $A \mathbin{\&} \overline{B}$ — это не литерал.

Элементарной конъюнкцией, или *конъюнктом*, называется конъюнкция литералов. Например, $A \mathbin{\&} \overline{B}$ — это конъюнкт, а $\overline{B} \vee C$ и $A \mathbin{\&} (\overline{B} \vee C)$ — это не конъюнкты.

Элементарной дизъюнкцией, или *дизъюнктом*, называется дизъюнкция литералов. Например, $\overline{B} \vee C$ — это дизъюнкт, а $A \mathbin{\&} \overline{B}$ и $A \mathbin{\&} (\overline{B} \vee C)$ — это не дизъюнкты.

Элементарная конъюнкция называется *полной*, если она содержит все переменные ровно по одному разу.

Элементарная дизъюнкция называется *полной*, если она содержит все переменные ровно по одному разу.

ДНФ — это дизъюнкция элементарных конъюнкций.

КНФ — это конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Совершенная ДНФ — это дизъюнкция полных элементарных конъюнкций.

Совершенная КНФ — это конъюнкция полных элементарных дизъюнкций.

Чтобы привести формулу, записанную в дизъюнктивной нормальной форме, к виду СДНФ, нужно, чтобы каждое слагаемое было полной элементарной конъюнкцией. Если в элементарной конъюнкции присутствуют не все переменные, то следует домножить эту элементарную конъюнкцию на константу 1 столько раз, сколько переменных в ней недостает. И затем заменить 1 на дизъюнкцию недостающей переменной и её отрицания, применяя закон исключенного третьего.

Предположим, что задана формула в конъюнктивной нормальной форме, и нам нужно проверить ее выполнимость. Формула представляет собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций. Метод резолюций заключается в добавлении к множителям КНФ новых элементарных дизъюнкций, каждая из которых является логическим следствием формулы. Во-первых, приписывая к КНФ её логическое следствие, получаем равносильную формулу. Во-вторых, если окажется, что из формулы следует константа 0, то эта формула тождественно ложна. В-

[1] Математическая логика и теория алгоритмов (Гренкин Г.В., ВВГУ, 2023)

третьих, если на каком-то шаге добавление нового множителя невозможно, то это означает, что формула выполнима.

Чтобы вывести новую элементарную дизъюнкцию из двух имеющихся, применяют правило резолюции. Для этого две элементарные дизъюнкции должны содержать ровно одну переменную, которая входит в одну из этих элементарных дизъюнкций без отрицания, а в другую с отрицанием — в этом случае говорят, что эти две элементарных дизъюнкции *резольвируют*, а их логическое следствие, полученное по правилу резолюции, называют их *резольвентой*. Итак, допустим, у нас есть две элементарные дизъюнкции: $\varphi \vee x_i$ и $\psi \vee \neg x_i$, тогда что будет их логическим следствием?

Правило резолюции. Пусть φ и ψ — формулы алгебры логики, x_i — пропозициональная переменная. Тогда логическим следствием формул $\varphi \vee x_i$ и $\psi \vee \neg x_i$ является формула $\varphi \vee \psi$:

$$\varphi \vee x_i,\ \psi \vee \neg x_i \ \models\ \varphi \vee \psi.$$

Задания на лабораторную работу

1. Ознакомьтесь с заготовкой, в которой введена структура данных «ДНФ», основанная на представлении каждого слагаемого ДНФ в виде списка из n значений $-1, 0, 1$, где 1 на i-м месте означает наличие в конъюнкте литерала x_i, -1 на i-м месте означает наличие в конъюнкте литерала $\neg x_i$, и 0 на i-м месте означает отсутствие в конъюнкте переменной x_i.

2. Реализуйте функцию, принимающую на вход ДНФ и возвращающую СДНФ в том же формате. Слагаемые СДНФ не должны повторяться.

3. Ознакомьтесь с заготовкой, в которой введена структура данных «КНФ», основанная на представлении каждого множителя КНФ в виде списка из n значений $-1, 0, 1$, где 1 на i-м месте означает наличие в дизъюнкте литерала x_i, -1 на i-м месте означает наличие в дизъюнкте литерала $\neg x_i$, и 0 на i-м месте означает отсутствие в дизъюнкте переменной x_i.

4. Реализуйте метод резолюций. На вход вашему алгоритму подается КНФ, на выходе получается ответ «выполнима» или «невыполнима». При этом в консоль выводится лог работы алгоритма.

5. Составьте набор тестов, проверьте правильность своей реализации.

Рекомендации по выполнению лабораторной работы

Например, входные данные могут быть заданы таким образом: `cnf = [[1, 0, -1], [0, 1, 1], [0, -1, 0], [-1, 0, 0]]`, что означает формулу $(x \vee \overline{z})\ \&\ (y \vee z)\ \&\ \overline{y}\ \&\ \overline{x}$.

Пример вывода программы:

```
Вход: (A + B + ~C)(B + C)(~B)(~A)

Логические следствия:

A + B

A

0

Результат: невыполнима
```

Алгоритм выглядит так: на каждом шаге алгоритма перебираем все пары элементарных дизъюнкций (множителей), и если эта пара содержит ровно один противоположный литерал, то находим резольвенту этой пары множителей и, если резольвента не присутствует в нашем списке множителей, то добавляем её к списку. В конце шага алгоритма проверяем следующее логическое условие: если число множителей увеличилось, то продолжаем алгоритм, если найдена пустая резольвента, то завершаем алгоритм с результатом «невыполнима», а если число множителей осталось прежним, то завершаем алгоритм с результатом «выполнима».

Таким образом, мы можем определить функцию `apply_resolution_method(cnf)`, которая будет выводить на экран все полученные логические следствия из набора множителей КНФ, а также конечный результат. Эта функция будет вызывать функцию `add_resolvent(cnf)`, которая будет перебирать все пары множителей КНФ и при нахождении резольвирующих множителей, во-первых, найдет их резольвенту, во-вторых, проверит, есть ли найденная резольвента среди имеющихся множителей, и, в-третьих, если резольвенты среди них нет, добавит резольвенту к КНФ и завершит работу. Таким образом, если в функции `apply_resolution_method` до вызова функции `add_resolvent` запомнить количество множителей КНФ, то после вызова этой функции нужно проверить условие, что это количество увеличилось, и следовать описанному выше алгоритму.