

# Глава 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## §1.1. Определители

Вычислите определители:

1.  $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ .

2.  $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ .

3.  $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ .

4.  $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ .

5.  $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & a \\ -1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$ .

6.  $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$ .

7.  $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix}$ .

8.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ .

9.  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ .

10.  $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ .

11.  $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ .

12.  $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -8 & 1 \\ 3 & 15 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 13 & 39 & 1 \end{vmatrix}$ .

13.  $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ .

14.  $\begin{vmatrix} 378 & 253 & 127 \\ 377 & 252 & 126 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$ .

15.  $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$ .

16.  $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$ .

17.  $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 9 \\ 13 & -1 & 17 & 4 \end{vmatrix}$ .

18.  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ .

$$19. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$20. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Ответы.** 1. 17. 2.  $-2$ . 3.  $-7$ . 4.  $-11$ . 5. 2а. 6. 1. 7.  $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$ . 8. 21. 9. 10. 10. 0. 11. 33. 12. 0. 13. 0. 14. 0. 15.  $-4a^3$ . 16.  $-2x$ . 17. 0. 18. 75. 19. 102. 20.- 187.

## §1.2. Матрицы

1. Даны матрицы  $A_{2\times 3}$ ,  $B_{3\times 1}$ ,  $C_{3\times 3}$ . Существуют ли а)  $AB$ , б)  $BA$ , в)  $AC$ , г)  $CA$ , д)  $ABC$ , е)  $ACB$ , ж)  $CB$ , з)  $CBA$ ?

2. Найдите  $m$  и  $n$ , если известно, что а)  $A_{3\times 4}\cdot B_{4\times 5} = C_{m\times n}$ ; б)  $A_{2\times 3}\cdot B_{m\times n} = C_{2\times 6}$ ; в)  $A_{2\times m}\cdot B_{n\times 3} = C_{2\times 3}$ .

3. Даны матрицы:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ .

Найдите а)  $A+B$ ; б)  $B-A$ ; в)  $2A-3B$ ; г)  $A+B+A^T+B^T$ ; д)  $A\cdot B$ ; е)  $B\cdot A$ ; ж)  $A^{-1}$ ; з)  $B^{-1}$ .

4. Даны матрицы:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Найдите а)  $AB$ ; б)  $BA$ ; в)  $AC$ ; г)  $CB$ ; д)  $2C-BA$ ; е)  $C^{-1}$ ; ж)  $CC^{-1}$ ; з)  $3C-2E$ ; и)  $CE$ ; к)  $AE$ .

5. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 1 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Найдите  $4A-B$ ;  $AC$ ;  $B^{-1}$ .

6. Покажите, что  $A+D-D^T = 0$ ,

если  $A = \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 \\ 1-a & 0 & b^2-c \\ 1-a^2 & c-b^2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ .

7. Найдите  $A^n$  для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

8. Найдите  $P(A)$ , если

$$\text{а) } P(x)=x^2-x-3, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } P(x)=x^2-2x+1, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } P(x)=x^3-7x^2+13x-5, A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Решите матричные уравнения:

$$\text{а) } XA = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } AX = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } AXB = C, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{г) } AX = B \text{ и } YA = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{д) } 2A-3X = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{е) } 3A+2X = E, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{ж) } AX+B = C, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

з)  $XA-2B = C$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найдите ранги следующих матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{е) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{ж) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}, \quad \text{з) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{и) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & \alpha & 6 \end{pmatrix}$ . При каких  $\alpha$   $r_A = 2$ ?

12.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ . При каких  $\alpha$  а)  $r_A = 1$ , б)  $r_A = 2$ , в)  $r_A = 3$ ?

13. Найдите собственные значения и собственные векторы квадратных матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж) } \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

и покажите, что собственные векторы матрицы (ж) ортогональны.

**Ответы.** 1. а), в), е), ж) – да; б), г), д), з) – нет. 2. а) 3;5, б) 3;6, в)  $m=n$  — любые натуральные числа. 3. а)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$ , б)  $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ , в)

$$\begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -21 & 10 \end{pmatrix}, \text{ г) } \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}, \text{ д) } \begin{pmatrix} 12 & -16 \\ -26 & 36 \end{pmatrix}, \text{ е) } \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}, \text{ ж) } \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{з) } \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}. \text{ 4. а) } \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 11 & 1 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ в) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ г) } \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 11 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \text{ д) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \text{ е) } -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ж) } E, \text{ з) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 9 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\text{и) } C, \text{ к) } A. \text{ 5. } \begin{pmatrix} -3 & 13 & 12 \\ 4 & -24 & -11 \\ 10 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ -46 & -8 \\ 13 & 5 \end{pmatrix}, -\frac{1}{261} \begin{pmatrix} -33 & 20 & -55 \\ 6 & 28 & -77 \\ 12 & -31 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 8. а) } \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ в) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ 9. а) } \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 32 & -18 \end{pmatrix}, \text{ б) } \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ в) } \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 25 & -25 \\ -26 & -2 \end{pmatrix}, \text{ г) } X = A^{-1}B, Y = BA^{-1},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \text{ д) } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ е) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ -6 & -4 & 12 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \text{ ж) } \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 10 & 57 \\ 12 & -14 \\ -8 & -40 \end{pmatrix}, \text{ з) } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 12 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ 10. а) } 0, \text{ б) } 1, \text{ в) } 2, \text{ г) } 1, \text{ д) } 2, \text{ е) } 1, \text{ ж) } 3, \text{ з) } 2, \text{ и) } 4. \text{ 11. 2. 12.}$$

а)  $-4$ , б)  $\neq -4$ , в) ни при каких. 13. а)  $-2; 7; (-4;5), (1;1)$ , б)  $-2; 8; (-3;1), (7;1)$ , в)  $-1; 3; 4; (1;1;0), (-9;7;4), (-3;2;0)$ , г)  $-1;2;5; (3;3;-2), (0;0;1), (6;-3;4)$ , д)  $-2;1;4 (0;-1;1), (1;0;-2), (0;1;5)$ , е)  $1;2;3; (1;1;2), (1;0;1), (1;2;2), ж) 3;6;9$ .

### §1.3. Системы линейных уравнений

1. Решите системы по формулам Крамера, матричным способом, методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 7x - 2y = 8, \\ 5x + 3y = 19; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 4y = -11, \\ 2x + 5y = 8; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 1 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{г)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13; \end{cases} \\
 \text{ж)} \begin{cases} 4x - 2y + z = 6, \\ x + 3y - 2z = 5, \\ 3x - y + 4z = 5; \end{cases} \\
 \text{д)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases} \\
 \text{з)} \begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 3x + y - 2z = 5, \\ x - y + 3z = -2; \end{cases} \\
 \text{е)} \begin{cases} x + y - z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 21, \\ 7x - y - 3z = 6; \end{cases} \\
 \text{и)} \begin{cases} 3x - y + 2z = 1, \\ x + 3y = -1, \\ -x + 2y + 3z = 7. \end{cases}
 \end{array}$$

2. Исследуйте системы и в случае совместности решите их методом Гаусса или Жордана-Гаусса:

$$\begin{array}{l}
 \text{а)} \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases} \\
 \text{в)} \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 3x + 4y = -1, \\ 7x + y = 6, \\ 5x + 3y = 2; \end{cases} \\
 \text{д)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1; \end{cases} \\
 \text{ж)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 5; \end{cases} \\
 \text{и)} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ 8x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 17, \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases} \\
 \text{б)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 + 6 = 0; \end{cases} \\
 \text{г)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases} \\
 \text{е)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7; \end{cases} \\
 \text{з)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 1, \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 8; \end{cases} \\
 \text{к)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}
 \end{array}$$

3. Решите однородные системы уравнений:

$$\begin{array}{l}
 \text{а)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases} \\
 \text{б)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{в)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \end{array} \right. \quad \text{г)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0; \end{array} \right. \\
 \text{д)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{array} \right.
 \end{array}$$

**Ответы. 1.** а) (2;3), б) (-1;2), в) (1;-1), г) (2;-1;1), д) (4;5;-3), е) (0;3;-3), ж) (2;1;0), з) (1;0;-1), и) (-1;0;2). **2.** а)  $(c; -\frac{7}{5}; \frac{9}{5} - \frac{3}{2}c)$ , б)  $(c_1; c_2; c_1 + 2c_2 + 5; c_1 + c_2 - 1)$ , в) (1; -1), г)  $\emptyset$ , д) (1; 0; 2), е)  $(5c-5; 7c-7; c; 0)$ , ж)  $\emptyset$ , з)  $\emptyset$ , и) (0; -1; 2), к)  $(-\frac{c}{2}; -1 - \frac{c}{2}; 0; -1 - \frac{c}{2}; c)$ . **3.** а)  $(c; -2c; c)$ , б) (0; 0; 0), в)  $(c; -\frac{1}{4}c; 0; \frac{3}{4}c)$ , г)  $(c_1; c_2; c_1 + \frac{5}{4}c_2; -\frac{1}{4}c_2)$ , д)  $(c_1; c_2; \frac{c_1 - 5c_2}{3}; \frac{-4c_1 + c_2}{3})$ .

## Глава 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

### §2.1. Линейные операции над векторами

1. Даны точки  $A(3;2;0)$ ,  $B(4;0;1)$ ,  $C(-5;0;2)$ ,  $D(-8;6;-1)$ . Проверьте,  $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{CD}$  или  $\overline{AB} \uparrow \downarrow \overline{CD}$ . Какой из векторов длиннее и во сколько раз?

2. При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  векторы  $\vec{a} = \alpha \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  и  $\vec{b} = 12\vec{i} + 3\vec{j} + \beta \vec{k}$  коллинеарны?

3. По данным векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  постройте векторы  $2\vec{a}$ ,  $-3\vec{b}$ ,  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $3\vec{a} - 2\vec{b}$ .

4. Постройте параллелограмм на векторах  $\overline{OA} = \vec{i} + \vec{j}$  и  $\overline{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$ , найдите длины его диагоналей.

5. Даны три последовательные вершины параллелограмма  $A(1;-2;3)$ ,  $B(3;2;1)$  и  $C(6;4;4)$ . Найдите его четвертую вершину  $D$ .

6. Вектор длины  $2\sqrt{3}$  составляет с осями координат равные острые углы. Найдите эти углы.

7. Вектор составляет с осями  $OY$  и  $OZ$  углы  $60^\circ$  и  $120^\circ$ . Какой угол он составляет с осью  $OX$ ?

8. На оси  $OZ$  найдите точку, равноудаленную от  $A(4;-1;2)$  и  $B(0;2;-1)$ .

9. Покажите, что  $ABCD$  – параллелограмм, если  $A(0;2;-3)$ ,  $B(3;1;1)$ ,  $C(4;-5;2)$ ,  $D(1;-4;-2)$ .

10. Докажите, что  $ABCD$  — трапеция, если  $\overline{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\overline{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\overline{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$ .

11. Определите координаты центра тяжести треугольника  $ABC$ , если  $A(5;1;12)$ ,  $B(11;3;8)$ ,  $C(2;5;0)$ .

12. Найдите орт вектора  $\vec{a} = (12;-4;3)$  и его направляющие косинусы. Острые или тупые углы образует вектор с осями координат?

**Ответы.** 1.  $\overline{CD}$  длиннее в 3 раза;  $\overline{AB} \uparrow \downarrow \overline{CD}$ . 2. -4; -9. 4.  $\sqrt{6}$ ;  $\sqrt{18}$ .

5.  $(4;0;6)$ . 6.  $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ . 7.  $45^\circ$  или  $135^\circ$ . 8.  $\left(0;0;\frac{8}{3}\right)$ . 11.  $\left(6;3;\frac{20}{3}\right)$ . 12.

$\left(\frac{12}{13}; -\frac{4}{13}; \frac{3}{13}\right)$ .

## §2.2. Скалярное произведение векторов

1. Упростите выражение  $(\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{j} + (-2\vec{k}) \cdot \vec{k} + (-2\vec{k}) \cdot \vec{j}$ .
2. Найдите углы треугольника с вершинами  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(1; 1; 1)$ ,  $C(0; 0; 5)$  и проекцию  $\overline{AB}$  на  $\overline{BC}$ .
3. При каком значении  $m$  векторы  $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - m\vec{k}$  перпендикулярны?
4. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = (2; 1; 0)$  и  $\vec{b} = (0; -2; 1)$ .
5. Найдите  $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 6\vec{b})$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ .
6. Найдите длину вектора  $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ .
7. Найдите проекцию вектора  $\vec{a} + \vec{c}$  на вектор  $\vec{b} + \vec{c}$ , если  $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ .
8. Даны векторы  $\vec{a} = (1; 1; -1)$ ,  $\vec{b} = (3; -1; -5)$ ,  $\vec{c} = (-2; 3; 4)$ .  
Найдите вектор  $\vec{x}$ , если известно, что  $\vec{x} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{x} \perp \vec{b}$  и  $\vec{x} \cdot \vec{c} = -1$ .

**Ответы.** 1. 2. 2.  $B=C=45^\circ$ ;  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 3. 3. 4.  $90^\circ$ . 5. -96. 6.  $\sqrt{73}$ . 7.  $\frac{5}{\sqrt{89}}$ .

8.  $(3; -1; 2)$ .

## §2.3. Векторное произведение векторов

1. Упростите выражения:
  - а)  $\vec{i} \times (2\vec{j} - 3\vec{k}) - \vec{k} \times (3\vec{i} + 2\vec{j}) + (\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) \times \vec{j}$ ;
  - б)  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$ ;
  - в)  $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$ ;
  - г)  $2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$ .
2. Дан треугольник с вершинами  $A(1; -2; 8)$ ,  $B(0; 0; 4)$ ,  $C(6; 2; 0)$ . Найдите его площадь и высоту  $BD$ .
3. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$  и  $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$ , где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  - единичные векторы, образующие угол  $30^\circ$ .

4. Найдите  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 10$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$ .

5. Даны точки  $A(-3; 1; 2)$ ,  $B(4; 0; -1)$ ,  $C(-2; 3; 0)$ .

Найдите  $(2\vec{AB} - 3\vec{BC}) \times \vec{CA}$ .

6. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = (-1; 3; 5)$  и  $\vec{b} = (2; -1; 3)$ .

7. Найдите площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы  $2\vec{m} - \vec{n}$  и  $4\vec{m} - 5\vec{n}$ , где  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ ,  $\left(\vec{m}, \vec{n}\right) = 45^\circ$ .

**Ответы.** 1. а)  $6\vec{i} + 4\vec{k}$ ; б)  $2\vec{a} \times \vec{c}$ ; в)  $\vec{a} \times \vec{c}$ ; г) 3. 2.  $7\sqrt{5}$ ;  $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ . 3. 1,5 4. 24. 5.  $(-40; -55; -75)$ . 6.  $\sqrt{390}$ . 7.  $1,5\sqrt{2}$ .

## §2.4. Смешанное произведение векторов

1. Найдите смешанное произведение векторов  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ . Правой или левой является тройка  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ?

2. Покажите, что векторы  $\vec{a} = (7; -3; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; -7; 8)$ ,  $\vec{c} = (1; -1; 1)$  компланарны.

3. Покажите, что точки  $A(5; 7; -2)$ ,  $B(3; 1; -1)$ ,  $C(9; 4; -4)$  и  $D(1; 5; 0)$  лежат в одной плоскости.

4. Дана пирамида с вершинами  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(5; 2; 0)$ ,  $B(2; 5; 0)$  и  $C(1; 2; 4)$ . Найдите её объём, площадь грани  $ABC$  и длину высоты, опущенной на эту грань.

5. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$ . Правой или левой является тройка  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ?

**Ответы.** 1. 4; правая. 4.  $V = 14$ ;  $H = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ . 5. 51; левая.

## Глава 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

### §3.1. Прямая на плоскости

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $K(-3;1)$  параллельно вектору  $\vec{a} = (4;-1)$ . Найдите угловой коэффициент этой прямой и точки ее пересечения с осями координат. Лежат ли на ней точки  $A(-3;1)$  и  $B(5;-1)$ ?

2. Дана прямая  $x-3y+6=0$ . Найдите: а) ее угловой коэффициент, б) ее нормальный вектор, в) точки пересечения с осями координат, г) площадь треугольника, заключенного между этой прямой и осями координат, д) точку пересечения этой прямой с прямой  $5x-2y-9=0$ .

3. Среди прямых: а)  $4x-2y+3=0$ , б)  $x+2y-7=0$ , в)  $y=2x+5$ , г)  $5x+10y+1=0$ , д)  $y=-\frac{1}{2}x$ , е)  $-6x+3y+5=0$  укажите параллельные и перпендикулярные.

4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $A(2;5)$  и отсекающей на оси ординат отрезок  $v = 7$ .

5. Найдите прямую, проходящую через точку пересечения прямых  $x+2y+1=0$ ,  $2x+y+2=0$  и образующую угол  $135^\circ$  с осью  $Ox$ .

6. Даны сторона прямоугольника  $3x-4y+5=0$  и две его вершины  $A(1;-3)$  и  $C(1;2)$ . Составьте уравнения остальных сторон.

7. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых  $2x-y-5=0$  и  $3x+2y+3=0$  а) параллельно оси  $Ox$ ; б) параллельные оси  $Oy$ ; в) параллельно прямой  $5x-2y+3=0$ ; г) перпендикулярно прямой  $7x+3y-1=0$ .

8. Найдите точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника с вершинами  $A(-4;2)$ ,  $B(2;-5)$ ,  $C(5;0)$ .

9. В треугольнике с вершинами  $A(0;-4)$ ,  $B(3;0)$ ,  $C(0;6)$  составьте уравнения стороны  $AB$ , высоты  $CH$ , медианы  $BM$ , биссектрисы  $AK$ , найдите длину высоты  $CH$  и расстояние от вершины  $C$  до биссектрисы  $AK$ .

10. Составьте уравнения сторон треугольника, зная его вершину  $A(0;2)$  и уравнения высот  $x + y = 4$  и  $y = 2x$ .

11. Найдите проекцию  $B$  точки  $A(5; 7)$  на прямую  $x+2y-4=0$  и точку  $C$ , симметричную точке  $A$  относительно данной прямой.

12. Составьте уравнения биссектрис углов между прямыми  $3x+4y-20=0$  и  $8x+6y-5=0$ .

13. Найдите расстояние от точки  $M(2;-1)$  до прямой, отсекающей на осях координат отрезки  $a = 8$ ,  $b = 6$ .

14. При каком значении  $m$  прямые  $7x-2y-5=0$ ,  $x+7y-8=0$  и  $mx+my-8=0$  пересекаются в одной точке?

15. Постройте треугольник со сторонами  $x+y-4=0$ ,  $3x-y=0$ ,  $x-3y-8=0$ . Найдите его углы и площадь.

**Ответы.** 1.  $x+4y-1=0$ ;  $k=-\frac{1}{4}$ ;  $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ ,  $(1;0)$ ; да. 2. а)  $\frac{1}{3}$ ; б)  $(1;-3)$ ; в)  $(0;2)$ ,  $(-6;0)$ ; г) 6; д)  $(3;3)$ . 3. параллельны а,в,е; б,г,д; перпендикулярны а,г; в,б 4.  $x+y-7=0$ . 5.  $x+y+1=0$ . 6.  $3x-4y-15=0$ ,  $4x+3y+5=0$ ,  $4x+3y-10=0$ . 7. а)  $y=-3$ , б)  $x=1$ , в)  $5x-2y-11=0$ , г)  $3x-7y-22=0$ . 8.  $(1;-1)$ ,  $\left(\frac{8}{3};-2\right)$ . 9. АВ:  $4x-3y-12=0$ ; СН:  $3x+4y-24=0$ ; ВМ:  $x+3y-3=0$ ; АК:  $3x-y-4=0$ ; СН=6;  $\sqrt{10}$ . 10.  $x-y+2=0$ ,  $x+2y-4=0$ ;  $2x+y-8=0$ . 11. В(2;1), С(-1;-5). 12.  $14x+14y-45=0$ ,  $2x-2y+35=0$ . 13. 4,4. 14. 4. 15.  $\text{tg}A=\frac{4}{3}$ ,  $\text{tg}B=\text{tg}C=2$ ,  $S=16$ .

### §3.2. Кривые второго порядка

1. Найдите центр и радиус окружности, проходящей через точки А(-1;5), В(-2;-2), С(5;5).

2. Дана точка А(-4; 6). Составьте уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок ОА.

3. Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку А(1;2).

4. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки А(7;7) и В(-2;4), если ее центр лежит на прямой  $2x-y-2=0$ .

5. Составьте уравнения касательных к окружности  $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ , проведенных в точках пересечения ее с прямой  $x-y+2=0$ .

6. Постройте эллипс  $x^2+4y^2=16$ , найдите его фокусы и эксцентриситет.

7. Запишите каноническое уравнение эллипса, зная, что а) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось  $b=3$ ; б) большая полуось  $a=6$ , а эксцентриситет  $\varepsilon=0,5$ .

8. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки  $M(2; \sqrt{3})$  и  $B(0;2)$ . Напишите его уравнение и найдите расстояние точки М от фокусов.

9. Эллипс, отнесенный к осям, проходит через точку  $M(1;1)$  и имеет эксцентриситет  $\varepsilon=\frac{3}{5}$ . Составьте уравнение эллипса.

10. Составьте уравнение эллипса, у которого длина большой оси равна 2, а фокусы  $F_1(0;0)$  и  $F_2(1;1)$ .

11. Постройте гиперболу  $x^2 - 4y^2 = 18$  и ее асимптоты. Найдите фокусы, эксцентриситет и угол между асимптотами.

12. Составьте каноническое уравнение гиперболы, зная, что а) расстояние между фокусами равно 10, а между вершинами 8; б) действительная полуось равна  $2\sqrt{5}$ , а эксцентриситет  $\sqrt{1,2}$ .

13. Напишите каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояния одной из ее вершин от фокусов равны 9 и 1.

14. Докажите, что длина перпендикуляра, опущенного из фокуса на одну из асимптот гиперболы, равна мнимой полуоси.

15. Дан эллипс  $9x^2 + 25y^2 = 1$ . Напишите уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

16. Определите траекторию точки М, которая движется так, что остается вдвое дальше от точки  $F(-8;0)$ , чем от прямой  $x = -2$ .

17. Постройте параболы, заданные уравнениями: а)  $y^2 = 4x$ , б)  $y^2 = -4x$ , в)  $x^2 = 4y$ , г)  $x^2 = -4y$ , а также их фокусы и директрисы. Запишите уравнения директрис.

18. Напишите уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы  $y^2 = 8x$  и касающейся ее директрисы. Найдите точки пересечения параболы и окружности.

19. Составьте уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки  $F(2;0)$  и от прямой  $y = 2$ . Найдите вершину параболы, точки пересечения ее с  $Ox$ , постройте ее.

20. Используя параллельный перенос осей координат, приведите уравнения к каноническому виду; постройте кривые:

а)  $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$ ;

б)  $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$ ;

в)  $y^2 + 4y = 2x$ ;

г)  $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$ ;

д)  $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$ ;

е)  $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$ ;

ж)  $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$ ;

з)  $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$ ;

и)  $x^2 - y^2 - 6x + 9 = 0$ ;

к)  $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ ;

л)  $x^2 - 6x + 8 = 0$ ;

м)  $x^2 + 2x + 5 = 0$ .

21. Дайте геометрическую иллюстрацию системы неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ x \geq 0, \\ y \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 < 16, \\ x > 2; \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{в)} \left\{ \begin{array}{l} (x-2)^2 + (y-3)^2 > 25, \\ |x| < 2; \end{array} \right. \\ \text{д)} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 7 + 6y, \\ x + y - 2 \geq 0, \\ x \leq 2; \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{г)} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4y^2 \leq 9 - 2x, \\ 2x + y \geq 2; \end{array} \right. \\ \text{е)} \left\{ \begin{array}{l} y \geq x^2 - 4x, \\ x + y \geq 2, \\ x + y \leq 4. \end{array} \right. \end{array}$$

**Ответы.** 1. (2;1); 5. 2.  $x^2+y^2+4x-6y=0$ . 3.  $(x-1)^2+(y-1)^2=1$  или  $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ . 4.  $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ . 5.  $3x-4y+8=0$ ,  $4x-3y+7=0$  6.  $a=4$ ,  $b=2$ ,  $c=2\sqrt{3}$ ,  $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 7. а)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; б)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ . 8.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ,

$r=4 \pm \sqrt{3}$ . 9.  $16x^2+25y^2=41$ . 10.  $3x^2+3y^2-2xy-2x-2y-1=0$ . 11.  $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ;  $53^\circ 8'$ .

12. а)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ , б)  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$  13.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  или  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ . 15.

$x^2-y^2 = \frac{8}{225}$ . 16.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$ . 18.  $(x-2)^2+y^2=16$ ;  $(2; \pm 4)$ . 19.  $y=x - \frac{x^2}{4}$ ;  $O_1(2;1)$ .

20. а)  $\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{2} = 1$ ,  $O_1(3;-1)$ ; б)  $X^2-Y^2=9$ ,  $O_1(-3;2)$ ; в)  $Y^2=2X$ ; г)  $X^2+Y^2=1$ ,

$O_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$ ; д)  $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$ ,  $O_1(1;-1)$ ; е)  $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$ ,  $O_1(2;3)$ ; ж) точка

$(2;1)$ ; з)  $\frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} = -1$  (мнимый эллипс), и)  $Y = \pm X$  (пара пересекающихся

прямых),  $O_1(3;0)$ ; к)  $X^2=-Y$ ,  $O_1(1; \frac{5}{2})$ ; л) прямые  $x=2$ ,  $x=4$ ; м)  $\emptyset$  (мнимые прямые).

### §3.3. Прямая и плоскость в пространстве

1. Постройте плоскости: а)  $4x+2y+3z-12=0$ ; б)  $5x-y+2z-10=0$ ; в)  $3x+y-2z=0$ ; г)  $2x-3z-6=0$ ; д)  $3y-z=0$ ; е)  $3x-5=0$ .

2. Даны точки  $M_1(0;-1;3)$  и  $M_2(1;3;5)$ . Составьте уравнения: а) прямой  $M_1M_2$ ; б) плоскости, проходящей через точку  $M_1$  перпендикулярно  $M_1M_2$ .

3. Найдите уравнение плоскости, проходящей через начало координат параллельно плоскости  $3x-2y+z+7=0$ .

4. Найдите уравнение плоскости, проходящей а) через точки  $P(4;-2;1)$ ,  $Q(2;4;-3)$  и начало координат; б) через ось  $Oy$  и точку  $(4;0;3)$ ; в) через точку  $M(0;2;1)$  параллельно векторам  $\vec{a}=(1;1;1)$  и  $\vec{b}=(1;1;-1)$ .

5. Какой угол образует плоскость  $x+y+2z-4=0$  а) с вектором  $\vec{a}=(1;2;1)$ ; б) с прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{3}$ ; в) с плоскостью  $3x-y+3z-5=0$ ; г) с плоскостью  $2x-z+3=0$ ; д) с плоскостью  $2x+2y+4z+5=0$ .

6. Найдите расстояние плоскости  $x-2y-2z+4=0$  а) от точки  $A(5;1;-1)$ ; б) от плоскости  $2x-4y-4z+5=0$ .

7. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат а) перпендикулярно плоскости  $3x-5y+2z-3=0$ ; б) параллельно прямой  $\frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{5}$ .

8. Составьте канонические и параметрические уравнения прямых, заданных общими уравнениями

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x + 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$$

Найдите угол между этими прямыми.

9. Покажите, что прямые  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$  и  $\begin{cases} x = z + 1, \\ y = 1 - z \end{cases}$  перпендикулярны.

10. Составьте уравнения прямой, проходящей через точку  $(-4;3;0)$  параллельно прямой  $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

11. Покажите, что прямая  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$  параллельна плоскости  $2x+y-z=0$ , а прямая  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$  лежит в этой плоскости.

12. Найдите точку пересечения прямой и плоскости:  
а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$  и  $3x-y+4z-24=0$ ; б)  $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$  и  $x-2y+z-5=0$ .

13. Найдите точку, симметричную точке  $M(1;1;1)$  относительно прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ .

14. Найдите точку, симметричную точке  $M(1;1;1)$  относительно плоскости  $x+y-2z-6=0$ .

15. Покажите, что прямые  $\begin{cases} x = z - 2, \\ y = 2z + 1 \end{cases}$  и  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$  пересекаются, и составьте уравнение плоскости, в которой они расположены.

**Ответы.** 2. а)  $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{2}$ ; б)  $x+4y+2z-2=0$ . 3.  $3x-2y+z=0$ . 4. а)  $x+7y+10z=0$ ; б)  $3x-4z=0$ ; в)  $x-y+2=0$ . 5. а)  $\arcsin \frac{5}{6}$ ; б)  $\arcsin \frac{7}{2\sqrt{21}}$ ; в)  $\arccos \frac{8}{\sqrt{114}}$ ; г)  $90^\circ$ ; д)  $0^\circ$ . 6. а) 3; б) 0,5. 7. а)  $\frac{x}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2}$ ;  $x = 3t$ ,  $y = -5t$ ,  $z = 2t$ ; б)  $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{5}$ ;  $x = 2t, y = -t, z = 5t$ . 8.  $\arccos \frac{11}{26}$ . 10.  $\frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}$ . 12. а) (3;-3;3); б) (1;-1;2). 13.  $(\frac{9}{7}; -\frac{4}{7}; -\frac{22}{7})$ . 14. (3;3;-3). 15.  $x+2y-5z=0$ .

## Глава 4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

### §4.1. Предел функции

Найдите следующие пределы:

1.

а)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \arcsin x$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 3x}{3x^3 - x^2 + 4}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{e^{x^2}}}$ ;

ж)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^3} - \frac{8}{x^3} \right)$ ;

з)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x}$ ;

и)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\operatorname{ctg}(2x + 4)}$ .

2.

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 7x + 3}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - 3x^2 + 1}{2x^3 + x - 3}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^5 - x^3 + 2x}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 - 6x^2 + 7x + 5}{8 - 4x + 3x^2 - 2x^3}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 8x - 9}{3x^5 - 6x^3 + 4x^2 + 11}$ ;

е)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 3}}{2n + 1}$ ;

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 5}{1 + \sqrt{x^2 + 3}}$ ;

з)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$ ;

и)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 - x^2 + 5}}{\sqrt{9x^4 + 2x^3}}$ ;

к)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2 - 1}$ ;

л)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$ ;

м)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{1 - x^2} + 3^{\frac{1}{x}} \right)$ .

3.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 5x^3 + x^2}{x^2 - x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 1}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{4x^2 - 5x - 6}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 5}$ ;

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 5}{x^3 + 1};$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 + 5x - 33}{x^2 + 2x - 15}.$$

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 3} - 1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{4+3x}};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1};$$

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right);$$

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{tg} 2x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+9} - 3};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^3 - 1};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x-4};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^3 + x^2 - x + 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} - 1}{\sqrt{x+7} - 3};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + x});$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -4} \left( \frac{1}{x+4} - \frac{18}{16-x^2} \right).$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} 3x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \cdot \sin x};$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 5x};$$

$$\text{н) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1};$$

$$\text{п) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}.$$

7.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^x;$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^{3n};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{3x+4} \right)^{x^2};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{1}{x^2-9}};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{5x+1}{3x-2} \right)^x;$$

8.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{3x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}.$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-tgx} - \sqrt{1+tgx}}{\sin 2x};$$

$$\text{о) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x} \right)^{x+2};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-3x+1}{x^2+x-2} \right)^x.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x);$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)};$$

**Ответы. 1.** а) 0; б)  $\frac{\pi}{6}$ ; в)  $\infty$ ; г) 0; д)  $\infty$ ; е) 0; ж)  $\frac{1}{8}$ ; з)  $\infty$ ; и) 0. **2.** а)

3; б)  $\infty$ ; в) 0; г) -5; д) 0; е) 1; ж) 6; з) 0; и)  $\frac{1}{3}$ ; к)  $\frac{1}{2}$ ; л) 2; м) -1. **3.** а) 0; б)

$\frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{4}{5}$ ; г)  $\frac{5}{3}$ ; д)  $\frac{15}{44}$ ; е)  $\infty$ ; ж)  $\frac{1}{2}$ ; з) 2; и)  $\frac{1}{3}$ ; к)  $-\frac{20}{7}$ ; л)  $\frac{13}{4}$ . **4.** а) -40;

б) 24; в) 1; г) 6; д)  $-\frac{1}{2}$ ; е) 3; ж) 12; з) -2; и)  $\frac{2}{3}$ ; к)  $\frac{3}{4}$ . **5.** а) 3; б) 2; в)  $\frac{1}{9}$ ; г)  $-\frac{1}{8}$ . **6.** а)  $\frac{5}{3}$ ; б) 6; в)  $\frac{5}{2}$ ; г)  $\frac{1}{3}$ ; д)  $\frac{25}{9}$ ; е)  $\frac{1}{2}$ ; ж) 6; з) 1; и)  $\frac{1}{3}$ ; к) 8; л)  $\frac{3}{5}$ ; м)  $-\frac{1}{2}$ ; н)  $-\frac{1}{2}$ ; о)  $\frac{1}{2}$ ; п)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ . **7.** а)  $e^4$ ; б)  $e^{-3}$ ; в)  $e^6$ ; г)  $e$ ; д) 0; е) 9; ж)  $e^{-\frac{1}{6}}$ ; з) 1; и)  $+\infty$ ; 0; к)  $e^{-4}$ . **8.** а) 4; б) 1; в)  $-\frac{1}{3}$ ; г)  $\frac{9}{4}$ ; д)  $-\frac{1}{2}$ ; е)  $-\frac{1}{2}$ ; ж) 1.

## §4.2. Непрерывность функции

Исследуйте непрерывность функции, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва, постройте график функции в окрестности точки разрыва.

$$1. \quad y = \frac{8}{x+4}.$$

$$2. \quad y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$3. \quad y = \frac{x+3}{x^2+1}.$$

$$4. \quad y = \frac{x-3}{x^2-4x+3}.$$

$$5. \quad y = \frac{\sin x + 1}{x^2 + x + 7}.$$

$$6. \quad y = \frac{x}{\sin x}.$$

$$7. \quad y = \frac{x-2}{|x-2|}.$$

$$8. \quad y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1}.$$

$$9. \quad y = x + \frac{x+3}{|x+3|}.$$

$$10. \quad y = \arctg \frac{1}{1-x}.$$

$$11. \quad y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}.$$

$$12. \quad y = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

$$13. \quad y = \begin{cases} x^3 + 1, & x \neq 0, \\ -2, & x = 0. \end{cases}$$

$$14. \quad y = \begin{cases} x+3, & x < 0, \\ x+2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$15. \quad y = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3, \\ 6, & x = 3. \end{cases}$$

$$16. \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x+3}, & x < -3, \\ x^2, & -3 \leq x < 1, \\ 3x-2, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$17. \quad y = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -2, \\ x + 1, & -2 < x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 3, \\ \frac{x}{x-3}, & x > 3. \end{cases}$$

**Ответы.** 1.  $x = -4$  – точка разрыва II рода. 2.  $x = 0$  – точка устранимого разрыва. 3. Функция непрерывна. 4.  $x = 3$  – точка устранимого разрыва. 5. Функция непрерывна. 6.  $x = 0$  – точка устранимого разрыва,  $x = \pi$  ( $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ ) – точки разрыва II рода. 7.  $x = 2$  – точка разрыва I рода. 8.  $x = -1$  – точка устранимого разрыва. 9.  $x = -3$  – точка разрыва I рода. 10.  $x = 1$  – точка разрыва I рода. 11.  $x = 0$  – точка разрыва II рода. 12.  $x = 0$  – точка разрыва I рода. 13.  $x = 0$  – точка устранимого разрыва. 14.  $x = 0$  – точка разрыва I рода. 15. Функция непрерывна. 16.  $x = -3$  – точка разрыва II рода. 17.  $x = -2$  – точка разрыва I рода,  $x = 3$  – точка разрыва II рода.

## Глава 5. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

### §5.1. Дифференцирование функций

Найдите производные функций:

1.  $y = \frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5$ .    2.  $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$ .

3.  $y = 4\sqrt{x^3} - 3\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x}$ .    4.  $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$ .

5.  $y = x^2 \cos x$ .    6.  $y = \frac{ax-b}{ax+b}$ .

7.  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ .    8.  $y = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$ .

9.  $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$ .    10.  $y = \frac{x^5}{e^x}$ .

11.  $y = \frac{x^2 \arctg x - x}{2}$ .    12.  $y = \sin \frac{x}{2}$ .

13.  $y = \cos(3-4x)$ .    14.  $y = \cos^3 x$ .

15.  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ .    16.  $y = \sqrt{x^4 + 2x + 3}$ .

17.  $y = x^2 - 7^x$ .    18.  $y = -\operatorname{ctg}^3 x + 3\operatorname{ctg} x + 3x$ .

19.  $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$ .    20.  $y = \cos^2 x^2$ .

21.  $y = \ln(x^2 + 5x + 6)$ .    22.  $y = \ln \ln x$ .

23.  $y = \ln^2 x$ .    24.  $y = a^{\frac{\sin x}{4}}$ .

25.  $y = e^{\sin 2x}$ .    26.  $y = e^{\cos^2 x}$ .

27.  $y = \arcsin 2x$ .    28.  $y = -\arcsin \frac{1}{x^2}$ .

29.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ .    30.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .

31.  $y = \arccos \sqrt{x}$ .    32.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1}$ .

33.  $y = \operatorname{arctg} \ln x$ .    34.  $y = \frac{1}{\ln^2 x}$ .

35.  $y = \operatorname{tg}^2 5x$ .    36.  $y = 5e^{-x^2}$ .

$$37. y = \lg \sin x.$$

$$39. y = \sqrt[3]{a + bx^3}.$$

$$41. z = \sqrt[3]{y + \sqrt{y}}.$$

$$43. y = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$$45. y = \frac{1}{2} \operatorname{Intg} \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}.$$

$$38. y = \sqrt{+2x^2}.$$

$$40. y = \sqrt{-2 \sin x}.$$

$$42. y = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}.$$

$$44. y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3}.$$

$$46. y = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}.$$

Найдите производные степенно-показательных функций:

$$47. y = x^{\cos x}.$$

$$48. y = \ln x^x.$$

$$49. y = \sqrt[x]{x}.$$

$$50. y = x^{\sqrt{x}}.$$

$$51. y = \operatorname{arctg} x^x.$$

$$52. y = \cos x^{\sin x}.$$

Найдите производные функций, заданных неявно:

$$53. x^3 + y^3 = a^3.$$

$$54. xy = \operatorname{tg} y.$$

$$55. e^y = x + y.$$

$$56. y - 0,3 \sin y = x.$$

$$57. xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$58. x^y = y^x.$$

Найдите производные  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{d^2y}{dx^2}$  функций, заданных параметрически:

$$59. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(+t^2). \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2} t^2. \end{cases}$$

Найдите  $n$ -ю производную от функций:

$$65. y = e^{-3x}.$$

$$66. y = \ln(+x).$$

$$67. y = \frac{1}{1+x}.$$

$$68. y = \sin x.$$

69. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислите: а)  $\operatorname{arctg} 1,05$ ; б)  $e^{0,2}$ ; в)  $\ln 1,01$ .

**Ответы.** 1.  $x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ . 2.  $-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6}$ . 3.

$\frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ . 4.  $-\frac{\pi}{x^2}$ . 5.  $x(2 \cos x - x \sin x)$ . 6.  $\frac{2ab}{\sqrt{x+b}}$ . 7.

$\frac{-2}{\sqrt{\sin x - \cos x}}$ . 8.  $t^2 \sin t$ . 9.  $3x^2 \ln x$ . 10.  $\frac{5x^4 - x^5}{e^x}$ . 11.  $x \operatorname{arctg} x$ . 12.

$\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$ . 13.  $4 \sin(3 - 4x)$ . 14.  $-3 \cos^2 x \sin x$ . 15.  $-\sin 4x$ . 16.

$\frac{2x^3 + 1}{\sqrt{x^4 + 2x + 3}}$ . 17.  $12x \sqrt{x^2 - 7}$ . 18.  $3 \operatorname{ctg}^4 x$ . 19.  $\sin x (\sec^2 x + 1)$ . 20.

$-2x \sin 2x^2$ . 21.  $\frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 6}$ . 22.  $\frac{1}{x \ln x}$ . 23.  $\frac{2 \ln x}{x}$ . 24.  $\frac{1}{4} a^{\sin \frac{x}{4}} \cos \frac{x}{4} \ln a$ .

25.  $2 \cos 2x e^{\sin 2x}$ . 26.  $-\sin 2x e^{\cos^2 x}$ . 27.  $\frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ . 28.  $\frac{2}{x \sqrt{x^4 - 1}}$ . 29.

$-\frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$ . 30.  $\frac{1}{x^2 + 1}$ . 31.  $-\frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$ . 32.  $\frac{1}{2\sqrt{4x^3 - x^2}}$ . 33.

$\frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$ . 34.  $-\frac{2}{x \ln^3 x}$ . 35.  $10 \operatorname{tg} 5x \sec^2 5x$ . 36.  $-10x e^{-x^2}$ . 37.

$\operatorname{ctg} x \lg e$ . 38.  $16x \sqrt{x^2 + 2}$ . 39.  $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{bx^3 + 2}}$ . 40.  $-10 \cos x \sqrt{-2 \sin x}$ .

41.  $\frac{1 + 2\sqrt{y}}{6\sqrt{y} \sqrt[3]{y + \sqrt{y}}}$ . 42.  $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$ . 43.  $\frac{4}{e^{-2x} - e^{2x}}$ . 44.  $\frac{1}{5 + 4 \sin x}$ . 45.

$\frac{1}{\sin^3 x}$ . 46.  $\frac{2}{\cos x \sqrt{\sin x}}$ . 47.  $x^{\cos x} \left( -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right)$ . 48.

$\sqrt{\ln x} \sqrt{\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x}$ . 49.  $\sqrt{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$ . 50.  $x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2} \ln x \right)$ .

51.  $\sqrt{\operatorname{rctg} x} \left( \operatorname{lnarctg} x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} \operatorname{arctg} x} \right)$ .

52.  $\sqrt{\cos x} \sqrt{\cos x \ln \cos x - \sin x \operatorname{tg} x}$ . 53.  $-\frac{x^2}{y^2}$ . 54.  $\frac{y \cos^2 y}{1 - x \cos^2 y}$ . 55.

$$\frac{1}{e^y - 1} = \frac{1}{x + y - 1} \cdot 56. \frac{10}{10 - 3 \cos y} \cdot 57. \frac{y}{x} \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \cdot 58. \frac{x \ln y - y}{y \ln x - x} \cdot \frac{y}{x}$$

59.  $9t^3$ . 60.  $2t^2 + 2$ . 61.  $-\sqrt{1-t^2}$ . 62.  $\frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}$ . 63. 0. 64.  $(+t^2) + 3t^2$ . 65.  $(-3)^n e^{-3x}$ . 66.  $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(+x)^n}$ . 67.  $\frac{(-1)^{n+1} n!}{(+x)^{n+1}}$ . 68.  $\sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$ . 69. а) 0,81; б) 1,2; в) 0,01.

## §5.2. Правило Лопиталья-Бернулли

Вычислите пределы, используя правило Лопиталья-Бернулли:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x + 1}{2 + x - x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^5}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 + 20}{x^2 + 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot e^{2x} - x}{5x^2 + x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln (-1)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$

**Ответы.** 1. -3. 2.  $\infty$ . 3. -12. 4. 3. 5. 3. 6.  $\frac{2}{5}$ . 7. 0. 8. 0. 9. 0. 10.  $\frac{1}{2}$ . 11.  $\frac{1}{5}$ . 12.  $\infty$ . 13.  $\frac{2}{\pi}$ . 14. 1. 15. 1. 16. 1. 17. 1. 18.  $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ .

### §5.3. Исследование функций с помощью производных

1. Определите промежутки возрастания и убывания функций:

а)  $y = 1 - 4x - x^2$ ;                      б)  $y = x^2 - 3$ ;

в)  $y = \frac{x}{x-2}$ ;                                  г)  $y = x \cdot \ln x$ .

2. Исследуйте на экстремум функции:

а)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ ;              б)  $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$ ;

в)  $y = x^2 e^{-x}$ ;                              г)  $y = x - \arctg x$ .

3. Найдите интервалы вогнутости и точки перегиба графиков функций:

а)  $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ ;              б)  $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$ ;

в)  $y = x^2 \ln x$ ;                              г)  $y = x^2 e^x$ .

4. Найдите асимптоты кривых:

а)  $y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$ ;                              б)  $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ;

в)  $y = \frac{1}{1 - e^x}$ ;    г)  $y = \ln(x + 1)$ .

5. Исследуйте функции и постройте их графики:

а)  $y = x^3 - 3x^2$ ;                              б)  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ ;

в)  $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ ;                                  г)  $y = 2x - \operatorname{tg} x$ .

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на указанных отрезках:

а)  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ ,  $[-2; 1]$ ; б)  $y = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$ ,  $[-1; 3]$ ; в)  $y = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$ ,  $[-2; 1]$ .

7. Из прямоугольников, у которых сумма трех сторон равна 100, выберите тот, который имеет наибольшую площадь.

8. Определите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом  $V$  так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

9. Окно имеет форму прямоугольника, завершеного полукругом. Определите размеры окна при заданном периметре, имеющего наибольшую площадь.

10. В шар радиуса  $R$  вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите этот объем.

**Ответы.** 1. а)  $(-\infty; -2)$  – возрастает,  $(2; +\infty)$  – убывает; б)  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$  – возрастает,  $(0; 2)$  – убывает; в)  $(-\infty; 2)$  и  $(0; +\infty)$  – убывает; г)  $(0; \frac{1}{e})$  – убывает,  $(\frac{1}{e}; +\infty)$  – возрастает. 2. а) экстремумов нет; б)

$y_{\max} = \sqrt{2}$  при  $x = 0$ ; в)  $y_{\min} = 0$  при  $x = 0$ ,  $y_{\max} = \frac{4}{e^2}$  при  $x = 2$ ; г) экстремумов нет. 3. а)  $(-\infty; 2)$  – выпуклый,  $(0; +\infty)$  – вогнутый,  $M(0; 12)$  – точка перегиба; б)

$(-\infty; -\sqrt{3})$  и  $(0; \sqrt{3})$  – вогнутый,  $(-\sqrt{3}; 0)$  и  $(\sqrt{3}; +\infty)$  – выпуклый, точки перегиба  $M_{1,2}(-\sqrt{3}; 0)$  и  $O(0; 0)$ ; в)  $(0; \frac{1}{\sqrt{e^3}})$  – вы-

пуклый,  $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; \infty)$  – вогнутый,  $M(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; -\frac{3}{2e^3})$  – точка перегиба; г)

$(-\infty; -3)$  и  $(-1; +\infty)$  – вогнутый,  $(-3; -1)$  – выпуклый, точки перегиба  $M_1(-3; \frac{10}{e^3})$  и  $M_2(-1; \frac{2}{e})$ . 4. а)  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ; б)  $x = \pm 1$ ,  $y = -x$

(левая),  $y = x$  (правая); в)  $x = 0$ ,  $y = 1$  (левая),  $y = 0$  (правая); г)  $x = -1$ . 5. а)  $y_{\max} = 0$  при  $x = 0$ ,  $y_{\min} = -4$  при  $x = 2$ , точка перегиба  $M(0; -2)$ ; б)

$y_{\max} = -2$  при  $x = 0$ ,  $y_{\min} = 2$  при  $x = 2$ , асимптоты  $x = 1$ ,  $y = x - 1$ ; в) точки перегиба  $M_1(0; 1)$  и  $M_2(0; 0)$ , асимптота  $y = -x$ ; г)

функция нечетная,  $y_{\max} = \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k$  при  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ,

$y_{\min} = \frac{3}{2}\pi + 1 + 2\pi k$  при  $x = \frac{3}{4}\pi + \pi k$ , точки перегиба  $M_k(\pi k; 2\pi k)$ , асим-

птоты  $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 6. а)  $m = f(\pm 1) = 2$ ,  $M = f(-2) = 11$ ; б)

$$m = f(3) = -\frac{5}{13}, \quad M = f(0) = 1; \quad \text{в) } m = f(0) = 1, \quad M = f(-2) = 3.7.$$

$$25 \times 50. \quad \mathbf{8.} \quad \sqrt[3]{2V} \times \sqrt[3]{2V} \times \sqrt[3]{\frac{V}{4}}. \quad \mathbf{9.} \quad \text{Высота прямоугольника равна радиусу}$$

$$\text{полукруга. } \mathbf{10.} \quad \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

## Глава 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### §6.1. Неопределенный интеграл

Найдите неопределенные интегралы, применяя основные правила интегрирования:

1.  $\int (x^2 + 8x + 3) dx$ .

2.  $\int (a + bx^3)^2 dx$ .

3.  $\int \frac{3x^6 - 2x^5 + 3x^4 - x^3 - 3}{x^4} dx$ .

4.  $\int (\sqrt{x+1})^2 - \sqrt{x+1} dx$ .

5.  $\int \frac{(x^2+1)^2 - 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ .

6.  $\int \frac{dx}{x^2 + 7}$ .

7.  $\int \frac{dx}{x^2 - 10}$ .

8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}$ .

9.  $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$ .

10.  $\int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x + 4}{\sin^2 x} dx$ .

11.  $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$ .

12.  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ .

13.  $\int 4^x \left( 3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$ .

14.  $\int \frac{(x^2)^2}{x(x^2)^2} dx$ .

Найдите неопределенные интегралы, используя свойство дифференциала  $dx = \frac{1}{k} d(ax + b)$ :

15.  $\int e^{x-3} dx$ .

16.  $\int \frac{dx}{x+4}$ .

17.  $\int \sqrt[3]{x+11} dx$ .

18.  $\int \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) dx$ .

19.  $\int \sin 5x dx$ .

20.  $\int 3^{4x} dx$ .

21.  $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}}$ .

22.  $\int \frac{dx}{9x^2 + 16}$ .

23.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}$ .

24.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 5}}$ .

25.  $\int e^{4x-3} dx$ .

26.  $\int \frac{dx}{e^{5x-1}}$ .

27.  $\int \frac{dx}{1-7x}$ .

28.  $\int (x-3)^8 dx$ .

29.  $\int \frac{dx}{(x-3)^3}$ .

$$30. \int \sqrt[4]{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^3} dx. \quad 31. \int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right)}. \quad 32. \int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}.$$

Найдите неопределенные интегралы, используя подведение под знак дифференциала:

$$33. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx. \quad 34. \int e^{\cos x} \sin x dx. \quad 35. \int \sin^6 x \cos x dx.$$

$$36. \int \operatorname{ctg} x dx. \quad 37. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx. \quad 38. \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$39. \int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x}. \quad 40. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx. \quad 41. \int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$42. \int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} dx. \quad 43. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8-3}}. \quad 44. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{5-e^{2x}}}.$$

$$45. \int \frac{x^6 dx}{x^{14}+5}. \quad 46. \int \frac{x^6 dx}{x^7+2}. \quad 47. \int \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^3} dx.$$

$$48. \int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx. \quad 49. \int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 50. \int \frac{2x-3}{x^2-4} dx.$$

$$51. \int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}} dx. \quad 52. \int \frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x} dx. \quad 53. \int \sqrt[4]{1-6x^5} x^4 dx.$$

$$54. \int \frac{dx}{x(5\ln x)}. \quad 55. \int \frac{e^{4x} dx}{5+2e^{4x}}. \quad 56. \int \frac{\sin 2x dx}{5-\cos^2 2x}.$$

Найдите неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям:

$$57. \int x \cos x dx. \quad 58. \int x \sin 2x dx. \quad 59. \int x e^{-x} dx.$$

$$60. \int \ln x dx. \quad 61. \int (x^2 + 3x + 2) \ln x dx. \quad 62. \int \arcsin x dx.$$

$$63. \int x \operatorname{arctg} x dx. \quad 64. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}. \quad 65. \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$$

$$66. \int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx. \quad 67. \int x \ln^2 x dx. \quad 68. \int e^x \sin x dx.$$

Найдите неопределенные интегралы от рациональных дробей:

$$69. \int \frac{dx}{3-x}. \quad 70. \int \frac{dx}{(x+2)^2}. \quad 71. \int \frac{x-1}{x-2} dx.$$

$$\begin{array}{lll}
72. \int \frac{x^4 dx}{1-x} & 73. \int \frac{dx}{x^2+2x+3} & 74. \int \frac{x+2 dx}{x^2+2x+2} \\
75. \int \frac{3x^3+x^2}{x^2+6x+10} dx & 76. \int \frac{x^3+7x^2+14x}{x^2+7x+13} dx & 77. \int \frac{x+5 dx}{2x^2+2x+3} \\
78. \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx & 79. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx & 80. \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx \\
81. \int \frac{x^2-2x+3 dx}{(x-1)(x^2-4x^2+3x)} & 82. \int \frac{x^2-3x-3 dx}{(x-1)(x^2-2x+5)} & 83. \int \frac{x^4+1 dx}{x^3-x^2+x-1}
\end{array}$$

Найдите неопределённые интегралы от иррациональных функций:

$$\begin{array}{lll}
84. \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} & 85. \int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} & 86. \int \frac{x-11 dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} \\
87. \int \frac{x-5x dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}} & 88. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}} & 89. \int \frac{x+1 dx}{x\sqrt{x-2}} \\
90. \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} & 91. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}} & 92. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)} \\
93. \int \frac{dx}{\sqrt{x+4\sqrt{x}}} & 94. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2-4\sqrt{x}}} & 95. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \\
96. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx & 97. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} & 98. \int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6} dx
\end{array}$$

Найдите неопределённые интегралы от тригонометрических функций:

$$\begin{array}{lll}
99. \int \cos 4x \cos 7x dx & 100. \int \sin 4x \sin 6x dx & 101. \int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx \\
102. \int \sin^3 x \cos^2 x dx & 103. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x} & 104. \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x - 3} \\
105. \int \cos^2 x dx & 106. \int \sin^4 x dx & 107. \int \cos^6 x dx \\
108. \int \frac{dx}{\cos^4 x} & 109. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx & 110. \int \operatorname{ctg}^4 x dx \\
111. \int \frac{dx}{5-3\cos x} & 112. \int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x} & 113. \int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}
\end{array}$$

**Ответы.** 1.  $2x^3 + 4x^2 + 3x + C$ . 2.  $a^2x + \frac{abx^4}{2} + \frac{b^2x^7}{7} + C$ .

3.  $x^3 - x^2 + 3x - \ln|x| + \frac{1}{x^3} + C$ . 4.  $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x + C$ .

5.  $\frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^{2\sqrt[3]{x}}}{7} - 6\sqrt[3]{x} + C$ . 6.  $\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + C$ . 7.  $\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{10}}{x + \sqrt{10}} \right| + C$ . 8.  $\arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} + C$ . 9.  $C - \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ .
10.  $3\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x + C$ . 11.  $\cos x - \operatorname{ctg} x + C$ . 12.  $C - x - \operatorname{ctg} x$ .
13.  $\frac{3 \cdot 4^x}{\ln 4} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$ . 14.  $\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C$ . 15.  $e^{x-3} + C$ . 16.  $\ln|x+4| + C$ .
17.  $\frac{3\sqrt[3]{(x+11)^4}}{4} + C$ . 18.  $\sin(x - \frac{\pi}{8}) + C$ . 19.  $C - \frac{1}{5} \cos 5x$ . 20.  $\frac{3^{4x}}{4 \ln 3} + C$ .
21.  $9\operatorname{tg} \frac{x}{9} + C$ . 22.  $\frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{3x}{4} + C$ . 23.  $\frac{1}{5} \arcsin 5x + C$ .
24.  $\frac{1}{2} \ln|2x + \sqrt{4x^2 + 5}| + C$ . 25.  $\frac{1}{4} e^{4x-3} + C$ . 26.  $C - \frac{1}{5} e^{1-5x}$ .
27.  $C - \frac{1}{7} \ln|1-7x|$ . 28.  $\frac{(5x+3)^7}{35} + C$ . 29.  $\frac{1}{6(2-3x)^2} + C$ .
30.  $C - \frac{8}{7} \sqrt[4]{(1-\frac{x}{2})^7}$ . 31.  $3\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}) + C$ . 32.  $\sqrt{2x+5} + C$ . 33.  $\frac{\ln^3 x}{3} + C$ .
34.  $C - e^{\cos x}$ . 35.  $\frac{\sin^7 x}{7} + C$ . 36.  $\ln|\sin x| + C$ . 37.  $e^{\operatorname{arctg} x} + C$ .
38.  $C - \frac{\arccos^2 x}{2}$ . 39.  $\frac{1}{4 \cos^4 x} + C$ . 40.  $e^{\operatorname{tg} x} + C$ . 41.  $\frac{2 \cdot 3^{\sqrt{x}}}{\ln 3} + C$ .
42.  $\frac{\sin x - 2}{\cos x} + C$ . 43.  $\frac{1}{4} \ln|x^4 + \sqrt{x^8 - 3}| + C$ . 44.  $\arcsin \frac{e^x}{\sqrt{5}} + C$ .
45.  $\frac{1}{7\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^7}{\sqrt{5}} + C$ . 46.  $\frac{1}{7} \ln|x^7 + 2| + C$ . 47.  $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{x^2} + C$ . 48.  $C - \frac{1}{3^x}$ .
49.  $\frac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1-x^2} + C$ . 50.  $\frac{1}{4} \ln|(x-2)(x+2)^7| + C$ .
51.  $\frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} - 6\sqrt{\ln x} + C$ . 52.  $\frac{3}{4} (2 + \ln x)^{\frac{4}{3}} + C$ . 53.  $C - \frac{2}{75} (1-6x^5)^{\frac{5}{4}}$ .
54.  $C - \frac{1}{20(1+5 \ln x)^4}$ . 55.  $\frac{1}{8} \ln(5 + 2e^{4x}) + C$ . 56.  $\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\cos 2x - \sqrt{5}}{\cos 2x + \sqrt{5}} \right| + C$ .
57.  $x \sin x + \cos x + C$ . 58.  $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + C$ . 59.  $C - e^{-x}(x+1)$ .

60.  $x(\ln x - 1) + C$ . 61.  $(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{3x^2}{4} - 2x + C$ .
62.  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ . 63.  $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$ . 64.  $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$ .
65.  $C - \frac{1}{2}(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x)$ . 66.  $C - 2e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 4x + 8) + C$ .
67.  $\frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$ . 68.  $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$ .
69.  $C - \ln|3-x|$ . 70.  $C - \frac{1}{3(3x+2)}$ . 71.  $2x + 3 \ln|x-2| + C$ .
72.  $C - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \ln|1-x|$ . 73.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$
74.  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + \operatorname{arctg}(x+1) + C$ .
75.  $\frac{3}{2}x^2 - 17x + 36 \ln(x^2 + 6x + 10) - 46 \operatorname{arctg}(x+3) + C$ .
76.  $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 7x + 13) - \frac{7}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+7}{\sqrt{3}} + C$
77.  $\frac{1}{4} \ln(2x^2 + 2x + 3) + \frac{9}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C$ . 78.  $\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + C$ .
79.  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C$ . 80.  $x + \frac{1}{x} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} + C$ .
81.  $\frac{1}{x-1} + \ln \frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|} + C$ . 82.  $\ln \frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C$ .
83.  $\frac{(x+1)^2}{2} + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x + C$ . 84.  $C - \ln|1-x + \sqrt{5-2x+x^2}|$ .
85.  $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C$ . 86.  $C - 8\sqrt{5+2x-x^2} - 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}}$ .
87.  $\frac{61}{16} \ln|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}| - \frac{5}{4} \sqrt{4x^2+9x+1} + C$ .
88.  $\frac{2\sqrt{x-1}}{35} (5x^3 + 6x^2 + 8x + 16) + C$ . 89.  $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$ .
90.  $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \ln|1 + \sqrt[3]{x+1}| + C$ .

91.  $x + \frac{6\sqrt{x^5}}{5} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$ .
92.  $3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x} - 1| + C$ . 93.  $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(1 + \sqrt[4]{x}) + C$ .
94.  $\frac{6}{5}(\sqrt{x^5} + 2\sqrt[2]{x^5} + 2\ln|\sqrt[2]{x^5} - 1|) + C$ . 95.  $C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x$ .
96.  $C - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$ . 97.  $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$ . 98.  $C - \frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}$ .
99.  $\frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{22}\sin 11x + C$ . 100.  $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$ .
101.  $\frac{3}{2}\cos \frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos x + C$ . 102.  $\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x - 5) + C$ . 103.  $C - \frac{ctg^4 x}{4}$ .
104.  $\frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 8\ln|\cos x - 3| + C$ . 105.  $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$ .
106.  $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$
107.  $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\sin 2x(\cos^4 x + \frac{5}{4}\cos^2 x + \frac{15}{8}) + C$ . 108.  $tgx + \frac{1}{3}tg^3 x + C$ .
109.  $tgx + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{2}x + C$ . 110.  $x - \frac{1}{3}ctg^3 x + ctgx + C$ .
111.  $\frac{1}{2}\arctg(2tg \frac{x}{2}) + C$ . 112.  $\frac{1}{5}\ln \left| \frac{tg \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{tg \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} \right| + C$ . 113.  $\frac{2}{\sqrt{15}}\arctg \frac{2tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{15}} + C$ .

## §6.2. Определённый интеграл и его приложения. Несобственные интегралы

Вычислите определённые интегралы:

1.  $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$ . 2.  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$ . 3.  $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$ .
4.  $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$ . 5.  $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ . 6.  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ .
7.  $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ . 8.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$ . 9.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ .

$$10. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

$$12. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$13. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

$$14. \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx.$$

$$15. \int_0^3 x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$16. \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}.$$

$$17. \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$18. \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}.$$

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

$$20. \int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}.$$

$$21. \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

Вычислите несобственные интегралы (или установите их расходимость):

$$22. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

$$23. \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$24. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$25. \int_0^{\infty} \sin x dx$$

$$26. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$$

$$27. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$$

$$28. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$29. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$30. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$31. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$$

$$32. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x}.$$

$$33. \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

$$34. y = \frac{x^2}{3}, y = 4 - \frac{2}{3}x^2.$$

$$35. y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}.$$

$$36. y = 3-2x, y = x^2.$$

$$37. y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2x.$$

$$38. xy = -2, y = x-3.$$

$$39. y = \ln x, y = \ln^2 x.$$

$$40. x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0,$$

$$y = x^2 + 6x + 10 \text{ (две фигуры)}.$$

$$41. \rho = a(1 + \cos \varphi).$$

$$42. \rho = 2 + \cos \varphi.$$

$$43. \rho = 4 \sin^2 \varphi.$$

$$44. \rho = a \cos 3\varphi.$$

$$45. x = a \cos t, y = b \sin t \text{ (эллипс)}.$$

$$46. x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi \text{ (одна роида)}.$$

$$47. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t \text{ (аст-роида)}.$$

арка циклоиды),  $y = 0$ .

Найдите объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных заданными линиями, вокруг указанных осей координат:

48.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  ( $x \geq 0$ ), а) вокруг  $Ox$ ; б) вокруг  $Oy$ .

49.  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ , а) вокруг  $Ox$ ; б) вокруг  $Oy$ .

50.  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ , а) вокруг  $Ox$ ; б) вокруг  $Oy$

51.  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , вокруг  $Ox$ .

52.  $y = x^3$ ,  $y = 8$ ,  $y = -8$ , вокруг  $Oy$ .

Вычислите длины дуг кривых:

53.  $y^2 = x^3$  от точки  $O(0;0)$  до точки  $A(4;8)$ .

54.  $y = \ln \cos x$ , отсечённой прямыми  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ .

55.  $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$ , отсечённой прямой  $x = -1$ .

56.  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  (астроида).

57.  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  (одна арка циклоиды).

58.  $\rho = 4(1 - \cos \varphi)$  (кардиоида).

59.  $\rho = ae^{\varphi}$  от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \pi$ .

Ответы. 1.  $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$ . 2.  $\frac{7}{72}$ . 3.  $7\frac{2}{3}$ . 4.  $0,2(e-1)^5$ . 5.  $\frac{1}{4}$ . 6.  $\frac{\pi}{2}$ . 7. 2. 8.

$\arctg \frac{1}{7}$ . 9.  $\frac{3}{32}(7\sqrt[3]{4}-12)$ . 10.  $\frac{\pi}{6}$ . 11.  $\frac{\pi}{2}-1$ . 12.  $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ . 13. 1. 14.

$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ . 15.  $5\arctg 3 - \frac{3}{2}$ . 16.  $7 + 2\ln 2$ . 17.  $\frac{32}{3}$ . 18.  $8 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ . 19.  $\ln 2$ .

20.  $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ . 21.  $1 - \frac{\pi}{4}$ . 22. 1. 23. Расходится. 24.  $\pi$ . 25. Расходится. 26.  $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ .

27.  $\frac{\pi^2}{8}$ . 28.  $\frac{1}{2}$ . 29. 2. 30.  $\frac{1}{\ln 2}$ . 31. Расходится. 32. Расходится. 33. Расхо-

дится. 34.  $\frac{32}{3}$ . 35.  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ . 36.  $10\frac{2}{3}$ . 37. 4. 38.  $\frac{3}{2} - 2\ln 2$ . 39.  $3 - e$ . 40.

$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ ;  $\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{3}$ . 41.  $\frac{3}{2}\pi a^2$ . 42.  $\frac{9}{2}\pi$ . 43.  $6\pi$ . 44.  $\frac{1}{4}\pi a^2$ . 45.  $\pi ab$ . 46.  $3\pi a^2$ .

47.  $\frac{3}{8}\pi a^2$ . 48. а)  $\frac{256}{15}\pi$ ; б)  $8\pi$  49. а)  $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$ ; б)  $2\pi$ . 50. а)  $\frac{178}{15}\pi$ ; б)  $\frac{21}{2}\pi$ . 51.

$$\frac{\pi^2}{2}. \quad \mathbf{52.} \quad 38,4\pi. \quad \mathbf{53.} \quad \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1). \quad \mathbf{54.} \quad \frac{1}{2}\ln 3. \quad \mathbf{55.} \quad \frac{28}{3}. \quad \mathbf{56.} \quad 6a. \quad \mathbf{57.} \quad 8a. \quad \mathbf{58.} \quad 32.$$

$$\mathbf{59.} \quad \sqrt{2}a(e^\pi - 1).$$

## Глава 7. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### §7.1. Частные производные и полный дифференциал

1. Найдите и изобразите области определения функций:

а)  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ;

б)  $z = \ln(x+y)$ ;

в)  $y = \frac{1}{x^2+y^2}$ ;

г)  $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ ;

д)  $z = \ln(x^2+y)$ ;

е)  $z = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$ .

2. Найдите частные производные и полные дифференциалы функций:

а)  $z = x^3 + y^3 - 3axy$ ;

б)  $z = \frac{x-y}{x+y}$ ;

в)  $z = \frac{y}{x}$ ;

г)  $z = \sqrt{x^2-y^2}$ ;

д)  $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$ ;

е)  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ;

ж)  $z = x^y$ ;

з)  $z = e^{\frac{\sin y}{x}}$ ;

и)  $z = \ln \sin \frac{x+a}{\sqrt{y}}$ .

3. Вычислите приближённо:

а)  $(0,98)^{2,01}$ ;

б)  $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$ ;

в)  $\ln(0,9^3 + 0,09^3)$ .

4. Покажите, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$ , если

а)  $z = x^4 - 3x^3y^5 + 2x^6y - y^4 + 2$ ;

б)  $z = 4x^5y^7 - 3x^3y^4 + 3x^4 - 2y^5 + y$ .

5. Покажите, что данные функции удовлетворяют заданным уравнениям:

а)  $z = \operatorname{tg}^3(2x-3y)$ ;  $3\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ;

$$\text{б) } z = \ln(x^2 + y^2); \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$\text{в) } u = x + \frac{x-y}{y-z}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1;$$

$$\text{г) } z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

$$\text{д) } z = e^{\frac{y}{x}}; \quad \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \frac{\partial z}{\partial x}) - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

$$\text{е) } z = \ln(x + e^{-y}); \quad \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{ж) } z = x e^{\frac{y}{x}}; \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

6. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям:

$$\text{а) } z = 2x^2 - 4y^2 \text{ в точке } A(2;1;4);$$

$$\text{б) } z = 3y^2 - 9xy + y \text{ в точке } A(1;3;3);$$

$$\text{в) } z = \sin \frac{y}{x} \text{ в точке } A(1;\pi;0).$$

## §7.2. Экстремумы функций двух переменных.

Исследуйте на экстремум следующие функции:

$$7. z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

$$8. z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

$$9. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

$$10. z = x^3 + xy^2 + 6xy.$$

$$11. z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y).$$

$$12. z = e^{\frac{x}{y}} (x + y^2).$$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции в области D:

$$13. z = x^2 + y^2 - xy + x + y, \quad D: \begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ x + y \geq -3. \end{cases}$$

$$14. z = x^2 + xy, \quad D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 3. \end{cases}$$

$$15. z = \frac{x^2}{2} - xy, \quad D: \begin{cases} y \geq \frac{x^2}{3}, \\ y \leq 3. \end{cases}$$

$$16. z = x^2 - y^2, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$17. z = xy(4 - x - y), \quad D: \begin{cases} x \geq 1, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 6. \end{cases}$$

### §7.3. Производная по направлению. Градиент

18. Как изменяется функция  $z = 2x^3y + 3x^2y^2$  в точке  $A(-1;2)$  в направлении  $\vec{\ell} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ ?

19.  $z = \ln(2x^2 + y^3)$ . Найдите направление наибольшего возрастания функции  $z$  в точке  $A(3;1)$ .

20.  $z = \arcsin xy$ . Найдите угол между градиентами этой функции в точках  $A(1;0)$  и  $B(0;4)$ .

21. Найдите точку, в которой градиент функции  $z = \ln(x + \frac{1}{y})$  равен  $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}$ .

22. Найдите наибольшую скорость возрастания функции  $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$  в точке  $A(2;1)$ .

23. Сравните скорость изменения функции  $z = 2x^2 + xy$  в точке  $A(-1;2)$  в направлении  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  и в направлении  $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ . Какова наибольшая скорость изменения функции в точке  $A$ ? Каково направление наибольшего возрастания функции?

**Ответы.** 1. а) единичный круг с центром в начале координат; б) полуплоскость, расположенная над прямой  $x + y = 0$ ; в) вся плоскость за исключением начала координат; г) квадрат  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ ; д) часть плоскости, расположенная выше параболы  $y = -x^2$ ; е) вся плоскость за исключением точек прямых  $x=1$  и  $y=0$ . 2. а)  $\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 - ay)$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3(y^2 - ax); \text{ б) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{(x+y)^2}; \text{ в) } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}; \text{ г) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}; \quad \text{д) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})}; \quad \text{е) } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \text{ж) } \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x;$$

$$\text{з) } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{\sin y}{x}} \cdot \cos \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} e^{\frac{\sin y}{x}} \cdot \cos \frac{y}{x};$$

$$\text{и) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x+a}{\sqrt{y}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+a}{2y\sqrt{y}} \operatorname{ctg} \frac{x+a}{\sqrt{y}}. \quad \mathbf{3.} \text{ а) } 0,96; \text{ б) } 4,998; \text{ в) } -0,3. \quad \mathbf{6.}$$

$$\text{а) } 8x - 8y - z - 4 = 0; \quad \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}; \quad \text{б) } 27x - 9y + z - 3 = 0;$$

$$\frac{x-1}{27} = \frac{y-3}{-9} = \frac{z-3}{1}; \quad \text{в) } \pi x - y - z = 0; \quad \frac{x-1}{\pi} = \frac{y-\pi}{-1} = \frac{z}{-1}. \quad \mathbf{7.} \quad z_{\min} \left( \frac{1}{3}; \frac{4}{3} \right) = -\frac{21}{9}.$$

$$\mathbf{8.} \quad z_{\max} \left( -2; \frac{1}{2} \right) = 8. \quad \mathbf{9.} \quad z_{\min} \left( 1; \frac{1}{2} \right) = 4. \quad \mathbf{10.} \quad z_{\min} (\sqrt{3}; -3) = -6\sqrt{3},$$

$$z_{\max} (-\sqrt{3}; -3) = 6\sqrt{3}. \quad \mathbf{11.} \quad z_{\max} (6; 4) = 5 \ln 2 \approx 3,47. \quad \mathbf{12.} \quad z_{\min} (-2; 0) = -\frac{2}{e}. \quad \mathbf{13.}$$

$$M = 6 = z(-3; 0) = z(0; -3); \quad m = -1 = z(-1; -1). \quad \mathbf{14.} \quad M = 4 = z(1; 3), \quad m = -2 = z(-1; 3). \quad \mathbf{15.} \quad M = 13,5 = z(-3; 3); \quad m = -4,5 = z(3; 3). \quad \mathbf{16.}$$

$$M = 4 = z(-2; 0) = z(2; 0); \quad m = -4 = z(0; 2) = z(0; -2). \quad \mathbf{17.}$$

$$M = \frac{64}{27} = z\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right); \quad m = -18 = z(3; 3). \quad \mathbf{18.} \quad \text{Убывает, } \frac{\partial z}{\partial e} = -15,2. \quad \mathbf{19.}$$

$$\frac{12}{19} \bar{i} + \frac{3}{19} \bar{j}. \quad \mathbf{20.} \quad 90^\circ. \quad \mathbf{21.} \quad A\left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right); \quad B\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right). \quad \mathbf{22.} \quad 0,82. \quad \mathbf{23.} \quad v_1 = \frac{\partial z}{\partial a} = -2$$

$$\text{(убывает), } v_2 = \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{2}{5} \quad \text{(возрастает), } v_{\text{миб}} = \sqrt{5} \text{ в направлении}$$

$$\bar{l} = -2\bar{i} - \bar{j}.$$

## Глава 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### §8.1. Дифференциальные уравнения I порядка

1. Проверьте, является ли указанная функция решением данного уравнения:

а)  $y = Cx, y'x - y = 0$ ;

б)  $y = \sin x, y' - y = 0$ ;

в)  $y = \sin x - 2 \cos x, y' \cos x + y \sin x = 1$ ;    г)  $y = Cx^4, xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$ .

Проинтегрируйте дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Если даны начальные условия, найдите частные решения:

2.  $ydy - xdx = 0, y(3) = 5$ .

3.  $(2x + 5)dy + ydx = 0, y(0) = 1$ .

4.  $yy' = 3, y(6) = 10$ .

5.  $y'\sqrt{1+x^2} - y = 0, y(0) = 4$ .

6.  $\sqrt{1-x^2}y' + x\sqrt{9-y^2} = 0,$   
 $y(0) = 0$ .

7.  $3x dx - 2x dy = dx + dy$ .

8.  $y' \sec 5x - 5y = 0, y(\pi) = \frac{1}{5}$ .

9.  $y' \operatorname{tg} x - y = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

10.  $xy' = \frac{y}{\ln x}, y(e) = 1$ .

11.  $(xy^2 + x)dx + (y + x^2y)dy = 0$ .

Проинтегрируйте однородные дифференциальные уравнения:

12.  $2xyy' = y^2 - 4x^2$ .

13.  $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$ .

14.  $(2xy + y^2)dx + (2xy + x^2)dy = 0$ .

15.  $x dy - y dx = y dy$ .

16.  $xy' - y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 0$ .

17.  $xy' = y + \sqrt{25x^2 - y^2}$ .

18.  $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$ .

19.  $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ .

Проинтегрируйте линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли:

20.  $y' + 2y = 4x$ .

21.  $y' - 5x^4 y = e^{-x^5}$ .

22.  $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x, y(0) = 0$ .

23.  $y' \sin x - y = \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}$ .

24.  $xy' + y = \ln x + 1$ .

25.  $xy' + y + xy^2 = 0$ .

26.  $y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0$ .

27.  $xy' + y = y^2 \ln x$ .

$$28. yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0.$$

$$29. xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}.$$

30. Определите тип дифференциального уравнения:

а)  $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$ ;

б)  $y' = e^{2x} - e^x y$ ;

в)  $y' = \frac{y+1}{x}$ ;

г)  $(x^2 + 1)y' - xy = x(x^2 + 1)$ ;

д)  $y' = 2x^3 y^3 - 2xy$ ;

е)  $xdy + ydx = 0$ ;

ж)  $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$ ;

з)  $\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ ;

и)  $y' \cos x = 1 - y \sin x$ ;

к)  $(1 + x^2)dy - 2xydx = 0$ .

**Ответы.** 1. а) да; б) нет; в) да; г) нет. 2.  $y^2 - x^2 = C$ ;  $y^2 - x^2 = 16$ .

3.  $y = \frac{c}{\sqrt{2x+5}}$ ;  $y = \sqrt{\frac{5}{2x+5}}$ . 4.  $y^2 = 6x + C$ ;  $y^2 = 6x + 64$ . 5.

$y = C(x + \sqrt{1+x^2})$ ;  $y = 4(x + \sqrt{1+x^2})$ . 6.  $y = 3\sin(C + \sqrt{1-x^2})$ ;

$y = 3\sin(\sqrt{1-x^2} - 1)$ . 7.  $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\ln C(2x+1)$ . 8.  $y = Ce^{\sin 5x}$ ;

$y = \frac{1}{5}e^{\sin 5x}$ . 9.  $y = C \sin x - 1$ ;  $y = 2 \sin x - 1$ . 10.  $y = C \ln x$ ;  $y = \ln x$ . 11.

$(1+x^2) \cdot (1+y^2) = C$ . 12.  $y^2 + 4x^2 - 8Cx = 0$ . 13.

$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C$ . 14.  $xy(x+y) = C$  15.  $\ln y + \frac{x}{y} = C$ . 16.

$x \sin \frac{y}{x} = C$ . 17.  $y = 5x \cdot \sin \ln Cx$ . 18.  $\sin \frac{y}{x} + \ln x = C$ . 19.  $y = xe^{Cx}$ . 20.

$y = Ce^{-2x} + 2x - 1$ . 21.  $y = (x+C)e^{x^5}$ . 22.  $y = \frac{x}{\cos x}$ . 23.

$y = \left(2 \sin \frac{x}{2} + C\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . 24.  $y = \ln x + \frac{C}{x}$ . 25.  $y = \frac{1}{x \ln Cx}$ . 26.

$y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+C}$ . 27.  $y(\ln x + 1 + Cx) = 1$ . 28.  $4x^2 + y^2 = Ce^{-2x}$ . 29.

$y = x^4(\ln \sqrt{x} + C)^2$ . 30. в), е), к) – с разделяющимися переменными; а), ж), з) – однородные; б), г), и) – линейные; д) – Бернулли.

## §8.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Найдите общие решения или общие интегралы дифференциальных уравнений:

- |                                   |                                    |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1. $y'' = x + \sin x$ .           | 2. $y^{IV} = x$ .                  |
| 3. $xy'' + y' = 0$ .              | 4. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$ . |
| 5. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ . | 6. $x^2 y'' + xy' = 1$ .           |
| 7. $y'' = -\frac{1}{2y^3}$ .      | 8. $yy'' = y'^2$ .                 |
| 9. $yy'' = y^2 y' + y'^2$ .       | 10. $yy'' - y'(1 + y') = 0$ .      |

Найдите решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

11.  $y''y^3 = 1$ ;  $y=1, y'=1$  при  $x=0,5$ .
12.  $yy'' + y'^2 = 1$ ;  $y=1, y'=1$  при  $x=0$ .
13.  $y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x}y' = 2 + \ln x$ ;  $y=0,5, y'=1$  при  $x=1$ .
14.  $y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0$ ;  $y=2, y'=2$  при  $x=0$ .
15.  $xy'' + xy'^2 - y' = 0$ ;  $y=2, y'=1$  при  $x=2$ .

**Ответы.** 1.  $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1x + c_2$ .

2.  $y = \frac{x^5}{120} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$ . 3.  $y = C_1 + C_2 \ln|x|$ .

4.  $y = (1 + C_1^2) \ln|x + C_1| - C_1x + C_2$ . 5.  $y = (C_1x + C_1^2)e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C_2$ .

6.  $y = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C_1 \ln|x| + C_2$ . 7.  $1 + C_1y^2 = \left(C_2 + \frac{C_1x}{\sqrt{2}}\right)^2$ . 8.  $y = C_1e^{C_2x}$ .

9.  $x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_2$ . 10.  $y = C_1e^{C_2x} + \frac{1}{C_2}$ . 11.  $2y^2 - 4x^2 = 1$ .

12.  $y = x + 1$ . 13.  $y = \frac{x^2}{2}$ . 14.  $y = 2e^x$ . 15.  $y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}$ .

### §8.3. Линейные дифференциальные уравнения 2-го и высших порядков с постоянными коэффициентами

Найдите общие решения линейных однородных дифференциальных уравнений:

1.  $y'' - 16y = 0$ .
2.  $y'' + 3y' = 0$ .
3.  $y'' - 2y' - 3y = 0$ .
4.  $y'' + 4y' + 4y = 0$ .
5.  $y'' + 16y = 0$ .
6.  $y'' + 4y' + 20y = 0$ .
7.  $y'' - 8y' + 5y = 0$ .
8.  $y^{IV} + 4y'' = 0$ .
9.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ .
10.  $y^{VI} - 3y^{IV} - 4y'' = 0$ .

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

11.  $y'' + 3y' + 2y = 0$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ .
12.  $y'' + 4y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ .

Определите вид частных решений неоднородных дифференциальных уравнений:

13.  $y'' - 2y' = x^2 - 1$ .
14.  $y'' + y' = 3xe^x$ .
15.  $y'' + y' = 3xe^{-x}$ .
16.  $y'' + 4y = x^3 - 3$ .
17.  $y'' + 4y = \cos 2x$ .
18.  $y'' - 3y' - 4y' = x \sin x - 2 \cos x$ .
19.  $y'' - 6y' + 9y = -e^{3x}$ .
20.  $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$ .

Найдите общие решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

21.  $y'' - 4y' + 4y = x^2$ .
22.  $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ .
23.  $y'' - y = e^x$ .
24.  $y'' + y = \cos x$ .
25.  $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$ .
26.  $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$ .
27.  $y'' + y' = 5x + 2e^x$ .
28.  $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$ .
29.  $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^x$ .
30.  $y^{IV} + y''' = \cos 4x$ .

Найдите частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

31.  $y'' - y' = 2e^{-x}$ ;  $y(0) = y'(0) = 1$ .
32.  $y'' - 2y' = e^x - 1$ ;  $y(0) = y'(0) = 2$ .
33.  $y'' + 4y = \sin x$ ;  $y(0) = y'(0) = 1$ .
34.  $y''' + 2y'' + 2y' + y = x$ ;  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ .

- Ответы. 1.**  $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{4x}$ . 2.  $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$ .
3.  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ . 4.  $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x)$ . 5.  $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$ .
6.  $y = e^{2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ . 7.  $y = e^x \left( C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} \right)$ .
8.  $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$ . 9.  $y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$ .
10.  $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} + C_4 e^x + C_5 \cos x + C_6 \sin x$ . 11.  $y = e^{-x}$ .
12.  $y = \sin 2x$ . 13.  $(Ax^2 + Bx + C)$ . 14.  $(Ax + B)e^x$ . 15.  $(Ax + B)e^{-x}$ .
16.  $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ . 17.  $(A \cos 2x + B \sin 2x)$ .
18.  $(Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x$ . 19.  $Ae^{3x} x^2$ .
20.  $xe^x (Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x$ .
21.  $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}(x^2 + 4x + 3)$ . 22.  $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$ .
23.  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$ . 24.  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \sin x$ .
25.  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x \left( \frac{x}{10} - \frac{1}{25} \right) e^{2x}$ .
26.  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5} (\sin 2x + \cos 2x)$ .
27.  $y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x + \frac{5}{2}x^2 - 5x$ . 28.  $y = \left( C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{-x} + \frac{1}{4}e^x$ .
29.  $y = C_1 + C_2 x + \left( C_3 + C_4 x + \frac{x^2}{2} \right) e^x$ .
30.  $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + \frac{1}{1088} (\cos 4x - \sin 4x)$ . 31.  $y = e^x + x^2$ .
32.  $y = e^{2x} + e^x (-x)$ . 33.  $y = \cos 2x + \frac{1}{3} (\ln x + \sin 2x)$ .
34.  $y = e^{-x} + e^{\frac{-x}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + x - 2$ .

## Глава 9. РЯДЫ

### §9.1. Числовые ряды

Напишите простейшую формулу n-го члена ряда:

1.  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

2.  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

3.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$

4.  $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$

5.  $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots$

6.  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

По известному общему члену ряда  $a_n$  найдите 1-й, 4-й и 7-й члены ряда:

7.  $a_n = \frac{3 \cdot n - 2}{n^2 + 1}$

8.  $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}$

9.  $a_n = \frac{2 + (-1)^{n+1}}{n^2}$

Исследуйте сходимость рядов с положительными членами:

10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$

11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n-1}$

12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

17.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n}$

19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

20.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$

22.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

25.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

26.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3 - 1}$

27.  $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$

28.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1}$

29.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+3}\right)^n$

30.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Исследуйте сходимость знакопередающихся рядов. В случае сходимости исследуйте на абсолютную и условную сходимость.

31.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$     32.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$     33.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5}$   
 34.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+3}}$     35.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$     36.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$   
 37.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n^2+2}$     38.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$     39.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$   
 40.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3n^2+2}$     41.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$     42.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln(n+1)}$

**Ответы.** 1.  $\frac{1}{2n-1}$ . 2.  $\frac{1}{n^2}$ . 3.  $\frac{1}{2n}$ . 4.  $\frac{n+2}{n+1}$ . 5.  $\frac{n}{2^{n-1}}$ . 6.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ . 7.

$\frac{1}{2}$ ;  $\frac{10}{17}$ ;  $\frac{19}{50}$ . 8.  $-\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $-\frac{7}{128}$ . 9. 3;  $\frac{1}{16}$ ;  $\frac{3}{49}$ . 10. Сходится. 11. Расхо-

дится. 12. Расходится. 13. Расходится. 14. Сходится. 15. Расходится. 16. Сходится. 17. Расходится. 18. Сходится. 19. Расходится. 20. Сходится. 21. Сходится. 22. Расходится. 23. Сходится. 24. Сходится. 25. Сходится. 26. Сходится. 27. Расходится. 28. Расходится. 29. Расходится. 30. Сходится. 31. Сходится условно. 32. Сходится абсолютно. 33. Расходится. 34. Сходится условно. 35. Сходится абсолютно. 36. Сходится абсолютно. 37. Расходится. 38. Сходится условно. 39. Сходится абсолютно. 40. Расходится. 41. Сходится абсолютно. 42. Сходится условно.

## §9.2. Степенные ряды

Найдите интервалы сходимости степенных рядов, исследуйте сходимость на концах интервалов:

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ .    2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$ .    3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ .  
 4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 x^n$ .    5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .    6.  $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ .  
 7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ .    8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n5^n}$ .    9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n9^n}$ .

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^n}{n^2} \quad 11. \sum_{n=1}^{\infty} n^n (n+3)^n \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^n}{(n-1)2^n} \\ 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)n^2(n+1)} \quad 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+2)^n}{3^n} \quad 15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n-5)^n}{4^n}$$

Напишите разложения следующих функций в ряд Маклорена и найдите интервалы сходимости:

$$16. \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad 17. x^2 e^{-2x} \quad 18. \sin x^2 \\ 19. \frac{1}{1-x^2} \quad 20. \ln(-x^2) \quad 21. \ln \frac{1+3x}{1-3x} \\ 22. \sqrt{1+x^2} \quad 23. \sqrt[3]{27+x} \quad 24. \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислите с точностью до 0,001:

$$25. \sqrt[3]{10} \quad 26. \sin 18^\circ \quad 27. \int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx \quad 28. \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

29. Сколько нужно взять членов ряда  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$ , чтобы вычислить  $\ln 2$  с точностью до 0,01? До 0,001?

30. С какой точностью будет вычислено число  $\frac{\pi}{4}$ , если воспользоваться рядом  $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ , взяв сумму его первых пяти членов при  $x=1$ ?

**Ответы.** 1. (-1;1). 2. [-2;2). 3. (-1;1]. 4. (-1;1). 5.  $(-\infty; \infty)$ . 6.  $x = 0$ . 7. (-2;2). 8. [-2;8). 9. (-2;4). 10. [-4;-2]. 11.  $x = -3$ . 12. [0;4). 13. [-2;0]. 14.  $x = -2$ .

$$15. (1;9). 16. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, |x| < \infty. 17. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^{n+1}}{n!}, |x| < \infty.$$

$$18. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}, |x| < \infty. 19. \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, |x| < 1. 20. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}, |x| < 1.$$

$$21. 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2n+1} \cdot x^{2n+1}, |x| < \frac{1}{3}.$$

$$22. 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{(2n)!!} x^{2n}, |x| \leq 1.$$

**23.**  $3 + \frac{x}{27} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{3^{4n-1} n!} x^n, |x| \leq 27$ . **24.**  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)},$   
 $|x| \leq 2$ . **25.** 2,154. **26.** 0,309. **27.** 0,493. **28.** 0,747. **29.** 99; 999. **30.**  $|R| < \frac{1}{11}$ .

## Содержание

<b>Глава 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА</b> .....	3
§1.1. Определители .....	3
§1.2. Матрицы .....	4
§1.3. Системы линейных уравнений .....	7
<b>Глава 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА</b> .....	10
§2.1. Линейные операции над векторами.....	10
§2.2. Скалярное произведение векторов .....	11
§2.3. Векторное произведение векторов .....	11
§2.4. Смешанное произведение векторов .....	12
<b>Глава 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ</b> .....	13
§3.1. Прямая на плоскости .....	13
§3.2. Кривые второго порядка.....	14
§3.3. Прямая и плоскость в пространстве.....	16
<b>Глава 4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ</b> .....	19
§4.1. Предел функции.....	19
§4.2. Непрерывность функции .....	22
<b>Глава 5. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ</b> .....	24
§5.1. Дифференцирование функций .....	24
§5.2. Правило Лопиталья-Бернулли .....	27
§5.3. Исследование функций с помощью производных .....	28
<b>Глава 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ</b> .....	31
§6.1. Неопределенный интеграл.....	31
§6.2. Определённый интеграл и его приложения. Несобственные интегралы.....	36
<b>Глава 7. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ</b> .....	40
§7.1. Частные производные и полный дифференциал.....	40
§7.2. Экстремумы функций двух переменных.....	41
§7.3. Производная по направлению. Градиент.....	42
<b>Глава 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b> .....	44
§8.1. Дифференциальные уравнения I порядка .....	44
§8.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка .....	46
§8.3. Линейные дифференциальные уравнения 2-го и высших порядков с постоянными коэффициентами.....	47
<b>Глава 9. РЯДЫ</b> .....	49
§9.1. Числовые ряды .....	49
§9.2. Степенные ряды .....	50