

Федеральное агентство по образованию  
Владивостокский государственный университет  
экономики и сервиса

---

**Б.П. ОСТАНИН**

# **ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ**

Учебно-практическое пособие

Владивосток  
Издательство ВГУЭС  
2010

ББК 32.841  
О 76

**Останин, Б.П.**

О 76      **ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ** [Текст] : учебно-практическое пособие. – Владивосток : Изд-во ВГУЭС, 2010. – 148 с.

Учебно-практическое пособие по дисциплине «Основы теории цепей» составлено в соответствии с требованиями ГОС ВПО.

Для студентов по направлению подготовки 210300.52 «Радиотехника», специальностей 21030365 «Бытовая радиоэлектронная аппаратура», 21030565 «Средства радиоэлектронной борьбы».

ББК 32.841

Печатается по решению РИСО ВГУЭС

© Издательство Владивостокский  
государственный университет  
экономики и сервиса, 2010

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Буквенные обозначения выполнены согласно ГОСТ 1494-77. «Электротехника. Буквенные обозначения основных величин».

В частности: для изменяющихся во времени электрических величин – ЭДС, напряжения, заряда, тока, плотности тока, следует применять обозначения:  $a$  – мгновенное значение;  $A$  – действующее значение (для периодически изменяющихся величин);  $A_m$  – амплитуда (для гармонически изменяющихся величин). Здесь под  $a$ ,  $A$ ,  $A_m$  понимается любая из перечисленных выше изменяющихся величин.

Комплексные величины следует обозначать по типу:

$$\underline{A} = A' + jA'' = \operatorname{Re} \underline{A} + j \operatorname{Im} \underline{A} = A e^{j\alpha} = |\underline{A}| e^{j\alpha} = A \angle \alpha = |\underline{A}| \angle \alpha ,$$

где  $\underline{A}$  – любая из комплексных величин;  $A' = \operatorname{Re} \underline{A}$  – её действительная часть;  $A'' = \operatorname{Im} \underline{A}$  – её мнимая часть;  $A = |\underline{A}|$  – модуль и  $\alpha$  – аргумент комплексной величины.

Сопряжённая комплексная величина

$$\begin{aligned} \underline{A}^* &= A' - jA'' = \operatorname{Re} \underline{A} - j \operatorname{Im} \underline{A} = A e^{-j\alpha} = |\underline{A}| e^{-j\alpha} = \\ &= A \angle -\alpha = |\underline{A}| \angle -\alpha \end{aligned}$$

Для комплексной величины, каждая из составляющих которой имеет собственное буквенное обозначение, следует применять обозначения типа:

$$\underline{Z} = \operatorname{Re} \underline{Z} + j \operatorname{Im} \underline{Z} = R + jX ,$$

где  $\underline{Z}$  – комплексное сопротивление;  $R$  – активное (резистивное) сопротивление и  $X$  – реактивное сопротивление.

Допускается модули комплексных величин, не являющихся изображениями функций времени, обозначать строчными буквами.

Графические обозначения:

$\overrightarrow{\quad}$  – ток;  
 $\overrightarrow{\quad}$  – ЭДС, напряжение

## ВВЕДЕНИЕ

Учебно-практическое пособие содержит краткую теорию к каждой лабораторной работе, задания (по 40 вариантов) на лабораторные работы по основным темам дисциплины, методические указания к выполнению и примеры выполнения каждой лабораторно работы. Лабораторные работы выполняются экспериментально на стенде «Сигнал USB» и методом компьютерного моделирования с помощью пакета «*Electronics Workbench*». Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 210300.62 «Радиотехника» специальностей 210303.65 Бытовая радиоэлектронная аппаратура и 2130565 Средства радиоэлектронной борьбы.

# Лабораторная работа 1. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Цель работы – убедиться в выполнимости законов Кирхгофа в электрических цепях.

При подготовке к работе воспользуйтесь конспектом лекций, учебником (Л. 1. стр. 36...46; 224...229) и ниже расположенной теоретической частью работы.

Работа состоит из расчётной части и компьютерного моделирования исследуемой электрической цепи. Расчётная часть выполняется *при подготовке* к лабораторной работе. Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*».

## Краткие теоретические сведения

Элементы топологии электрической цепи: ветвь, узел, контур. Примеры элементов топологии электрической цепи можно показать на схеме, приведённой на рис. 1.1.

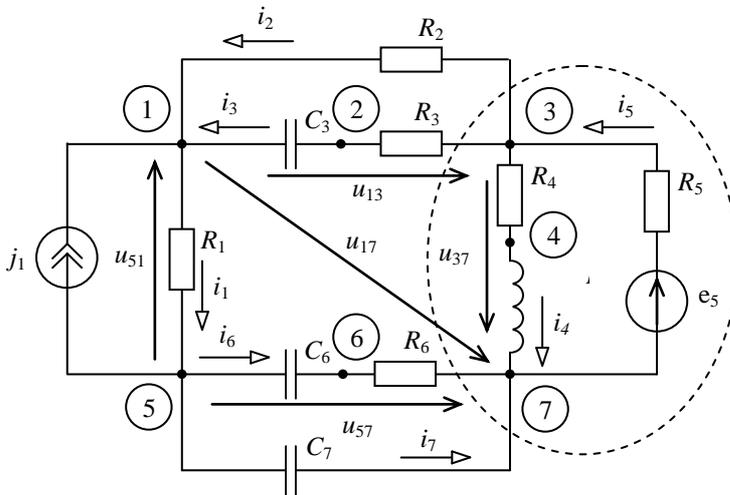


Рис. 1.1

*Ветвь* – участок электрической цепи с последовательным соединением элементов, расположенный между двумя узлами. Например: ветвью схемы, показанной на рис. 1.1, является резистор  $R_1$ , включённый между узлами 1 и 5. Ещё один пример ветви: резистор  $R_4$  и индуктивность  $L_4$ , включённые между узлами 3 и 7, и так далее.

*Узел* – место соединения ветвей. На схеме рис. 1.2 имеется узел (обозначены цифрами в кружках). Место соединения двух ветвей называют устранимым узлом (узлы 2, 4, 6 на схеме рис. 1.1).

*Контур* – любой замкнутый путь в электрической цепи, проходящий по ветвям цепи. Источники тока в этом случае заменяются эквивалентными источниками напряжения. Тогда схема рис. 1.1 приобретает вид, показанный на рис. 1.2 (источник тока  $j_1$  заменён расчётным источником задающего напряжения  $e_4$ ). Например, на схеме рис. 1.2 элементы  $R_1, C_3, R_3, R_4, L_4, R_6, C_6$  составляют собой контур. Ещё один пример контура:  $L_4, R_4, R_5, e_5$  и так далее. Всего на схеме рис. 1.2 можно выделить 11 контуров (показаны на рис. 1.3 жирными линиями).

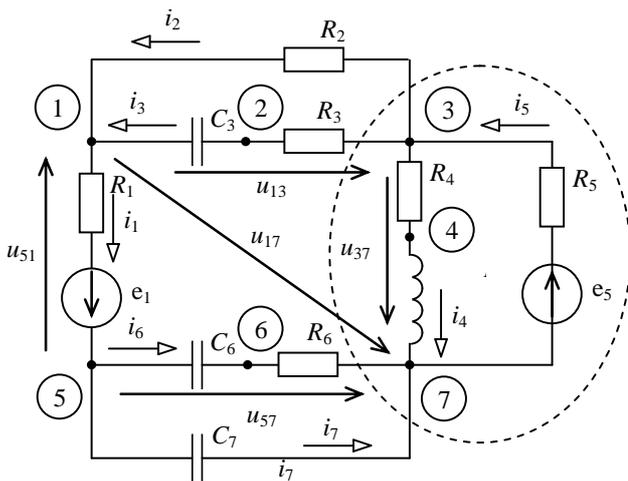


Рис. 1.2

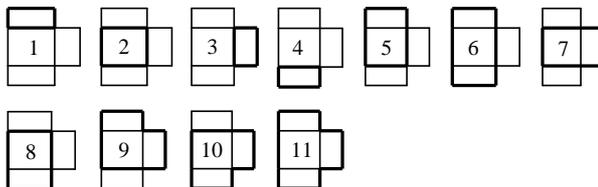


Рис. 1.3

*Независимый контур* – контур, содержащий хотя бы одну ветвь, не входящую в другие контуры. В схеме на рис. 1.2 можно выделить всего 4 независимых контура в различном сочетании. Например, контуры 1, 2, 3, 4, показанные на рис. 1.3, или контуры 1, 2, 7, 8, показанные там же, и так далее.

Законы Кирхгофа являются одними из основных в теории цепей.

*Первый закон Кирхгофа* – закон для токов формулируется по отношению к узлам электрической цепи и отражает тот факт, что в узлах не могут накапливаться заряды. Он гласит: *алгебраическая* сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле электрической цепи, равна нулю в каждый момент времени. Формально это записывается так:

$$\sum_k i_k = 0, \quad (1.1)$$

где  $k$  – число ветвей, сходящихся в узле.

Например, если за положительное направление тока принять направление к узлу, то для узла 3, показанного на рис. 1.1, уравнение по первому закону Кирхгофа будет выглядеть так

$$-i_2 - i_3 - i_4 + i_5 = 0.$$

Кроме того, есть понятие – обобщённый узел. Обобщённый узел представляет собой часть моделирующей цепи, охваченную произвольной замкнутой поверхностью. Пример обобщённого узла (обведён пунктиром) показан на рис. 1.1.

Для обобщённого узла тоже справедлив первый закон Кирхгофа, например для схемы рис. 1.1

$$-i_2 - i_3 + i_6 + i_7 = 0.$$

*Второй закон Кирхгофа* устанавливает связь между напряжениями ветвей, входящих в произвольный контур. Он гласит: *алгебраическая* сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделирующей цепи, в каждый момент времени равна нулю.

В соответствие со вторым законом Кирхгофа для каждого контура можно составить уравнение баланса напряжений

$$\sum_k u_k = 0, \quad (1.2)$$

где  $k$  – номера ветвей, входящих в рассматриваемый контур.

Например, для контура 2, показанного на рис. 1.3, если принять направление обхода контура по часовой стрелке, уравнение по второму закону Кирхгофа запишется следующим образом:

$$u_{13} + u_{37} - u_{57} + u_{51} = 0.$$

В качестве примера можно записать уравнение по второму закону Кирхгофа и для напряжений  $u_{13}$ ,  $u_{37}$ ,  $u_{17}$ :

$$u_{13} + u_{37} - u_{17} = 0.$$

### Задание

1. Рассчитайте для одной из нижеприведенных схем цепей постоянного тока (согласно Вашему варианту) все токи и напряжения методом Законов Кирхгофа.

2. Проверьте правильность решения методом баланса мощностей.

3. Используя пакет «*Electronics Workbench*», проверьте правильность решения задачи и справедливость законов Кирхгофа.

Варианты заданий даны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Вариант	Параметры источников			Параметры резисторов			Схема
	$E_1$ , В	$E_2$ , В	$E_3$ , В	$R_1$ , Ом	$R_2$ , Ом	$R_3$ , Ом	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	200	80		3	10	2	Рис. 1.4
2	240	90		4	9	4	Рис. 1.5
3	220	60		5	8	6	Рис. 1.6
4	230	100		6	7	8	Рис. 1.7
5	145		30	7	6	10	Рис. 1.8
6	150		40	8	5	4	Рис. 1.9
7	130		50	9	4	6	Рис. 1.10
8	150		40	10	3	8	Рис. 1.11
9		40	150	11	5	12	Рис. 1.12
10		70	190	12	8	10	Рис. 1.13
11		60	110	12	8	10	Рис. 1.14
12		50	115	11	5	12	Рис. 1.15
13		50	130	10	3	8	Рис. 1.12
14		60	180	9	4	6	Рис. 1.13
15		30	130	8	5	4	Рис. 1.14
16		40	140	7	6	10	Рис. 1.15
17	130	45		6	7	8	Рис. 1.4
18	140	50		5	8	6	Рис. 1.5
19	150	50		4	9	4	Рис. 1.6
20	140	60		3	10	2	Рис. 1.6
21	50		140	3	10	2	Рис. 1.8

1	2	3	4	5	6	7	8
22	90		170	4	9	4	Рис. 1.9
23	40		120	5	8	6	Рис. 1.10
24	30		110	6	7	8	Рис. 1.11
25	30		120	7	6	10	Рис. 1.8
26	40		110	8	5	4	Рис. 1.9
27	30		120	9	4	6	Рис. 1.10
28	40		130	10	3	8	Рис. 1.11
29		130	40	11	5	12	Рис. 1.12
30		140	50	12	8	10	Рис. 1.13
31		150	40	4	9	4	Рис. 1.14
32		140	60	5	8	6	Рис. 1.15
33	40	150		6	7	8	Рис. 1.4
34	70	190		7	6	10	Рис. 1.5
35	40	110		8	5	4	Рис. 1.6
36	50	115		9	4	6	Рис. 1.7
37	30		120	7	6	10	Рис. 1.8
38	60		110	8	5	4	Рис. 1.9
39	50		120	9	4	6	Рис. 1.10
40	40		130	10	3	8	Рис. 1.11

**Схемы к заданию**

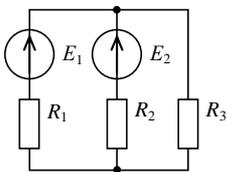


Рис. 1.4

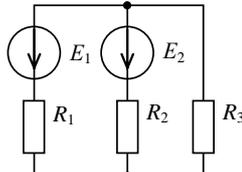


Рис. 1.5

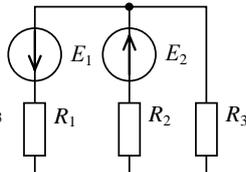


Рис. 1.6

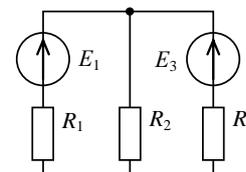
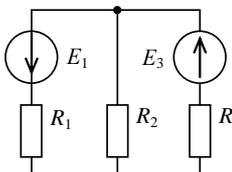
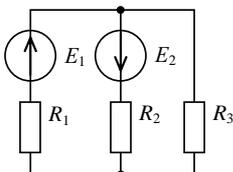


Рис. 1.7

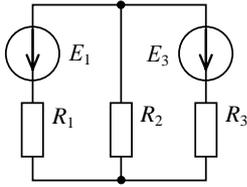


Рис. 1.10

Рис. 1.8

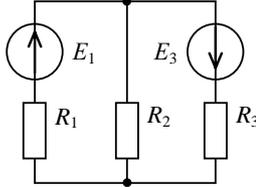


Рис. 1.11

Рис. 1.9

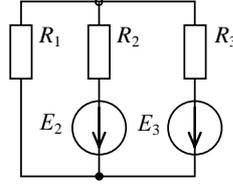


Рис. 1.12

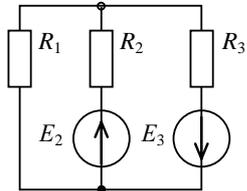


Рис. 1.13

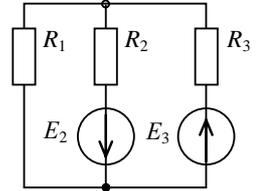


Рис. 1.14

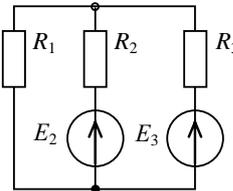


Рис. 1.15

### Пример выполнения задания

#### Расчётная часть

Пусть, согласно варианту, надо рассчитать токи и напряжения в цепи, схема которой приведена на рис. 16.

Пусть даны значения параметров элементов схемы:  $E_2 = 10 \text{ В}$ ;  $E_3 = 40 \text{ В}$ ;  $R_1 = 50 \text{ Ом}$ ;

$$R_2 = 8 \text{ Ом}; R_3 = 10 \text{ Ом}.$$

Проанализируем схему. Схема имеет 3 ветви и 2 неустраиваемых узла. На ней можно выделить 3 контура, но только 2 из них могут быть независимыми.

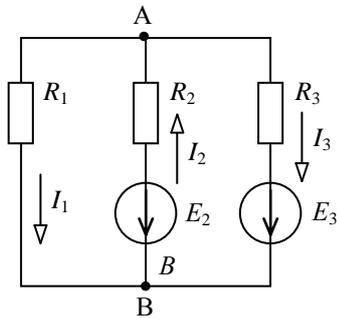


Рис. 1.16

*Ветви:* 1-я состоит из резистора  $R_1$ , 2-я состоит из резистора  $R_2$  и источника ЭДС  $E_2$ , 3-я состоит из резистора  $R_3$  и источника ЭДС  $E_3$ .

*Неустраиваемые узлы:* это точки  $A$  и  $B$  на схеме.

*Контуры:* 1-й образован резисторами  $R_1$ ,  $R_2$  и источником ЭДС  $E_2$ ,  
2-й образован резисторами  $R_2$ ,  $R_3$  и источниками ЭДС  $E_2$  и  $E_3$ ,  
3-й образован резисторами  $R_1$ ,  $R_3$  и источником ЭДС  $E_3$ .

Подведем итоги. В схеме всего 3 ветви. Значит, *всего надо записать* 3 уравнения по законам Кирхгофа. Из них по 1-му закону *только одно* (на одно меньше, чем количество неустранимых узлов). Недостающие 2 уравнения *запишем* по 2-му закону Кирхгофа для любых двух независимых контуров.

1. Запишем уравнение по 1-му закону Кирхгофа для узла *A* (можно было бы и для узла *B*). Поскольку мы не знаем истинных направлений токов в ветвях, зададимся произвольными направлениями токов, как показано на схеме рис. 1.16. Если в результате решения какой-либо ток получит знак минус, значит, мы при выборе направления этого тока ошиблись, и истинное направление этого тока будет обратно выбранному направлению.

2. Положительными будем считать токи, направленные к узлу.

3. Запишем по 1-му закону Кирхгофа уравнение для узла *A*:

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

4. Выберем для записи двух уравнений по 2-му закону Кирхгофа два независимых контура – левый и правый. Обход контуров осуществим по часовой стрелке.

$$E_2 = -R_1 I_1 - R_2 I_2,$$

$$-E_2 + E_3 = R_2 I_2 + R_3 I_3.$$

5. Получили систему 3-х уравнений:

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

$$E_2 = -R_1 I_1 - R_2 I_2,$$

$$-E_2 + E_3 = R_2 I_2 + R_3 I_3.$$

Подставляем значения ЭДС и сопротивлений и решаем систему:

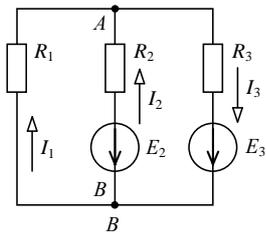
$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

$$10 = -5I_1 - 8I_2,$$

$$-10 + 40 = 8I_2 + 10I_3.$$

Решение дает значения токов:

$$I_1 = -2,47 \text{ A}, \quad I_2 = 0,294 \text{ A}, \quad I_3 = 2,76 \text{ A}.$$



Ток  $I_1$  получил в решении знак «минус». Это значит, что на самом деле он направлен так, как показано на рис. 1.17 (Сравните рис. 1.16 и 17). Одновременно отметим, что ток  $I_2$  направлен против ЭДС  $E_2$ . Это означает, что данный источник ЭДС потребляет энергию, например, это аккумулятор

Рис. 1.17. Реальные направления токов на подзарядке.

Проверяем, выполняется ли 1-й закон Кирхгофа (закон для токов) для узла  $A$ . Согласно реальным направлениям токов (рис. 1.17):

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Подставим полученные значения:

$$2,47 + 0,29 - 2,76 = 0.$$

Как видим, 1-й закон Кирхгофа для узла  $A$  выполняется.

6. Определим напряжения на резисторах

$$U_1 = R_1 I_1 = 5 \cdot 2,47 = 12,3 \quad - \text{ направлено от узла В к узлу А,}$$

$$U_2 = R_2 I_2 = 8 \cdot 0,29 = 2,35 \quad - \text{ направлено от узла В к узлу А,}$$

$$U_3 = R_3 \cdot I_3 = 10 \cdot 2,76 = 27,6 \quad - \text{ направлено от узла А к узлу В.}$$

Напряжение на резисторе  $R_1$  является одновременно и напряжением между узлами  $A$  и  $B$ .

Проверим, соблюдается ли 2-й закон Кирхгофа (закон для напряжений) для всех контуров схемы. Обходим все контуры по часовой стрелке. Тогда:

$$\text{для левого контура: } E_2 = U_1 - U_2; \quad 10 = 12,3 - 2,35; \quad 10 \approx 9,95;$$

$$\text{для правого контура: } -E_2 + E_3 = U_2 + U_3; \quad -10 + 40 = 2,35 + 27,6; \\ 30 \approx 29,95.$$

$$\text{для внешнего контура; } U_1 + U_3 = E_3; \quad 12,3 + 27,6 \approx 40; \quad 39,9 \approx 40$$

Из полученных результатов видно, что 2-й закон Кирхгофа в данной цепи выполняется для всех контуров. Небольшое расхождение в равенствах объясняется неточностью вычислений.

### Проверка балансом мощностей

Согласно уравнению баланса мощностей мощность источников равна мощности потребителей в каждый момент времени.

$$-E_2 I_2 + E_3 I_3 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2, \\ -10 \cdot 0,29 + 40 \cdot 2,76 = 5 \cdot 2,47^2 + 8 \cdot 0,29^2 + 10 \cdot 2,76^2, \\ 107,5 \text{ Вт} = 107,5 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей соблюдается. Отметим, что мощность источника ЭДС  $E_2$  записана со знаком «минус». Это потому, что ток в нем направлен против ЭДС, как, например, у аккумулятора на подзарядке.

## Компьютерное моделирование

Компьютерное моделирование выполняется с помощью пакета «*Electronics Workbench*».

1. Запустите программу EWB-512, соберите на экране монитора схему Вашего варианта и подключите амперметры.

2. Установите значения ЭДС и сопротивлений вашего варианта.

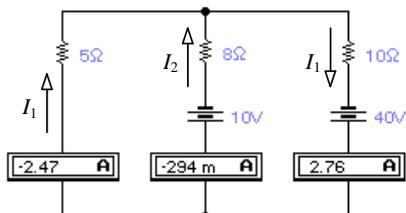


Рис. 1.18

3. Включите схему, скопируйте её в отчёт, в отчёте покажите стрелками направления токов. Сравните токи, показанные амперметрами, с токами, полученными при расчёте. Пример для рассчитанной выше схемы показан на рис. 1.18.

4. Соберите схему для измерения напряжений на резисторах.

5. Включите схему, скопируйте её в отчёт, в отчёте покажите стрелками направления напряжений, и сравните напряжения, показанные вольтметрами с напряжениями, полученными при расчёте. Пример для рассчитанной выше схемы показан на рис. 1.19.

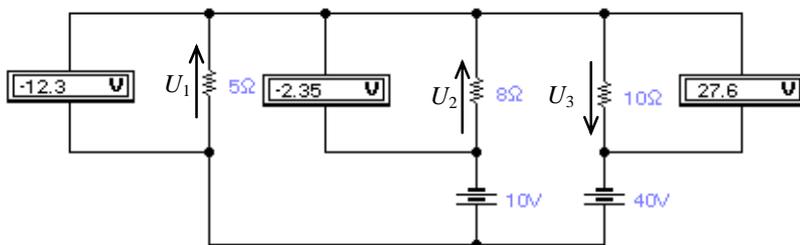


Рис. 1.19

6. По проделанной работе сделайте выводы.

### Контрольные вопросы

1. Перечислите основные топологические элементы электрических цепей. Поясните, что каждый из них собой представляет.

2. Назовите виды соединений в электрических цепях. Поясните, что каждый из них собой представляет.

3. Сформулируйте и поясните 1-й закон Кирхгофа.

4. Сформулируйте и поясните 2-й закон Кирхгофа.

5. Укажите сколько всего уравнений по законам Кирхгофа необходимо записать при анализе электрической цепи, если известны параметры всех источников и сопротивлений. Из них по 1-му закону? По 2-му закону?

6. Начертите произвольную электрическую схему и запишите для неё систему уравнений по законам Кирхгофа.

7. Поясните сущность баланса мощностей.

## Лабораторная работа 2. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ

Цель работы. Подтвердить опытным путем справедливость теоремы взаимности.

При подготовке к работе воспользуйтесь конспектом лекций, учебником (Л. 1. стр. 252...254) и ниже расположенной теоретической частью работы.

Работа состоит из расчётной части и компьютерного моделирования исследуемой электрической цепи.

Расчётная часть выполняется *при подготовке* к лабораторной работе. Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*».

### Краткие теоретические сведения

Теорему взаимности можно сформулировать двояко.

1. Для источника напряжения.
2. Для источника тока.

Формулировка для источника напряжения: ток в  $k$ -й ветви линейной пассивной электрической цепи, вызванный действием единственного независимого источника напряжения, помещенного в  $i$ -ю ветвь, равен току  $i$ -й ветви, вызванному действием того же источника напряжения перенесенного из  $i$ -й ветви в  $k$ -ю (рис 2.1 и 2.2).



Рис. 2.1

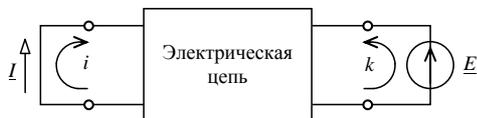


Рис. 2.2

Формулировка для источника тока: если независимый источник тока  $\underline{I}$ , подключенный к какой-либо паре зажимов линейной пассивной цепи, вызывает на другой паре зажимов напряжение  $\underline{U}$ , то этот же источник тока  $\underline{I}$ , подключенный ко второй паре зажимов, вызовет на первой паре зажимов то же напряжение  $\underline{U}$  (рис 2.3 и 2.4).



Рис. 2.3



Рис. 2.4

### Задание

Задание состоит из расчётной части и компьютерного моделирования. Расчётная часть выполняется *при подготовке* к работе. Компьютерное моделирование выполняется с помощью пакета «*Electronics Workbench*».

### Расчётная часть

1. Рассчитайте для Вашего варианта цепи постоянного тока (табл. 2.1) все токи ветвей методом свёртывания схемы.

Таблица 2.1

№	№ схемы	$E$ , В	$R_1$ , Ом	$R_2$ , Ом	$R_3$ , Ом	$R_4$ , Ом	$R_5$ , Ом
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.5	150	10	11	12	13	15
2	2.6	155	11	24	15	12	24
3	2.7	160	12	22	16	13	22
4	2.8	165	13	20	18	15	20
5	2.9	170	15	18	20	16	18
6	2.10	175	16	16	22	18	16
7	2.11	180	18	15	24	20	15

Окончание табл. 2.1

1	2	3	4	5	6	7	8
8	2.12	185	20	13	27	22	13
9	2.13	190	22	12	30	24	12
10	2.14	195	24	11	33	27	11
11	2.15	100	27	15	24	10	18
12	2.16	105	30	16	22	11	20
13	2.5	110	33	18	20	12	22
14	2.6	115	36	20	18	13	24
15	2.7	120	39	22	16	15	27
16	2.8	125	43	24	15	16	30
17	2.9	130	47	27	13	18	33
18	2.10	140	51	30	12	20	36
19	2.11	145	56	33	11	22	39
20	2.12	150	62	36	24	24	43
21	2.13	150	68	18	10	15	18
22	2.14	155	75	20	11	16	20
23	2.15	160	83	22	12	18	22
24	2.16	165	10	24	13	20	24
25	2.5	170	11	27	15	22	27
26	2.6	175	12	30	16	24	30
27	2.7	180	13	33	18	27	33
28	2.8	185	15	36	20	30	36
29	2.9	190	16	39	22	33	18
30	2.10	195	18	43	24	36	20
31	2.11	100	20	10	24	18	22
32	2.12	105	22	11	22	20	20
33	2.13	110	24	12	20	22	22
34	2.14	115	27	13	18	20	24
35	2.15	120	30	15	15	22	27
36	2.16	125	33	16	16	24	30
37	2.5	130	36	18	18	27	20
38	2.6	140	39	20	20	30	22
39	2.7	145	43	22	22	33	24
40	2.8	150	10	24	24	36	27

2. Занесите результаты в таблицу.

3. Проверьте правильность решения методом баланса мощностей

4. Перенесите источник в любую другую ветвь и рассчитайте все токи ветвей.

5. Занесите результаты в таблицу.

6. Проверьте выполнимость теоремы взаимности.

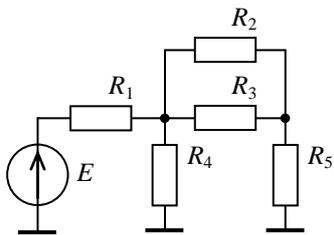


Рис. 2.5

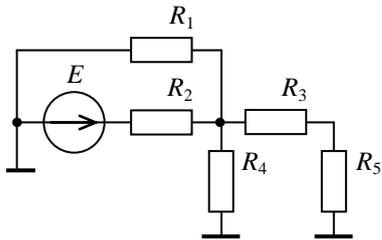


Рис. 2.6

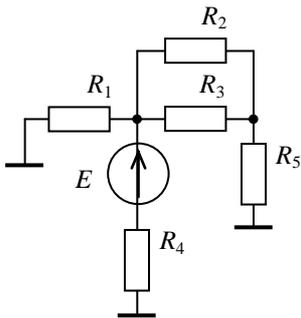


Рис. 2.7

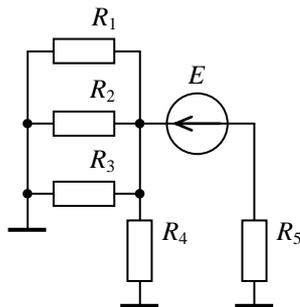


Рис. 2.8

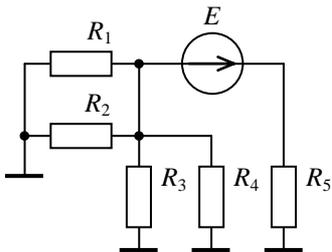


Рис. 2.9

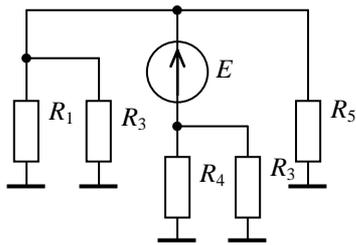


Рис. 2.10

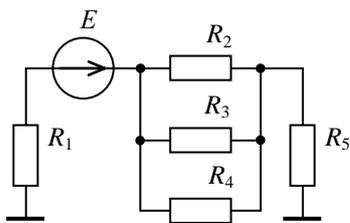


Рис. 2.11

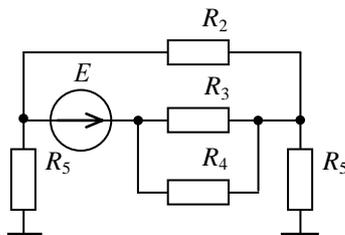


Рис. 2.12

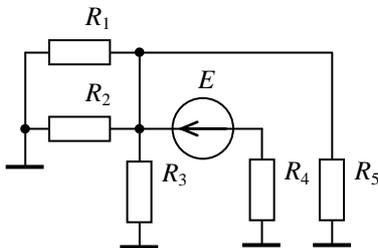


Рис. 2.13

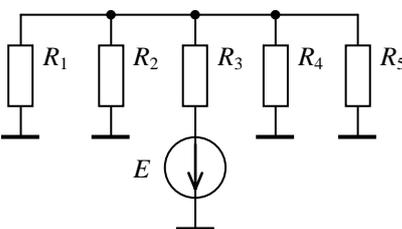


Рис. 2.14

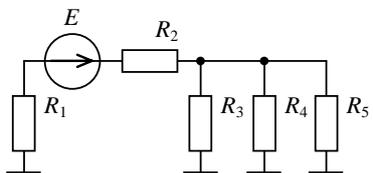


Рис. 2.15

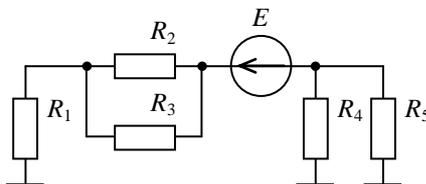


Рис. 2.16

### Компьютерное моделирование

1. Запустите программу EWB-512 и соберите на экране монитора схему Вашего варианта с источником ЭДС (табл. 2.1) и с необходимыми измерительными приборами.
2. Запустите схему и занесите показания приборов в ту же таблицу, что и расчётные значения, и сравните их с расчётными значениями.
3. Перенесите источник ЭДС в любую другую ветвь. Направление источника ЭДС должно совпадать с направлением тока, полученном в пункте 2.

4. Запустите схему и занесите показания приборов в ту же таблицу, что и расчётные значения для новой схемы, и сравните их с расчётными значениями.

5. Проверьте выполнимость теоремы взаимности.

6. Уберите из ветви источник ЭДС и подключите параллельно к ней источник тока.

7. Выберите любую ветвь в схеме и замерьте на ней напряжение.

8. Перенесите источник тока в выбранную ветвь. Ориентация источника тока должна быть такой, чтобы вызывать напряжение того же направления, что и в первом случае (полученное в пункте 7.)

9. Запустите схему и измерьте напряжение на ветви, к которой прежде был подключён источник тока.

10. Проверьте выполнимость теоремы взаимности.

### Пример выполнения задания

#### Расчётная часть

Пример поделим на две части:

1. Свёртывание схемы электрической цепи. В этой части находим эквивалентное (входное) сопротивление и входной ток цепи.

2. Развёртывание схемы и последовательное нахождение токов и напряжений на элементах схемы.

#### Часть 1. Свёртывание схемы

Пусть, например, дана схема электрической цепи, показанная на рис. 2.17.

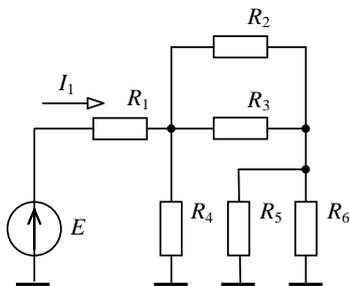


Рис. 2.17

Требуется, зная величины сопротивлений и ЭДС источника питания рассчитать токи во всех ветвях.

Пусть даны значения ЭДС и сопротивлений:  $E = 120$  В;  $R_1 = 13$  Ом;  $R_2 = 12$  Ом;  $R_3 = 15$  Ом;  $R_4 = 22$  Ом;  $R_5 = 36$  Ом;  $R_6 = 20$  Ом;

Свёртываем схему. Процесс свёртывания покажем очень подробно.

Сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  включены параллельно. Заменяем их эквивалентным сопротивлением  $R_7$ .

$$R_7 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{12 \cdot 15}{12 + 15} = 6,667 \text{ Ом.}$$

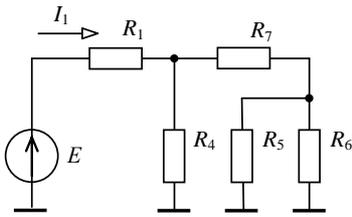


Рис. 2.18

Получилась схема, показанная на рис. 2.18.

Сопротивления  $R_5$  и  $R_6$  включены параллельно. Заменяем их эквивалентным сопротивлением  $R_8$ .

$$R_8 = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = \frac{36 \cdot 20}{36 + 20} = 12,86 \text{ Ом.}$$

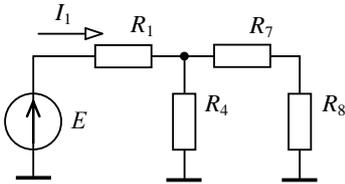


Рис. 2.19

Получилась схема, показанная на рис. 2.19.

Сопротивления  $R_7$  и  $R_8$  включены последовательно. Заменяем их эквивалентным сопротивлением  $R_9$ .

$$R_9 = R_7 + R_8 = 6,67 + 12,86 = 19,52 \text{ Ом.}$$

Получилась схема, показанная на рис. 2.20.

Сопротивления  $R_4$  и  $R_9$  включены параллельно. Заменяем их эквивалентным сопротивлением  $R_{10}$ .

$$R_{10} = \frac{R_4 R_9}{R_4 + R_9} = \frac{22 \cdot 19,52}{22 + 19,52} = 10,34 \text{ Ом.}$$

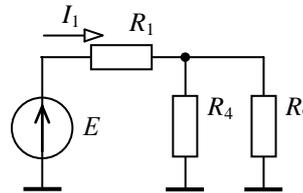


Рис. 2.20

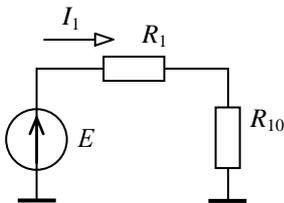


Рис. 2.21

Получилась схема, показанная на рис. 2.1.

Сопротивления  $R_1$  и  $R_{10}$  включены последовательно. Заменяем их эквивалентным сопротивлением  $R_{11}$ .

$$R_{11} = R_1 + R_{10} = 13 + 10,34 = 23,34 \text{ Ом.}$$

В результате получится схема, показанная на рис. 2.22.

Получившееся эквивалентное сопротивление  $R_{11}$  обычно называют входным сопротивлением электрической цепи.

Рассчитаем ток  $I_1$  (входной ток).

$$I_1 = \frac{E}{R_{11}} = \frac{120}{23,34} = 5,141 \text{ А.}$$

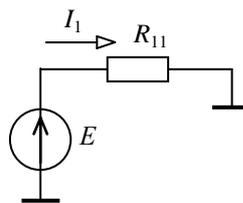


Рис. 2.22

## Часть 2. Развёртывание схемы

Постепенно развёртывая схему (идём в обратном порядке), находим токи в ветвях схемы.

От схемы рис. 2.22 вернёмся к схеме рис. 2.21 и найдём напряжение на сопротивлении  $R_{10}$

$$U_{10} = R_{10} I_1 = 10,34 \cdot 5,141 = 53,16 \text{ В.}$$

Перейдём к рис. 2.20. Поскольку напряжения на параллельно соединённых сопротивлениях  $R_4$  и  $R_9$  равны напряжению на сопротивлении  $R_{10}$ , найдём токи  $I_4$  и  $I_9$

$$I_4 = \frac{U_{10}}{R_4} = \frac{53,16}{22} = 2,416 \text{ А;}$$

$$I_9 = \frac{U_{10}}{R_9} = \frac{53,16}{19,52} = 2,723 \text{ А.}$$

*Промежуточная проверка* (старайтесь делать промежуточные проверки!). В сумме токи  $I_4$  и  $I_9$  должны быть равны току  $I_1$

$$I_1 = I_4 + I_9 = 2,416 + 2,723 = 5,139 \text{ А;}$$

$$5,141 \approx 5,139 .$$

Небольшая неточность в равенстве объясняется погрешностью вычислений.

Перейдём к схеме рис. 2.19. Через сопротивления  $R_7$  и  $R_8$  протекает ток  $I_9$ . Найдём напряжение  $U_8$

$$U_8 = R_8 I_9 = 12,86 \cdot 2,723 = 35,02 \text{ В.}$$

Перейдём к схеме рис. 2.18. Поскольку напряжения на параллельно соединённых сопротивлениях  $R_5$  и  $R_6$  равны напряжению  $U_8$ , найдём токи  $I_5$  и  $I_6$

$$I_5 = \frac{U_8}{R_5} = \frac{35,02}{36} = 0,9727 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{U_8}{R_6} = \frac{35,02}{20} = 1,751.$$

*Промежуточная проверка.* В сумме токи  $I_5$  и  $I_6$  должны равняться току  $I_9$

$$I_9 = I_5 + I_6 = 0,9727 + 1,751 = 2,723 \text{ А}.$$

Напряжение на сопротивлении  $R_7$

$$U_7 = R_7 I_9 = 6,667 \cdot 2,723 = 18,15 \text{ В}.$$

*Промежуточная проверка.* Сумма напряжений  $U_7$  и  $U_8$  должна равняться напряжению  $U_9$

$$U_{10} = U_7 + U_8 = 18,15 + 35,02 = 53,17 \text{ В}.$$

$$53,16 \approx 18,15 + 35,02 = 53,17$$

Небольшая неточность в равенстве объясняется погрешностью вычислений.

Перейдём к схеме рис. 2.17. Сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  соединены параллельно, следовательно, токи  $I_2$  и  $I_3$  будут соответственно равны

$$I_2 = \frac{U_7}{R_2} = \frac{18,15}{12} = 1,513 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_7}{R_3} = \frac{18,15}{15} = 1,210 \text{ А}.$$

*Промежуточная проверка.* В сумме токи  $I_2$  и  $I_3$  должны равняться току  $I_9$

$$I_9 = I_2 + I_3 = 1,513 + 1,210 = 2,723 \text{ А}.$$

Результаты анализа вышеприведённой электрической схемы сведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Токи	$I_1, \text{ А}$	$I_2, \text{ А}$	$I_3, \text{ А}$	$I_4, \text{ А}$	$I_5, \text{ А}$	$I_6, \text{ А}$
Расчётные значения	5,141	1,513	1,210	2,416	0,9727	1,751
Показанные ЕWB-512	5,140	1,513	1,210	2,417	0,9726	1,751

Составим баланс мощности

$$E \cdot I_1 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2,$$

$$120 \cdot 5,141 = 13 \cdot 5,141^2 + 12 \cdot 1,513^2 + 15 \cdot 1,21^2 + 22 \cdot 2,416^2 +$$

$$+ 36 \cdot 0,9727^2 + 20 \cdot 1,751^2,$$

$$616,9 \approx 615,8.$$

Баланс мощностей выполняется, следовательно, расчёт выполнен верно. В равенстве имеется небольшая неточность, что объясняется погрешностью вычислений.

Аналогично рассчитаны и занесены в табл. 2.3 токи ветвей для источника, перенесённого во вторую ветвь.

Таблица 2.3

Токи	$I_1, A$	$I_2, A$	$I_3, A$	$I_4, A$	$I_5, A$	$I_6, A$
Расчётные значения	1,513	5,781	3,373	0,894	0,8594	1,547
Показанные EWB-512	1,513	5,781	3,374	0,894	0,8597	1,547

### Компьютерное моделирование

1. Собрать на экране монитора схему Вашего варианта, включив в схему необходимые измерительные приборы.

2. Включить схему и проверить совпадение значений токов и напряжений, полученных в расчётной части, с значениями, полученными с помощью программы EWB 5.12. (рис. 2.23)

3. Перенести источник ЭДС в ту же ветвь схемы, что и в расчётной части и проверить выполнимость теоремы взаимности (рис. 2.24).

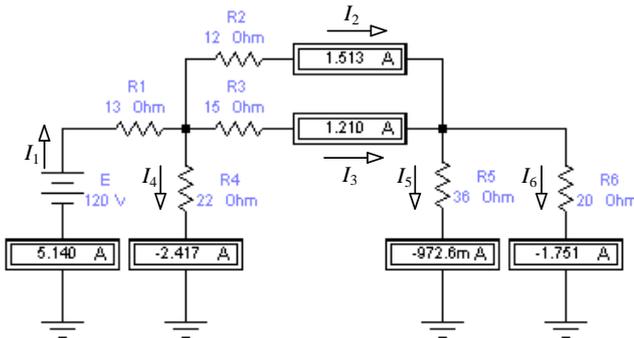


Рис. 2.23. Источник ЭДС включён в 1-ю ветвь

Рассчитанные значения хорошо совпали с показанными программой «*Electronics Workbench*» значениями. Показанные значения также занесены в табл. 2.2. Направления токов показаны стрелками.

Проверяем выполнимость теоремы взаимности. Для этого переносим источник ЭДС любую ветвь, например во вторую (рис. 2.24). Направление ЭДС должно совпадать с направлением тока, которое было в исходной схеме. Измеренные значения заносим в табл. 2.3.

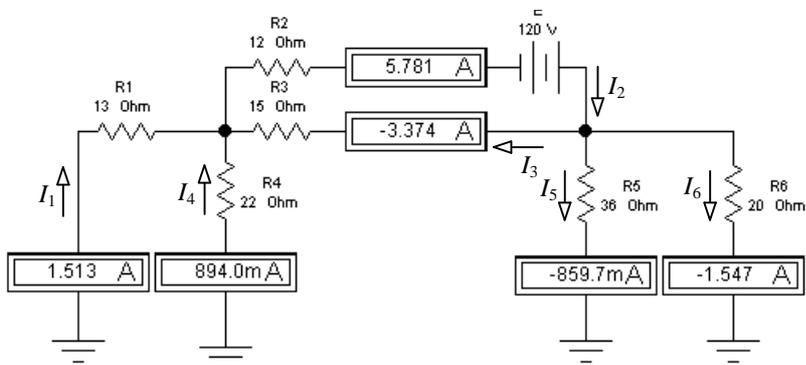


Рис. 2.24. Источник ЭДС включён во вторую ветвь

Теорема взаимности выполняется. Ток в первой ветви в точности равен току во второй ветви, который был в исходной схеме (1,513 А).

Проверим выполнимость теоремы взаимности для источника тока. Уберём источник ЭДС из первой ветви, подключим параллельно ей источник тока и измерим напряжение на любой выбранной ветви, например на шестой (рис. 2.25).

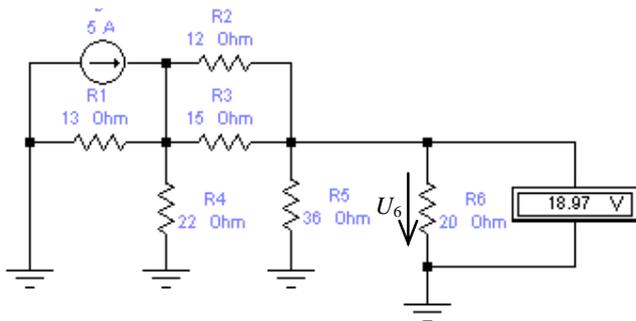


Рис. 2.25. Источник тока подключён параллельно первой ветви

Отключим источник тока от второй ветви и включим его параллельно шестой ветви так, чтобы сохранилось первоначальное направление напряжения. Измерим напряжение на первой ветви (рис. 2.26).

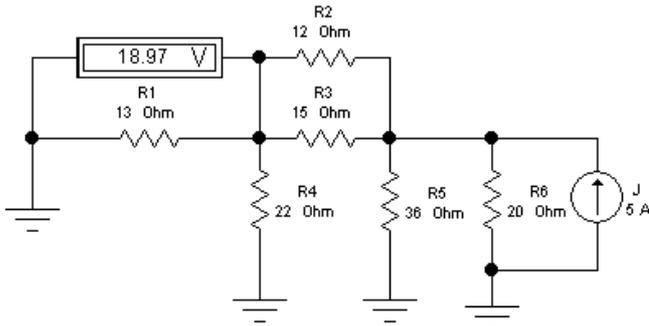


Рис. 2.26. Источник тока подключён параллельно 6-й ветви

Напряжение на шестой ветви в первом опыте (18,97 В) в точности равно напряжению на второй ветви (18,97 В) после перемещения источника тока. Следовательно, теорема взаимности выполняется и для источника тока.

### Контрольные вопросы

1. Укажите, для каких цепей справедлива теорема взаимности.
2. Сформулируйте теорему взаимности для цепи с источником напряжения.
3. Сформулируйте теорему взаимности для цепи с источником тока.

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ 3 И 4

### Гармонические функции (напряжение, ток, ЭДС)

Три способа отображения величин, изменяющихся гармонически

1. Аналитический (формулой);
2. Графический (графиком во времени);
3. Вращающимся в плоскости радиус-вектором.

Рассмотрим все три способа на примере синусоидально изменяющегося напряжения.

#### Аналитический способ (формулой)

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_U). \quad (\text{п.1})$$

Исключительно важно знать и понимать, что означают величины  $u$ ,  $U_m$ ,  $\omega$ ,  $f$ ,  $T$ ,  $\psi_U$ !!!

$u$  – мгновенное значение напряжения в вольтах (значение в данный момент времени  $t$ );

$U_m$  – амплитудное значение напряжения в вольтах;

$\omega = 2\pi f$  – круговая (угловая) частота, измеряется в рад/с (радиан деленный на секунду) или проща  $\text{с}^{-1}$ ;

$f$  – частота в герцах (Гц),  $f = \frac{1}{T}$ ;

$T$  – период колебаний. Одному периоду колебаний соответствует угол  $2\pi$  радиан или  $360^\circ$ ;

$t$  – время в секундах;

$\omega t$  – это произведение измеряется в угловых единицах (в радианах или в градусах);

$\psi_U$  – начальная фаза напряжения. Измеряется в радианах или в градусах ( $1 \text{ рад} = 57,32^\circ$ ).

#### Графический способ

На рис. п.1 показано синусоидально изменяющееся напряжение с амплитудой  $U_m$  начальной фазой  $\psi_U$ .

Сравните аналитический и графический способы отображения синусоидальной величины.

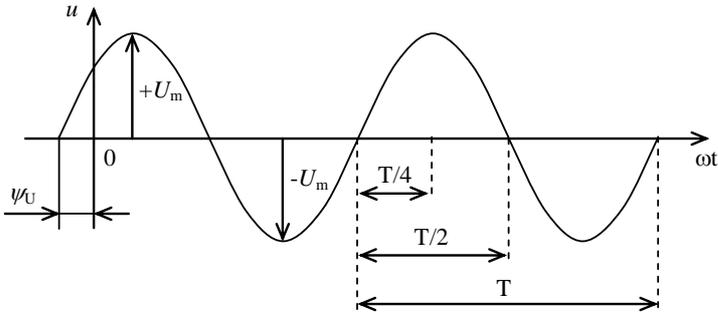


Рис. п.1. График гармонической (синусоидальной) величины (напряжения)

**Изображение синусоидально изменяющегося напряжения вращающимся в плоскости радиус-вектором**

На рис. п.2 показано отображение вращающимся радиус вектором синусоидально изменяющегося напряжения с начальной фазой  $\psi_U$ .

Вращающийся против часовой стрелки с угловой частотой  $\omega$  радиус-вектор длиной  $U_m$ , описывает окружность (показана пунктиром), которой соответствует синусоида, показанная справа. Начало отсчёта в данном случае ведётся от положения радиус-вектора повернутого на угол  $\psi_U$  (начальная фаза) от горизонтальной (вещественной) оси, обозначенной как  $-1$  и  $+1$ . Вертикальная (мнимая) ось обозначена как  $-j$  и  $+j$ .

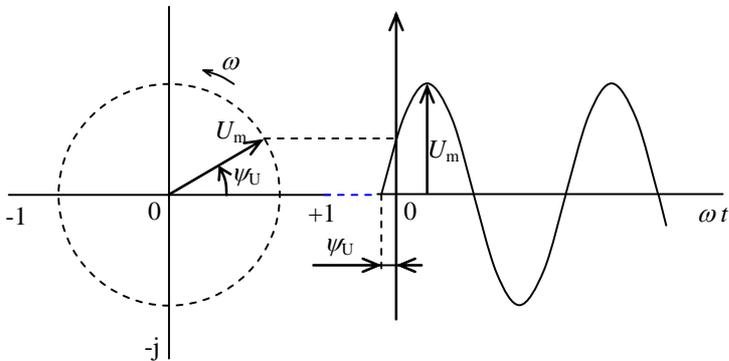


Рис. п.2. Синусоида напряжения с амплитудой  $U_m$  и начальной фазой  $\psi_U$ , показанная вращающимся в комплексной плоскости радиус-вектором  $U_m$  (слева) и графиком (справа)

Сравните все три способа отображения синусоидально изменяющейся величины. Обязательно найдите соответствие их друг другу.

### Сдвиг фаз

На рис. п.3 показаны гармонические напряжение и ток, сдвинутые по фазе на угол  $\varphi$ . Оба вектора изображающие напряжение и ток вращаются с одинаковой частотой  $\omega$  и, следовательно, неподвижны друг относительно друга. Угол между векторами является углом сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током. Угол сдвига фаз  $\varphi$  отображён и на правой части рисунка там, где изображены синусоиды напряжения и тока. Угол  $\varphi$  всегда отсчитывается от тока. Если он отсчитывается против часовой стрелки, то считается положительным, как на рис. 2.3.

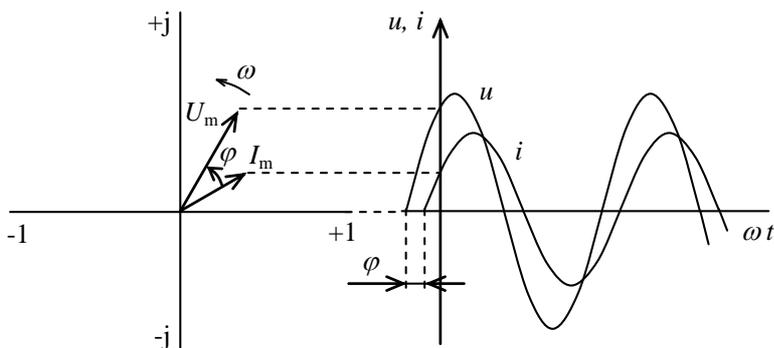


Рис. п.3. Синусоиды напряжения и тока, сдвинутые на угол  $\varphi$

### Комплексные изображения гармонических функций времени

Метод комплексных амплитуд основан на идее функционального преобразования, при котором операции над исходными функциями (*оригиналами*) заменяются более простыми операциями над некоторыми новыми функциями, так называемыми изображениями или символами. Методы такого типа называют символическими.

Символический метод комплексных амплитуд (часто просто *комплексный метод* или *символический метод*) основан на представлении гармонических функций времени с помощью комплексных чисел или, точнее, на преобразовании исходных функций из временной области (области вещественного переменного  $t$ ) в частотную область (область

мнимого аргумента  $j\omega$ ). Рассмотрим вышесказанное на примере гармонического напряжения

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_U).$$

Каждой гармонической функции времени (в данном примере напряжению  $u(t)$ ) можно поставить в соответствие комплексное число (в данном примере  $\underline{u}$ ), называемое мгновенным или текущим комплексом гармонической функции:

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi_U)} = U_m \cos(\omega t + \psi_U) + jU_m \sin(\omega t + \psi_U), \quad (\text{п.2})$$

где  $U_m$  – модуль мгновенного комплекса (равен амплитуде гармонической функции),

$(\omega t + \psi_U)$  – аргумент мгновенного комплекса (равен фазе гармонической функции),

$\omega = 2\pi f$  – угловая частота.

Можно преобразовать мгновенный комплекс к виду

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}, \quad (\text{п.3})$$

где  $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$  – комплексная амплитуда гармонической функции,

$U_m$  – модуль комплексной амплитуды,

$\psi_u$  – аргумент комплексной амплитуды,

$e^{j\omega t}$  – оператор вращения.

Оператор вращения имеет единичную длину и вращается в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой частотой  $\omega$ . Всякий неподвижный вектор, будучи умноженным на оператор вращения  $e^{j\omega t}$ , начинает вращаться в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой частотой  $\omega$ . Оператор вращения является общим для мгновенных комплексов токов и напряжений всех ветвей и не несёт информации о токах и напряжениях конкретных ветвей.

Токи и напряжения отдельных ветвей отличаются только амплитудами и начальными фазами, следовательно, информация о них при известной частоте  $\omega$  содержится в их комплексных амплитудах. Таким образом, зная амплитуды и начальные фазы токов и напряжений любой ветви, всегда можно однозначно найти их комплексные амплитуды и, обратно, по известной комплексной амплитуде можно однозначно установить амплитуду и начальную фазу исходного гармонического колебания.

Все правила, устанавливающие соответствие между операциями над гармоническими функциями времени и операциями над их комплексными амплитудами, справедливы и для операций над комплексными действующими значениями гармонических функций. Величины

$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  и  $\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$  обычно называют комплексным током и комплексным напряжением. В дальнейшем будем оперировать в основном комплексными действующими значениями.

### **Схема применения символического метода (метода комплексных чисел)**

1. Заменить схему для мгновенных значений комплексной схемой замещения.
2. Заменить мгновенные напряжения и токи их комплексными изображениями.
3. Составить уравнения электрического равновесия цепи для комплексных изображений напряжений и токов, используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.
4. Решить систему относительно комплексных изображений напряжений и токов.
5. Перейти от комплексных изображений напряжений и токов к их оригиналам (перейти в область вещественного переменного  $t$ ).

### **Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме**

#### **Закон Ома**

Закон Ома в комплексной форме устанавливает связь между комплексными изображениями напряжения, тока и комплексного сопротивления:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}, \quad \underline{U}_m = \underline{Z} \cdot \underline{I}_m, \quad (\text{п.4})$$

где  $\underline{Z}$  – комплексное сопротивление.

#### **Первый закон Кирхгофа**

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме устанавливает связь между комплексными изображениями токов в каждом из узлов моделирующей цепи: сумма комплексных действующих значений (комплексных амплитуд) токов всех ветвей, подключённых к каждому из узлов электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_k \underline{I}_k = 0; \quad \sum_k \underline{I}_{mk} = 0, \quad (\text{п.5})$$

где  $k$  – номер ветви подключённой к данному узлу.

#### **Второй закон Кирхгофа**

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме определяет связь между комплексными изображениями ветвей, входящих в произволь-

ный контур электрической цепи: сумма комплексных действующих значений (комплексных амплитуд) напряжений всех ветвей, входящих в любой контур цепи, равна нулю:

$$\sum_j \underline{U}_j = 0; \sum_j \underline{U}_{mj} = 0, \quad (\text{п.6})$$

где  $j$  – номер ветви, входящей в рассматриваемый контур.

Можно использовать и другую формулировку второго закона Кирхгофа в комплексной форме: сумма комплексных изображений напряжений на всех пассивных элементах любого контура цепи равна сумме комплексных изображений ЭДС, всех входящих в данный контур источников напряжения:

$$\sum_j \underline{E}_j = \sum_k \underline{U}_k; \sum_j \underline{E}_{mj} = \sum_k \underline{U}_{mk}, \quad (\text{п.7})$$

где  $j$  – номер источника напряжения, входящего в рассматриваемый контур,

$k$  – номер пассивного элемента, входящего в рассматриваемый контур.

### Элементы R, L, C при гармоническом воздействии. Резистивный элемент R

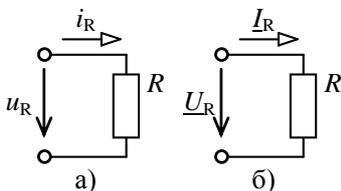


Рис. п.4. Схемы с резистивным элементом для мгновенных значений напряжения и тока а) и для комплексных значений б)

Резистивный элемент  $R$ , безвозвратно потребляет электрическую энергию, превращая её в другие виды. Напряжение и ток резистивного элемента совпадают по фазе (рис. п.4). Величина сопротивления идеализированного резистивного элемента не зависит от частоты. Формула, связывающая напряжение и ток – закон Ома. Закон Ома в резистивной цепи соблюдается как для мгновенных значений напряжения и тока, так и для комплексных значений:

$$u_R = R \cdot i_R, \quad (\text{п.8})$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R. \quad (\text{п.9})$$

Пусть напряжение, приложенное к резистивному элементу

$$u_R = U_{Rm} (\sin \omega t + \psi_{uR}). \quad (\text{п.10})$$

Тогда ток через резистивный элемент

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{U_{Rm}}{R} \sin(\omega t + \psi_{uR}) = I_{Rm} \sin(\omega t + \psi_{iR}),$$

$$i_R = I_{Rm} \sin(\omega t + \psi_{iR}), \quad (\text{п.11})$$

где  $\frac{U_{Rm}}{R} = I_{Rm}$ ;

$\psi_{uR} = \psi_{iR}$  и, следовательно, сдвиг фаз между напряжением и током равен нулю

$$\varphi = \psi_{uR} - \psi_{iR} = 0. \quad (\text{п.12})$$

Напряжение  $u_R$  и ток  $i_R$  совпадают по фазе (изменяются синфазно).

Векторное и графическое изображение напряжения и тока в резистивном элементе показаны на рис. п. 5.

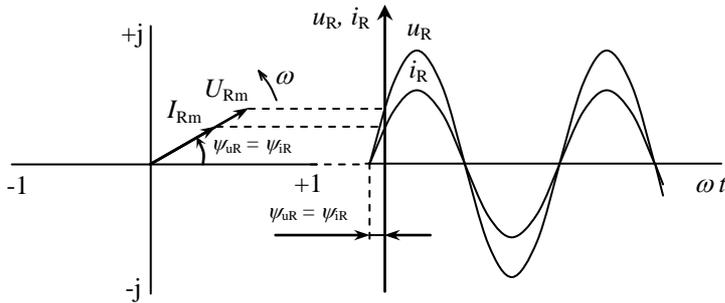


Рис. п. 5. Изображение тока и напряжения на сопротивлении  $R$  вращающимися радиус-векторами (слева) и графиком (справа)

Действующие значения напряжения и тока резистивного элемента в комплексной форме записи:

$\underline{U}_R = U_R e^{j\psi_{uR}} = U_R \angle \psi_{uR}$  – комплексное действующее значение напряжения на сопротивлении  $R$ ;

$\underline{I}_R = I_R e^{j\psi_{iR}} = I_R \angle \psi_{iR}$  – комплексное действующее значение тока в сопротивлении  $R$ ;

$e^{j\psi} = \angle \psi$  – обозначает поворот вектора на угол  $\psi$ ;

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R. \quad (\text{п.13})$$

## Индуктивный элемент L

Индуктивный элемент  $L$ , электрическую энергию, в отличие от резистивного элемента, безвозвратно не потребляет. Он обменивается энергией с электрической цепью. Напряжение на индуктивном элементе опережает ток в индуктивном элементе на  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ) (рис. 3.7). Величина индуктивного сопротивления прямо пропорциональна частоте.

Формула, связывающая напряжение и ток

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (\text{п.14})$$

Как видим, закон Ома в индуктивной цепи для мгновенных значений напряжения и тока не соблюдается. Закон Ома в индуктивной цепи соблюдается для комплексных значений напряжения и тока.

$$\underline{U}_L = jX_L \underline{I}_L = X_L \angle 90^\circ \cdot \underline{I}_L. \quad (\text{п.15})$$

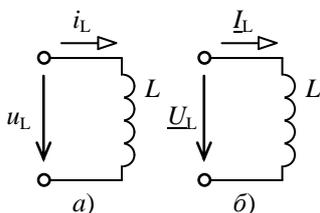


Рис. п. 6. Схемы с индуктивным элементом для мгновенных значений напряжения и тока а) и для комплексных значений б)

Пусть ток в индуктивном элементе

$$i_L = I_{Lm} (\sin \omega t + \psi_{iL}). \quad (\text{п.16})$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di_L}{dt} = L \frac{dI_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{iL})}{dt} = \omega L I_{Lm} \cos(\omega t + \psi_{iL}) = \\ &= X_L I_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{iL} + \frac{\pi}{2}) = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{uL}); \\ u_L &= X_L I_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{iL} + \frac{\pi}{2}) = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{iL} + \frac{\pi}{2}), \\ u_L &= U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{uL}), \end{aligned} \quad (\text{п.17})$$

где  $U_{Lm} = X_L I_{Lm}$  – амплитуда напряжения на индуктивном сопротивлении;

$X_L = \omega L = 2\pi f L$  – индуктивное сопротивление,

$\psi_{uL} = \psi_{iL} + \frac{\pi}{2}$  – начальная фаза напряжения на индуктивности.

сти.

Из (п. 17) видно:

1. Что индуктивное сопротивление линейно зависит от частоты. Чем больше частота, тем больше сопротивление.
2. Напряжение на индуктивности по фазе опережает на  $\pi/2$  (на  $90^\circ$ ) ток в индуктивности. Можно это же самое сказать иначе: ток в индуктивности по фазе отстает от напряжения на  $\pi/2$  (на  $90^\circ$ ).

Векторная диаграмма и графики напряжения и тока на индуктивности показаны на рис. п.7.

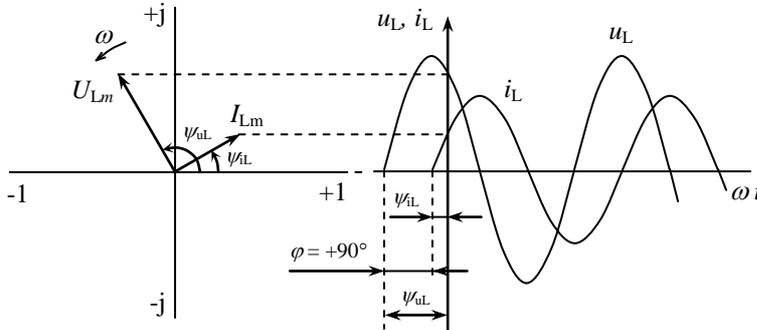


Рис. п.7. Изображение тока и напряжения на индуктивности  $L$  вращающимися радиус-векторами (слева) и графиком (справа)

Действующие значения напряжения и тока индуктивного элемента в комплексной форме записи:

$$\underline{U}_L = U_L e^{j\psi_{uL}} = U_L \angle \psi_{uL} \text{ – комплексное напряжение на индуктивности } L;$$

$$\underline{I}_L = I_L e^{j\psi_{iL}} = I_L \angle \psi_{iL} \text{ – комплексное значение тока в индуктивности } L;$$

$$\underline{U}_L = jX_L \cdot \underline{I}_L = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{I}_L = X_L \angle \frac{\pi}{2} \cdot \underline{I}_L = X_L \angle 90^\circ \cdot \underline{I}_L. \quad (\text{п.18})$$

### Ёмкостный элемент

Ёмкостный элемент  $C$ , электрическую энергию так же как и индуктивный, безвозвратно не потребляет. Он обменивается энергией с электрической цепью. Напряжение на ёмкостном элементе отстает от тока в ёмкостном элементе на  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ) (рис. п.8). Величина ёмкостного сопротивления обратно пропорциональна частоте.

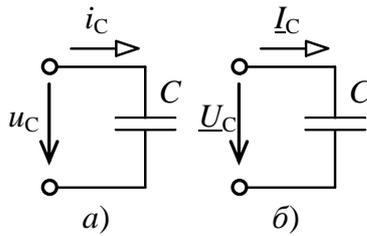


Рис. п.8. Схемы с ёмкостным элементом для мгновенных значений напряжения и тока а) и схема для комплексных значений б)

Формула, связывающая напряжение и ток в ёмкостном элементе

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (\text{п.19})$$

Как видим, закон Ома в ёмкостной цепи для мгновенных значений напряжения и тока не соблюдается. Закон Ома в ёмкостной цепи соблюдается для комплексных значений напряжения и тока.

$$\underline{U}_C = -jX_C \underline{I}_C = X_C \angle -\frac{\pi}{2} \cdot \underline{I}_C. \quad (\text{п.20})$$

Пусть напряжение на ёмкостном элементе

$$u_C = U_{Cm} (\sin \omega t + \psi_{UC}). \quad (\text{п.21})$$

Тогда

$$\begin{aligned} i_C &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{dU_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{UC})}{dt} = \omega C U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_{UC}) = \\ &= \omega C U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{UC} + \frac{\pi}{2}) = I_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{IC}); \\ i_C &= I_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{IC}), \end{aligned} \quad (\text{п.22})$$

где  $I_{Cm} = \omega C U_{Cm}$  – амплитуда тока в ёмкости;

$\psi_{IC} = \psi_{UC} + \frac{\pi}{2}$  – начальная фаза тока в емкости.

Амплитуда напряжения на ёмкости

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} I_{Cm} = X_C I_{Cm}, \quad (\text{п.23})$$

где  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$  – емкостное сопротивление.

Из полученных выражений видно:

1. Что емкостное сопротивление зависит от частоты (обратно пропорционально частоте). Чем больше частота, тем меньше сопротивление.

2. Ток в емкости по фазе опережает на  $\pi/2$  (на  $90^\circ$ ) напряжение на емкости. Можно это же самое сказать иначе: напряжение на емкости по фазе отстает от тока в емкости на  $\pi/2$  (на  $90^\circ$ ).

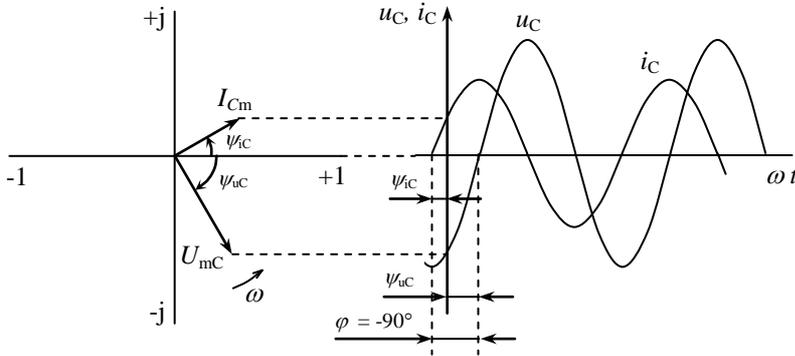


Рис. п.9. Изображение тока и напряжения на ёмкости  $C$  вращающимися радиус-векторами (слева) и графиком (справа)

Действующие значения напряжения и тока ёмкостного элемента в комплексной форме записи:

$$\underline{U}_C = U_C e^{j\psi_{u_C}} = U_C \angle \psi_{u_C} \text{ – комплексное напряжение на ёмкости } C;$$

$$\underline{I}_C = I_C e^{j\psi_{i_C}} = I_C \angle \psi_{i_C} \text{ – комплексное значение тока в ёмкости } C;$$

## Лабораторная работа 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ RC

Цель работы – исследовать процессы в последовательной цепи RC и отобразить её состояние помощью векторных диаграмм.

При подготовке к работе воспользуйтесь конспектом лекций, учебником (Л. 1. стр. 16...22; 99...100) и ниже расположенной теоретической частью работы.

Работа состоит из расчётной, экспериментальной частей и компьютерного моделирования исследуемой электрической цепи.

Расчётная часть выполняется *при подготовке* к лабораторной работе. Экспериментальная часть выполняется на стенде «Сигнал USB». Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*».

### Краткие теоретические сведения

Схема идеализированной цепи RC для мгновенных значений напряжений и тока показана на рис. 3.1.

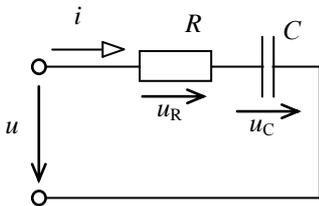


Рис. 3.1. Схема цепи RC

Пусть входное напряжение, приложенное к цепи, изменяется по гармоническому закону

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \\ &= \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u) \end{aligned}, \quad (3.1)$$

где  $U$ ,  $\omega$ ,  $\psi_u$  – заданные величины.

Требуется найти комплексные действующие значения тока и напряжений на элементах  $R$  и  $C$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3.2)$$

$$u = U_{Rm} \sin(\omega t + \psi_R) = \sqrt{2}U_R \sin(\omega t + \psi_R), \quad (3.3)$$

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_C) = \sqrt{2}U_C \sin(\omega t + \psi_C). \quad (3.4)$$

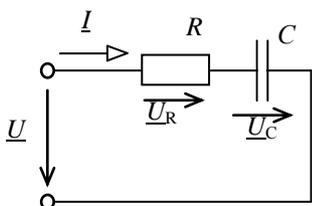


Рис. 3.2. Комплексная система цепи RC

Установившиеся значения тока и напряжений на элементах  $R$  и  $L$  найдём, используя метод комплексных чисел. Для этого представим резистивное сопротивление и ёмкость их комплексными схемами замещения и перейдём от мгновенных значений тока и напряжений к их комплексным изображениям (схема на рис. 3.2).

$$\dot{i} \hat{=} \underline{I} = I e^{j\psi_i} = I \angle \psi_i \quad (3.5)$$

$$u \hat{=} \underline{U} = U e^{j\psi_u} = U \angle \psi_u, \quad (3.6)$$

$$u_R \hat{=} \underline{U}_R = U_R e^{j\psi_R} = U_R \angle \psi_R, \quad (3.7)$$

$$u_C \hat{=} \underline{U}_C = U_C e^{j\psi_C} = U_C \angle \psi_C, \quad (3.8)$$

Согласно второму закону Кирхгофа, входное напряжение равно сумме напряжений на элементах  $R$  и  $C$

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = (R - j \frac{1}{\omega C}) \underline{I} = \underline{Z} \underline{I}, \quad (3.9)$$

где  $\underline{U}_R = \underline{Z}_R \underline{I} = R \underline{I}$  – напряжение на сопротивлении  $R$ , (3.10)

$$\underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I} \text{ – напряжение на ёмкости } C, \quad (3.11)$$

$$\underline{Z} = R - jX_C = R - j \frac{1}{\omega C} \text{ – комплексное сопротивление цепи } RC, \quad (3.12)$$

$\underline{Z}_R = R$ ,  $\underline{Z}_C = -jX_C = -j \frac{1}{\omega C}$  – комплексные сопротивления идеализированных элементов  $R$  и  $C$ .

Модуль комплексного сопротивления  $\underline{Z}$  (длина вектора  $\underline{Z}$ )

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}. \quad (3.13)$$

Аргумент комплексного сопротивления  $\underline{Z}$  (угол поворота вектора  $\underline{Z}$  относительно положительной вещественной оси системы координат)

$$\varphi = -\arctg \frac{X_C}{R} = -\arctg \frac{1}{\omega RC}. \quad (3.14)$$

Векторные диаграммы последовательной цепи RC показаны на рисунках 3.3 и 3.4.

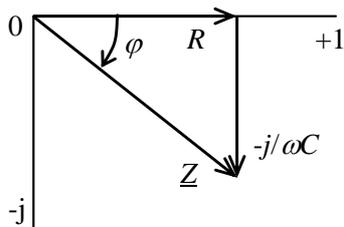


Рис. 3.3. Векторная диаграмма сопротивлений последовательной цепи RC

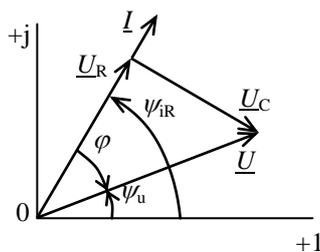


Рис. 3.4. Векторная диаграмма тока и напряжений последовательной цепи RC

Согласно закону Ома для комплексного напряжения и комплексного сопротивления, найдём комплексный ток

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U\angle\psi_u}{Z\angle\varphi} = \frac{U}{Z}\angle(\psi_u - \varphi) = I\angle\psi_i, \quad (3.15)$$

где  $I = \frac{U}{Z}$  – модуль действующего значения тока,

$\psi_i = \psi_u - \varphi$  – начальная фаза тока.

Используя закон Ома для комплексных значений, найдём напряжения на сопротивлении R и на ёмкости C.

$$\underline{U}_R = R\underline{I} = RI\angle\psi_i = U_R\angle\psi_{uR}, \quad (3.16)$$

где  $U_R = RI$  – модуль напряжения на сопротивлении R,

$\psi_{uR} = \psi_i$  – начальная фаза напряжения на сопротивлении R равна начальной фазе тока (напряжение и ток в сопротивлении R совпадают по фазе).

$$\underline{U}_C = -jX_C\underline{I} = X_C\angle-\frac{\pi}{2}I\angle\psi_i = X_CI\angle(\psi_i - \frac{\pi}{2}) = U_C\angle\psi_{uC}, \quad (3.17)$$

где  $U_C = X_CI = \frac{1}{\omega C}I$  – модуль напряжения на ёмкости.

$\psi_{uC} = \psi_i - \frac{\pi}{2}$  – начальная фаза напряжения на ёмкости. Напряжение на ёмкости отстает по фазе от тока на  $\pi/2$  (на  $90^\circ$ ).

Переходя от изображений к оригиналам, окончательно имеем

$$i = \sqrt{2} \frac{U}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) =$$

$$= \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t + \psi_u + \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega RC}), \quad (3.18)$$

$$u_R = \sqrt{2} RI \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3.19)$$

$$u_C = \sqrt{2} X_C I \sin(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}) =$$

$$= \sqrt{2} X_C I \sin(\omega t + \psi_u + \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega RC} - \frac{\pi}{2}). \quad (3.20)$$

Особо следует отметить, что действующие значения модулей входного напряжения и напряжений на элементах  $R$  и  $C$  связаны между собой соотношением (смотри векторную диаграмму напряжений)

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}, \quad (3.21)$$

т.е. действующее значение модуля напряжения на входе цепи не равно алгебраической сумме действующих значений модулей напряжений на элементах цепи.

### Задание

Задание состоит из расчётной, экспериментальной частей и компьютерного моделирования исследуемой электрической цепи.

Экспериментальная часть выполняется на стенде «Сигнал-USB». Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*». Варианты заданий даны в табл. 3.1.

Таблица 3.1

№	$U_m$ , В	$\psi_{U_m}$ , град.	$R$ , кОм	$C$ , нФ
1	2	3	4	5
1	1,0	60	1,0	5,1
2	1,5	55	2,0	10,0
3	2,0	50	3,0	22,0
4	2,5	45	5,0	33,0
5	3,0	40	10,0	47,0
6	3,5	35	20,0	100,0
7	4,0	30	47,0	5,1

Окончание табл. 3.1

1	2	3	4	5
8	4,5	25	1,0	10,0
9	5,0	20	2,0	22,0
10	5,5	15	3,0	33,0
11	6,0	10	5,0	47,0
12	6,5	60	10,0	100,0
13	7,0	55	20,0	5,1
14	7,5	50	47,0	10,0
15	8,0	45	1,0	22,0
16	8,5	40	2,0	33,0
17	9,0	35	3,0	47,0
18	9,5	30	5,0	100,0
19	10,0	25	10,0	5,1
20	9,0	20	20,0	10,0
21	1,0	15	47,0	22,0
22	1,5	10	1,0	33,0
23	2,0	60	2,0	47,0
24	2,5	55	3,0	100,0
25	3,0	50	5,0	5,1
26	3,5	45	10,0	10,0
27	4,0	40	20,0	22,0
28	4,5	35	47,0	33,0
29	5,0	30	1,0	47,0
30	5,5	25	2,0	100,0
31	6,0	20	3,0	5,1
32	6,5	15	5,0	10,0
33	7,0	10	10,0	22,0
34	7,5	60	20,0	33,0
35	8,0	55	47,0	47,0
36	8,5	50	1,0	100,0
37	9,0	45	2,0	5,1
38	9,5	40	3,0	10,0
39	9,0	35	5,0	22,0
40	10,0	30	10,0	33,0

## Расчетная часть

1. Рассчитайте для заданных значений  $R$  и  $C$  Вашего варианта (табл. 3.1) частоту, на которой модуль ёмкостного сопротивления будет равен резистивному сопротивлению (граничную частоту).
2. Рассчитайте: комплексное сопротивление  $RC$ -цепи на граничной частоте, комплексные амплитуды напряжений и тока.
3. По полученным данным в масштабе постройте векторную диаграмму напряжений и тока.
4. Увеличьте частоту в два раза и повторите расчёт.
5. Сделайте выводы по результатам расчётов.

## Экспериментальная часть

Реальная экспериментальная часть выполняется на стенде «Сигнал – USB». Перед выполнением экспериментальной части необходимо ознакомиться с подготовкой к работе стенда «Сигнал – USB» (далее стенд) и порядком работы на нём.

1. Уточните с помощью мультиметра значения сопротивления резистора  $R$  и ёмкости конденсатора  $C$ , которые будете использовать в работе.
2. Соберите на наборном поле стенда электрическую цепь из элементов с уточненными параметрами, схема которой показана на рис. 3.5.
3. Подключите цепь к генератору переменного гармонического напряжения и к измерительным выводам стенда. На выводы *Изм.1* подайте входное напряжение от генератора, а на выводы *Изм.2* – выходное напряжение исследуемой цепи.
4. Подключите стенд к сети питания и к компьютеру.
5. Подключите к цепи генератор синусоидального напряжения и осциллограф для наблюдения входного и выходного напряжений. Настройте развёртки осциллографа для удобного наблюдения. Осциллограмму внесите в отчёт.
6. Подключите к цепи векторный вольтметр и произведите необходимые измерения.
7. Увеличьте частоту в два раза и повторите пункты 5 и 6.
8. Соберите на наборном поле цепь, схема которой показана на рис. 3.6 и повторите пункты 5...7.
9. Результаты обоих случаев занесите в таблицу.
10. Постройте для каждого значения частоты векторную диаграмму для действующих (среднеквадратических) тока и напряжений. *Внимание!* При построении векторных диаграмм пользуйтесь только значениями показанными мультиметром! На расхождение заданных значений напряжения генератора и значений, показанных мультиметром на выводах *Изм. 1*, не обращайте внимания.

11. Сравните расчётные и опытные данные, сделайте и занесите в отчёт выводы по проделанной работе.

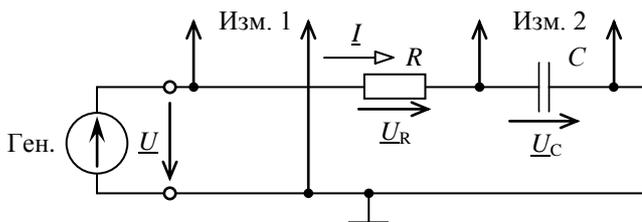


Рис. 3.5. Схема RC-цепи

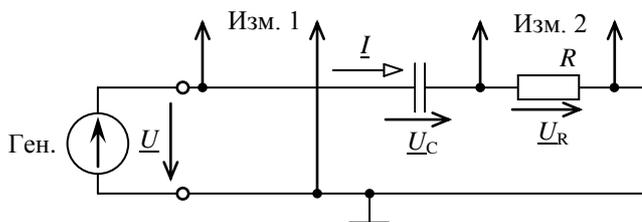


Рис. 3.6. Схема CR-цепи

### Компьютерное моделирование цепи RC

Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*».

1. Соберите на экране монитора исследуемую электрическую цепь с заданными параметрами элементов.

2. Подключите необходимые измерительные приборы (амперметр и вольтметры). Измерительные приборы переключите на измерение переменного тока.

3. Включите схему и занесите показания приборов в таблицу.

4. Подключите к схеме осциллограф, настройте его так, чтобы было удобно наблюдать исследуемый процесс, и занесите осциллограммы, полученные для схем рис. 3.5 и 3.6 в отчёт.

По всей проделанной работе сделайте и запишите в отчет выводы.

### Пример выполнения задания

#### Расчётная часть

Пусть даны: амплитуда  $U_m$  и начальная фаза  $\psi_{U_m}$  входного напряжения, резистор с номинальным сопротивлением  $R$ , конденсатор номи-

нальной ёмкости  $C$  (табл. 3.2). Уточненные с помощью мультиметра значения  $R$  и  $C$  также даны в таблице.

Таблица 3.2

$U_m$ , В	$\psi_{U_m}$ , град.	$R$ , кОм	$C$ , нФ
5,0	30	5,1	33
Уточнённые значения $R$ и $C$		5,05	30,1

1. Частота, на которой модуль ёмкостного сопротивления равен резистивному сопротивлению (граничная частота). Для её нахождения воспользуемся равенством сопротивлений:

$$R = \frac{1}{2\pi fC},$$

тогда

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 5050 \cdot 0,0000000301} = 1047 \text{ Гц.}$$

2. Комплексное сопротивление цепи

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R - j\frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi fC}\right)^2} \angle \arctg \frac{1}{2\pi fRC} = \\ &= \sqrt{5050^2 + 5050^2} \angle -\arctg \frac{5050}{5050} = 7142 \angle -45^\circ \end{aligned}$$

3. Комплексная амплитуда входного напряжения. Для этого перейдём из области вещественного переменного  $t$  в область комплексного переменного

$$5,0 \sin(\omega t + 30^\circ) \hat{=} 5,0 \angle 30^\circ$$

4. Комплексная амплитуда тока

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{5,0 \angle 30^\circ}{7142 \angle -45^\circ} = 0,0007001 \angle 75^\circ$$

5. Комплексная амплитуда напряжения на сопротивлении  $R$

$$\underline{U}_{Rm} = R \underline{I}_m = RI \angle \psi_i = 5050 \cdot 0,0007001 \angle 75^\circ = 3,536 \angle 75^\circ.$$

6. Комплексная амплитуда напряжения на ёмкости  $C$

$$\underline{U}_{Cm} = -jX_C \underline{I}_m = 5050 \angle -90^\circ \cdot 0,0007001 \angle 75^\circ = 3,536 \angle -15^\circ.$$

7. Действующие значения входного напряжения, входного тока и напряжений на сопротивлении  $R$  и ёмкости  $C$

$$\underline{U} = \frac{5,0 \angle 30^\circ}{\sqrt{2}} = 3,536 \angle 30^\circ,$$

$$\underline{I} = \frac{0,0007001 \angle 75^\circ}{\sqrt{2}} = 0,000495 \angle 75^\circ,$$

$$\underline{U}_R = \frac{3,536 \angle 75^\circ}{\sqrt{2}} = 2,500 \angle 75^\circ,$$

$$\underline{U}_C = \frac{3,536 \angle -15^\circ}{\sqrt{2}} = 2,500 \angle -15^\circ.$$

### Экспериментальная часть

Установки генератора и осциллограммы для схемы рис. 3.5 показаны на рис. 3.7 и 3.8.

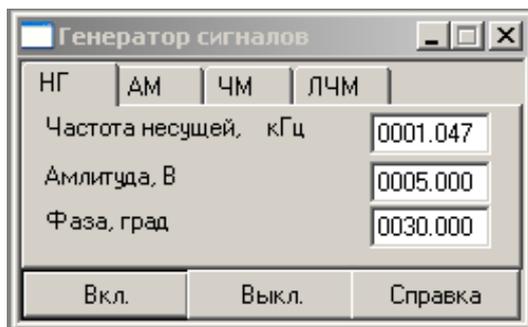


Рис. 3.7. Установки генератора

На рис. 3.8 хорошо виден сдвиг фаз между входным напряжением  $u$  и напряжением  $u_C$  на конденсаторе. Напряжение на конденсаторе  $u_C$  отстаёт по фазе от входного напряжения  $u$ .

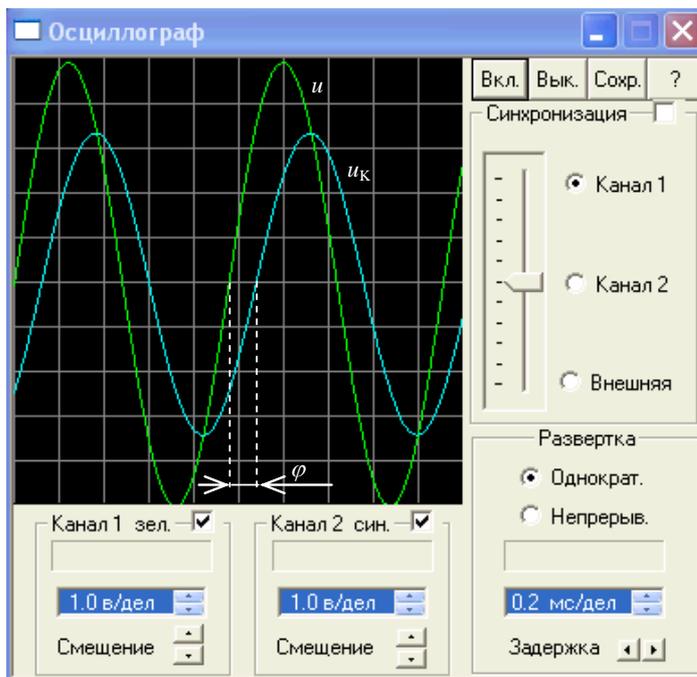


Рис. 3.8. Осциллограммы входного напряжения и напряжения на конденсаторе для цепи, показанной на рис. 3.5

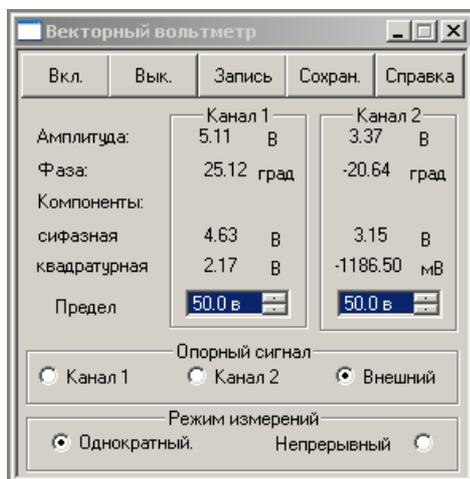


Рис. 3.9. Показания мультиметра для схемы рис. 3.5

Значения амплитуды  $U_m$  и начальной фазы  $\psi_{Um}$  входного напряжения, амплитуда  $U_{Km}$  и начальная фаза  $\psi_{uK}$  напряжения на конденсаторе, амплитуда  $U_{Rm}$  и начальная фаза  $\psi_{UR}$  напряжения на резисторе, показанные мультиметром для схем рис. 3.5 и 3.6 сведены в табл. 3.3.

Рисунок показаний мультиметра для схемы рис. 3.6 здесь не приведён.

Таблица 3.3

Схема	$U_m$ , В	$\psi_{Um}^\circ$	$U_{Km}$ , В	$\psi_{uK}^\circ$	$U_{Rm}$ , В	$\psi_{UR}^\circ$
Рис. 3.5	5,11	25,12	3,37	-20,64	-	-
Рис. 3.6	5,11	25,12	-	-	3,63	66,91

### Векторная диаграмма

Векторную диаграмму построим для действующих значений напряжения. Для этого перейдём от амплитудных комплексов напряжений тока к комплексам действующих значений.

Действующие (среднеквадратические) значения напряжений и тока исследуемой цепи согласно показаниям мультиметра:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{5,11 \angle 25,12^\circ}{\sqrt{2}} = 3,613 \angle 25,12^\circ,$$

$$\underline{U}_R = \frac{U_{Rm}}{\sqrt{2}} = \frac{3,63 \angle 66,91^\circ}{\sqrt{2}} = 2,555 \angle 66,91^\circ,$$

$$\underline{I} = \frac{U_R}{R} = \frac{2,555 \angle 66,91^\circ}{5050} = 0,000506 \angle 66,91^\circ,$$

$$\underline{U}_K = \frac{U_{Km}}{\sqrt{2}} = \frac{3,37 \angle -20,64^\circ}{\sqrt{2}} = 2,383 \angle -20,64^\circ.$$

Векторная диаграмма отражает состояние электрической цепи при гармоническом воздействии. В данном случае векторная диаграмма иллюстрирует второй закон Кирхгофа в векторной форме

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_K = \underline{U}_R + \underline{U}_{RK} + \underline{U}_{CK},$$

где  $\underline{U}_R$  – комплекс действующего напряжения на резисторе,

$\underline{U}_K = \underline{U}_{RK} + \underline{U}_{CK}$  – комплекс действующего напряжения на конденсаторе,

$\underline{U}_{RK}$  и  $\underline{U}_{CK}$  – соответственно, резистивная и ёмкостная составляющие действующего напряжения на конденсаторе,

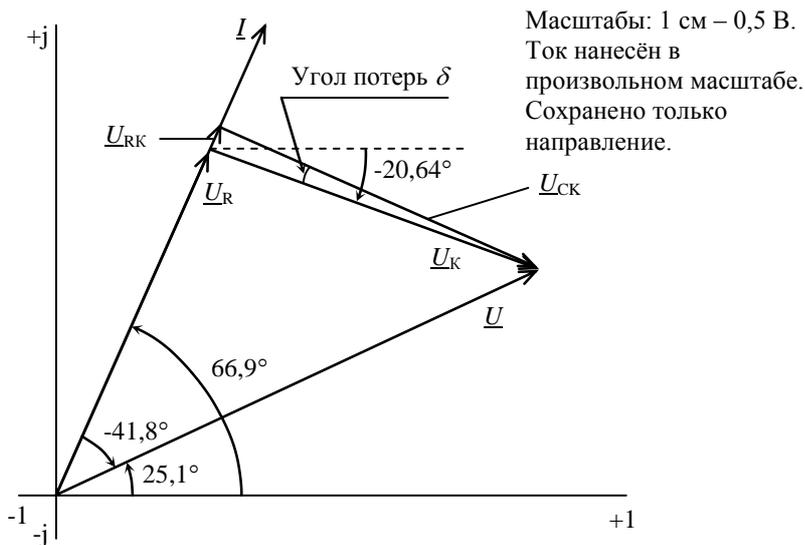


Рис. 3.10. Векторная диаграмма исследуемой цепи RC

Используя полученную векторную диаграмму, можно найти угол потерь конденсатора, а также резистивную  $\underline{U}_{RK}$  и ёмкостную  $\underline{U}_{CK}$  составляющие напряжения на конденсаторе. Для этого проводим перпендикуляр от конца вектора напряжения на конденсаторе  $\underline{U}_K$  к вектору тока  $\underline{I}$ , находим резистивную  $\underline{U}_{RK}$  и ёмкостную составляющие напряжения  $\underline{U}_K$ , и с помощью несложных тригонометрических выкладок находим угол потерь конденсатора  $\delta$ . В данном случае угол потерь  $\delta = 2,45^\circ$ . Тогда резистивная составляющая напряжения на конденсаторе

$$U_{RK} = U_K \sin 2,45^\circ = 2,383 \cdot \sin 2,45^\circ = 0,102 \text{ В};$$

ёмкостная составляющая напряжения на конденсаторе

$$U_{CK} = U_K \cos 2,45^\circ = 2,383 \cdot \cos 2,45^\circ = 2,381 \text{ В}.$$

Аналогично построить векторную диаграмму для удвоенной частоты.

## Компьютерное моделирование

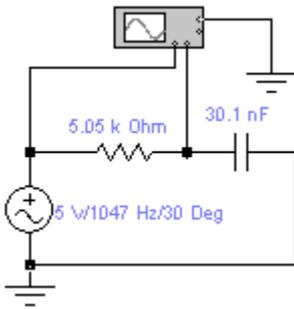


Рис. 3.11. Цепь  $RC$

На рис. 4.11 показана собранная на экране монитора схема исследуемой цепи  $RC$ . Не забудьте переключить амперметр и вольтметры на измерение переменного тока. На рис. 4.12 показаны осциллограммы входного  $u$  и выходного  $u_C$  напряжений, сдвинутых по фазе. Напряжение  $u_C$  отстаёт по фазе от напряжения  $u$  на угол  $\varphi$ . Угол сдвига фаз можно определить, используя визирные линии (рис. 3.12).

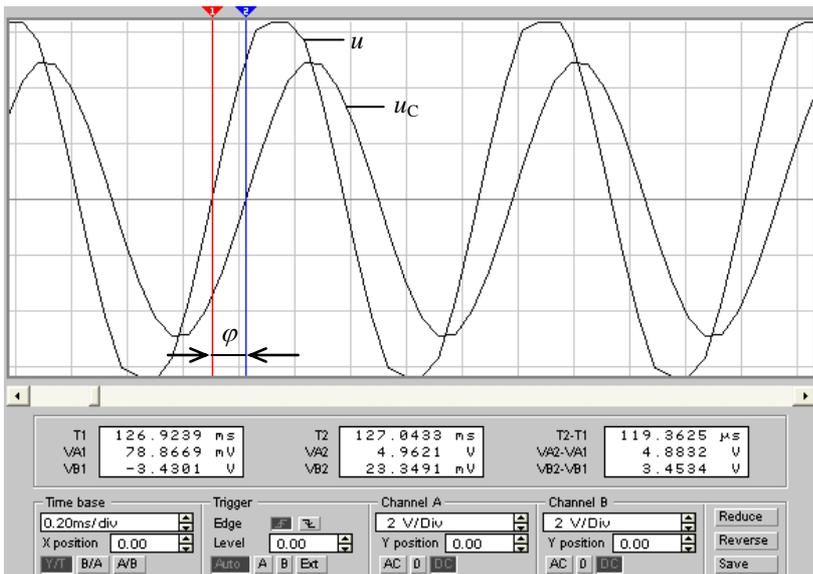


Рис. 3.12. Осциллограммы входного  $u$  и выходного  $u_C$  напряжений цепи  $RC$

Чтобы определить угол сдвига фаз, необходимо, пользуясь визирными линиями, определить время одного периода и время сдвига фаз. Зная, что одному периоду соответствует угол  $360^\circ$ , составить пропорцию и найти угол сдвига фаз. В рассматриваемом примере одному периоду соответствует время  $T = 954,9$  мкс, сдвигу фаз соответствует время  $t_{сдв} = 119,36$  мкс.

Тогда угол сдвига фаз

$$\varphi = \frac{t_{\text{сдв}}}{T} 360^\circ = \frac{119,36}{954,90} 360^\circ \approx 45^\circ.$$

Аналогично выполнить компьютерное моделирование для удвоенной частоты.

Для построения векторной диаграммы необходимо измерить напряжения на элементах  $R$  и  $C$  и ток, как показано на рис. 3.13.

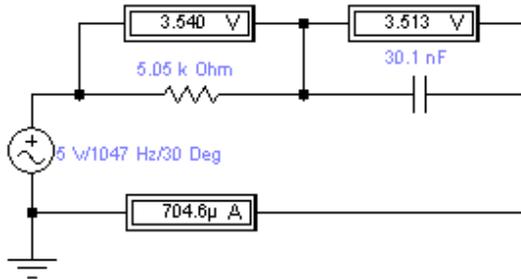


Рис. 3.13. Показания измерительных приборов на граничной частоте

Векторные диаграммы строятся также как и при экспериментальном исследовании цепи (см. выше).

Выводы по работе сделать самостоятельно.

### Контрольные вопросы

1. Запишите формулу, связывающую мгновенные напряжение и ток в резистивном элементе.
2. Запишите формулу, связывающую мгновенные напряжение и ток в ёмкостном элементе.
3. Укажите последовательность расчёта цепи  $RC$  и запишите необходимые формулы.
4. Начертите векторные диаграммы напряжений и токов отдельно для резистивного и ёмкостного элементов.
5. Поясните, почему для резистивного элемента закон Ома для мгновенных значений выполняется, а для ёмкостного не выполняется.
6. Опишите, как строится векторная диаграмма цепи  $RC$ .
7. Опишите, как и почему изменяется векторная диаграмма цепи  $RC$  при изменении частоты от нуля до бесконечности.
8. Поясните, как можно по результатам реального эксперимента определить параметры конденсатора.

## Лабораторная работа 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ *RLC*

Цель работы – научиться отображать состояние электрической *RLC*-цепи с помощью векторных диаграмм.

При подготовке к работе воспользуйтесь конспектом лекций, учебником (Л. 1. стр. 16...25; 100...103) и ниже расположенной теоретической частью работы.

Работа состоит из расчётной части и компьютерного моделирования последовательной *RLC*-цепи.

Расчётная часть выполняется *при подготовке* к лабораторной работе. Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*».

### Последовательная цепь *RLC* при гармоническом воздействии

#### Краткие теоретические сведения

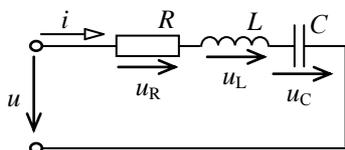


Рис. 4.1. Схема *RLC*-цепи

Согласно второму закону Кирхгофа для мгновенных значений имеем:

$$u = u_R + u_L + u_C, \quad (4.1)$$

где  $u_R = R \cdot i$  – мгновенное напряжение на сопротивлении  $R$ ,

$u_L = L \frac{di}{dt}$  – мгновенное напряжение на индуктивности  $L$ ,

$u_C = \frac{1}{C} \int idt$  – мгновенное напряжение на ёмкости  $C$ .

Тогда

$$u = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt. \quad (4.2)$$

Если пользоваться комплексными изображениями действующих (среднеквадратических) значений гармонических величин (тока и напряжений), то схема будет выглядеть так, как показано на рис. 4.2.

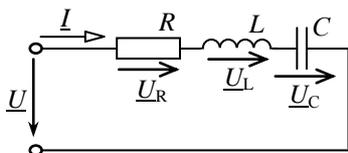


Рис. 4.2. Схема  $RLC$ -цепи

Согласно второму закону Кирхгофа для комплексных значений напряжений имеем:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C, \quad (4.3)$$

где  $\underline{U}$  – комплексное действующее значение входного напряжения;

$\underline{I}$  – комплексное действующее значение входного тока;

$\underline{U}_R = R\underline{I}$  – комплексное действующее напряжение на сопротивлении  $R$ ;

$\underline{U}_L = jX_L\underline{I}$  – комплексное действующее напряжение на индуктивности  $L$ ;

$\underline{U}_C = -jX_C\underline{I}$  – комплексное действующее напряжение на ёмкости  $C$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \underline{U} &= R\underline{I} + jX_L\underline{I} - jX_C\underline{I} = (R + jX_L - jX_C)\underline{I} = \\ &= [R + j(X_L - X_C)]\underline{I} = (R + jX)\underline{I} = \underline{Z}\underline{I} \end{aligned};$$

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}, \quad (4.4)$$

где  $\underline{Z} = R + jX$  – полное комплексное сопротивление последовательной цепи  $R, L, C$ ;

$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  – суммарное реактивное сопротивление последовательной цепи  $R, L, C$ .

Преобразуем сопротивление  $\underline{Z}$  в показательную форму

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + X^2} \angle \arctg \frac{X}{R}. \quad (4.5)$$

Поделив напряжение на сопротивление, получаем выражение для тока

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U \angle \psi_U}{Z \angle \varphi_Z} = \frac{U}{Z} \angle (\psi_U - \varphi_Z) = I \angle \psi_I, \quad (4.6)$$

где  $I = \frac{U}{Z}$  – модуль комплекса тока;

$\psi_I = \psi_U - \varphi_Z$  – аргумент (начальная фаза) комплекса тока.

При резонансе ( $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ ) выражение 4.6 примет вид  $\underline{I}_0 = \frac{U}{R}$ ,

где  $\underline{I}_0$  – комплексное значение тока при резонансе.

Выражения для напряжений на элементах получаются умножением соответствующих сопротивлений на комплекс тока:

$$\underline{U}_R = RI \quad (4.7)$$

$$\underline{U}_L = jX_L I \quad (4.8)$$

$$\underline{U}_C = -jX_C I \quad (4.9)$$

Напряжения  $U_{RL}$  и  $U_{RC}$  можно найти, сложив соответствующие напряжения на элементах схемы:

$$\underline{U}_{RL} = \underline{U}_R + \underline{U}_L \quad (4.10)$$

$$\underline{U}_{LC} = \underline{U}_L + \underline{U}_C \quad (4.11)$$

На рис. 4.3 показаны векторные диаграммы для частоты меньше резонансной а), резонансной частоты б) и для частоты больше резонансной в).

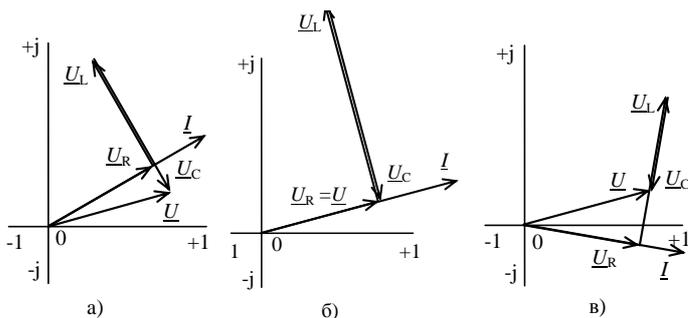


Рис. 4.3

Специально отметим, что вектор входного напряжения  $\underline{U}$  остаётся неизменным для всех трёх векторных диаграмм.

### Задание

Задание состоит из расчётной части и компьютерного моделирования последовательной  $RLC$ -цепи. Варианты параметров заданий приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№	$u_{ВХ}$	$R$ , Ом	$L$ , мГн	$C$ , нФ
1	2	3	4	5
1	$u=110\sin(\omega t+10^\circ)$	1700	50	0,9

Продолжение табл. 4.1

1	2	3	4	5
2	$u=120\sin(\omega t+20^\circ)$	800	55	0,85
3	$u=130\sin(\omega t+30^\circ)$	900	60	0,80
4	$u=140\sin(\omega t+40^\circ)$	1000	65	0,75
5	$u=150\sin(\omega t+50^\circ)$	1100	70	0,70
6	$u=110\sin(\omega t+20^\circ)$	1200	75	0,65
7	$u=120\sin(\omega t+30^\circ)$	1300	80	0,60
8	$u=130\sin(\omega t+40^\circ)$	1400	85	0,55
9	$u=140\sin(\omega t+50^\circ)$	1500	90	0,50
10	$u=150\sin(\omega t+10^\circ)$	1600	95	0,45
11	$u=110\sin(\omega t+30^\circ)$	1700	100	0,4
12	$u=120\sin(\omega t+40^\circ)$	1800	50	0,35
13	$u=130\sin(\omega t+50^\circ)$	1900	55	0,3
14	$u=140\sin(\omega t+10^\circ)$	1000	60	0,25
15	$u=150\sin(\omega t+20^\circ)$	1100	65	0,2
16	$u=110\sin(\omega t+40^\circ)$	1200	70	0,9
17	$u=120\sin(\omega t+50^\circ)$	1300	75	0,85
18	$u=130\sin(\omega t+10^\circ)$	1400	80	0,80
19	$u=140\sin(\omega t+20^\circ)$	1500	85	0,75
20	$u=150\sin(\omega t+30^\circ)$	1600	90	0,70
21	$u=110\sin(\omega t+50^\circ)$	1700	95	0,65
22	$u=120\sin(\omega t+10^\circ)$	1800	100	0,60
23	$u=130\sin(\omega t+20^\circ)$	1900	65	0,55
24	$u=140\sin(\omega t+30^\circ)$	1000	70	0,50
25	$u=150\sin(\omega t+40^\circ)$	1100	75	0,45

1	2	3	4	5
26	$u=50\sin(\omega t+10^\circ)$	1200	80	0,4
27	$u=60\sin(\omega t+20^\circ)$	1300	85	0,35
28	$u=70\sin(\omega t+30^\circ)$	1400	90	0,3
29	$u=80\sin(\omega t+40^\circ)$	1500	95	0,25
30	$u=90\sin(\omega t+50^\circ)$	1600	100	0,2
31	$u=50\sin(\omega t+20^\circ)$	1700	50	0,9
32	$u=60\sin(\omega t+30^\circ)$	1800	55	0,85
33	$u=70\sin(\omega t+40^\circ)$	900	60	0,80
34	$u=80\sin(\omega t+50^\circ)$	1000	65	0,75
35	$u=90\sin(\omega t+10^\circ)$	1100	70	0,70
36	$u=50\sin(\omega t+30^\circ)$	1200	75	0,65
37	$u=60\sin(\omega t+40^\circ)$	1300	80	0,60
38	$u=70\sin(\omega t+50^\circ)$	1400	85	0,55
39	$u=80\sin(\omega t+10^\circ)$	1500	90	0,50
40	$u=90\sin(\omega t+20^\circ)$	1600	95	0,45

### Расчётная часть

Для схемы, приведенной на рис. 4.1, рассчитайте напряжения на всех её элементах:  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_L$ ,  $\underline{U}_C$ , а также напряжения  $\underline{U}_{RL}$ ,  $\underline{U}_{LC}$ . Постройте векторные диаграммы для трех частот:  $f_1 = 0,8f_0$ ;  $f_2 = f_0$ ;  $f_3 = 1,2f_0$ . Варианты исходных данных приведены в табл. 4.1.

1. Рассчитайте комплексное сопротивление  $\underline{Z}$ , комплексный ток  $\underline{I}$ , комплексные напряжения на сопротивлении  $\underline{U}_R$ , на индуктивности  $\underline{U}_L$ , на емкости  $\underline{U}_C$ , а также напряжения  $\underline{U}_{RL}$ ,  $\underline{U}_{LC}$ , для трех частот:  $f_1 = 0,8f_0$ ;  $f_2 = f_0$ ;  $f_3 = 1,2f_0$ . Результаты расчёта сведите в таблицы.

Резонансную частоту  $f_0$  рассчитайте по формуле:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

2. Постройте векторные диаграммы для указанных выше трех частот. Обязательно укажите принятые при построении *масштабы* тока и напряжения. Не забывайте, что масштабы должны соответствовать ГОСТу

ЕСКД (Государственному Стандарту Единой Конструкторской Документации).

### Компьютерное моделирование цепи RLC

Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*».

1. Соберите на экране монитора исследуемую электрическую цепь с расчётной частотой и заданными параметрами элементов.
2. Подключите необходимые измерительные приборы (амперметр и вольтметры). Измерительные приборы переключите на измерение переменного тока.
3. Включите схему и занесите показания приборов в таблицу.
4. Повторите измерения для других частот.
5. По полученным результатам постройте векторные диаграммы.

### Пример выполнения задания

Пример выполнения показан для частоты  $f_1$  цепи, параметры которой приведены в табл. 4.2.

Пусть дано:

Таблица 4.2

Вариант	$u$ , В	$R$ , Ом	$L$ , мГн	$C$ , нФ
41	$u=311 \sin(\omega t+10^\circ)$	2000	50	0,9

Расчет проведем символическим методом для действующих (среднеквадратических) значений напряжений и тока.

1. Резонансная частота

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{0,05 \cdot 0,9 \cdot 10^{-9}}} = 23737 \text{ Гц}.$$

2. Рассчитаем сопротивления  $X_L$ ,  $X_C$ ,  $Z$ , ток  $I$ , напряжения  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_L$ ,  $\underline{U}_C$  для частоты  $f_1$ .

$$f_1 = 0,8f_0 = 0,8 \cdot 23737 = 18990 \text{ Гц},$$

$$X_{L1} = \omega_1 L = 2\pi f_1 L = 2 \cdot 3,14 \cdot 18990 \cdot 0,05 = 5963 \text{ Ом},$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 18990 \cdot 0,9 \cdot 10^{-9}} = 9317 \text{ Ом}.$$

Сопротивление  $Z$  в алгебраической форме записи:

$$\underline{Z}_1 = R + jX_{L1} - jX_{C1} = 2000 + j5963 - j9317 = 2000 - j3354.$$

Поскольку предстоит операция деления (комплекс напряжения  $\underline{U}$  будем делить на комплекс сопротивления  $\underline{Z}$ ), то переведем алгебраическую форму записи сопротивления  $\underline{Z} = R + jX$  в показательную форму записи (в форму записи в полярной системе координат)  $\underline{Z} = Z \angle \varphi_Z$ .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \sqrt{R^2 + X_1^2} \angle \arctg \frac{X_1}{R} = \\ &= \sqrt{2000^2 + (-3354)^2} \angle \arctg \frac{-3354}{2000} = 3905 \angle -59,2^\circ \end{aligned}$$

Перейдем из области вещественного переменного  $t$  (время) в область комплексного переменного. Комплекс действующего (средне-квадратического) напряжения:

$$\underline{U} = \frac{311}{\sqrt{2}} \angle 10^\circ = 220 \angle 10^\circ$$

Итак:

$$\underline{U} = 220 \angle 10^\circ$$

Ток в цепи:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{220 \angle 10^\circ}{3905 \angle -59,19^\circ} = 0,05634 \angle 69,2^\circ.$$

Напряжение на резистивном элементе совпадает по фазе с током

$$\underline{U}_{R1} = R \underline{I}_1 = 2000 \cdot 0,05634 \angle 69,19^\circ = 112,7 \angle 69,2^\circ.$$

Напряжение на индуктивном элементе опережает ток на угол  $90^\circ$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L1} &= jX_{L1} \cdot \underline{I}_1 = X_{L1} \angle 90^\circ \underline{I}_1 = \\ &= 5963 \angle 90^\circ \cdot 0,05634 \angle 69,19^\circ = 336 \angle 159,2^\circ \end{aligned}$$

Напряжение на емкостном элементе отстает от тока на угол  $90^\circ$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{C1} &= -jX_{C1} \underline{I}_1 = X_{C1} \angle -90^\circ \cdot \underline{I}_1 = 9317 \angle -90^\circ \cdot 0,05634 \angle 69,2^\circ = \\ &= 525 \angle -20,8^\circ \end{aligned}$$

Проверка правильности решения

$$\begin{aligned} U_{\text{РАСЧЁТНОЕ}} &= \sqrt{U_{R1}^2 + (U_{L1} - U_{C1})^2} = \\ &= \sqrt{112,7^2 + (336 - 525)^2} = 220,05 \\ U_{\text{РАСЧЁТНОЕ}} &= 220,05 \approx U = 220. \end{aligned}$$

Решение выполнено верно. Небольшое несовпадение расчетного и заданного значений модуля напряжения произошло из-за неточности вычислений (из-за округления расчётных значений).

Аналогично рассчитываются сопротивления, токи и напряжения для других частот.

Результаты расчетов заносим в табл. 4.3 и 4.4.

### Расчетные данные

Таблица 4.3

	$f, \text{Гц}$	$Z$	$I$	$\underline{U}_R$
$f_1=0,8f_0$	18990	$3448 \angle -76,58^\circ$	$0,0563 \angle 69,2^\circ$	$112,72 \angle 69,2^\circ$
$f_2=f_0$	23737			
$f_3=1,2f_0$	28484			

Таблица 4.4

$f$	$f, \text{Гц}$	$\underline{U}_L$	$\underline{U}_C$	$\underline{U}_{RL}$	$\underline{U}_{LC}$
$f_1=0,8f_0$	18990	$336 \angle 159,2$	$525 \angle -20,8^\circ$	$354 \angle 140,7^\circ$	$189 \angle -20,8^\circ$
$f_2=f_0$	23737				
$f_3=1,2f_0$	28484				

Перейдем из области комплексного переменного в область вещественного переменного  $t$  (времени) и занесем результаты в табл. 4.5 и 4.6. При переходе учитываем, соотношение амплитудного и действующего (среднеквадратического) значений, например,  $U_{R1m} = \sqrt{2} \cdot U_{R1}$  и так далее для всех величин.

Таблица 4.5

$f, \text{Гц}$	$i$	$u_R$	$u_L$
18990	$0,0797 \sin(\omega t + 69,2^\circ)$	$112,7 \sin(\omega t + 69,2^\circ)$	$475 \sin(\omega t + 159,2^\circ)$
23737			
28484			

Таблица 4.6

$f, \text{Гц}$	$u_C$	$u_{RL}$	$u_{LC}$
18990	$742 \sin(\omega t - 20,8^\circ)$	$501 \sin(\omega t + 140,7^\circ)$	$267 \sin(\omega t - 20,8^\circ)$
23737			
28484			

## Векторные диаграммы

Векторная диаграмма для рассчитанного выше режима работы  $RLC$ -цепи показана на рис. 4.4. Сначала строим комплексную систему координат. Затем строим вектор тока в выбранном масштабе тока и под рассчитанным углом начальной фазы. Потом строим векторы напряжений в выбранном масштабе напряжения и под рассчитанными углами начальных фаз. Сначала строим вектор напряжения на резистивном сопротивлении (он совпадает по направлению с вектором тока), затем к его концу пристраиваем вектор напряжения на индуктивности. К концу вектора напряжения  $U_L$  пристраиваем вектор напряжения на ёмкости. При правильном расчёте и правильном построении векторной диаграммы сумма векторов  $\underline{U}_R$ ,  $U_L$ ,  $U_C$  должна дать вектор входного напряжения  $\underline{U}$ .

Принятые масштабы: по напряжению – 50 В, в 1 см;  
по току – 0,01 А, в 1 см.

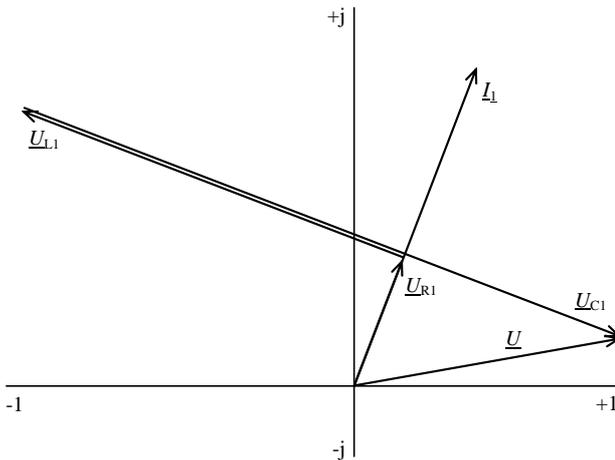


Рис. 4.4. Векторная диаграмма тока и напряжений последовательной цепи  $R,L,C$  для частоты  $f_1 = 18990$  Гц

Векторные диаграммы для частот  $f_2$  и  $f_3$  строятся аналогично. Отметим, что на частоте резонанса ( $f_2 = f_0$ ) напряжения  $U_{L2}$  и  $U_{C2}$  по модулю (по величине) будут равны, а на частоте больше резонансной ( $f_3$ ) модуль напряжения на индуктивности будет больше модуля напряжения на ёмкости.

## Компьютерное моделирование последовательной RLC-цепи

На рис. 4.6 показана схема рассматриваемой последовательной RLC – цепи с подключёнными измерительными приборами. Частота питающего напряжения  $f_1 = 18990$  Гц. Показания приборов для указанных трёх частот сведены в табл. 4.7.

Аналогично следует выполнить измерения для частот  $f_2 = 23737$  Гц и  $f_3 = 28484$  Гц.

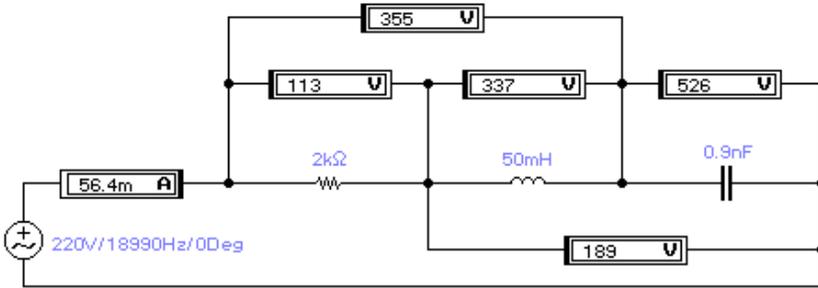


Рис. 4.6. Схема с показаниями приборов для частоты  $f_1$

Таблица 4.7

$f$	$f_j$ , Гц	$I$ , mA	$U_R$ , В	$U_L$ , В	$U_C$ , В	$U_{RL}$ , В	$U_{LC}$ , В
$f_1=0,8f_0$	18990	56,4	113	337	526	355	189
$f_2=f_0$	23737						
$f_3=1,2f_0$	28484						

Расчётные и полученные из опыта значения модулей тока и напряжений хорошо совпадают. Небольшие отклонения объясняются неточностью вычислений.

### Контрольные вопросы

1. Запишите выражения, связывающие мгновенные значения напряжений и токов отдельно в резистивном, индуктивном и ёмкостном элементах.
2. Запишите формулу для ёмкостного сопротивления. Поясните, как она получена.
3. Запишите формулу для индуктивного сопротивления. Поясните, как она получена.

4. Начертите векторные диаграммы напряжений и токов отдельно для резистивного, индуктивного и ёмкостного элементов.

5. Запишите выражение для комплексного сопротивления последовательной  $RLC$ - цепи.

6. Укажите, как изменяется входное сопротивление последовательной  $RLC$ - цепи при изменении частоты от нуля до бесконечности. Почему?

7. Поясните построение векторной диаграммы последовательной  $RLC$ - цепи.

8. Укажите, как изменяется вид векторной диаграммы последовательной  $RLC$ - цепи при изменении частоты от 0 до бесконечности. Почему?

9. Укажите чему равно сопротивление последовательной  $RLC$ - цепи на нулевой частоте.

10. Укажите чему равно сопротивление последовательной  $RLC$ - цепи на бесконечно большой частоте.

11. Укажите чему равно сопротивление последовательной  $RLC$ - цепи на резонансной частоте.

12. Укажите, на какой частоте в цепи  $RLC$  при неизменной амплитуде входного напряжения в цепи будет максимальный ток. Почему?

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 5

### Комплексные частотные характеристики электрических цепей

#### Понятие о комплексных частотных характеристиках

Линейную электрическую цепь можно представить в виде многополюсника. Например, на рис. п.2.1 показана схема многополюсника имеющая две пары входных и две пары выходных зажимов.

*Входными* называют пару зажимов (полюсов, выводов), к которым подключается каждый из независимых источников, задающих внешнее воздействие на цепь.

*Выходными* называют зажимы (полюса, выводы) служащие для подключения нагрузки, т.е. ветви, ток или напряжение которой необходимо определить.

Пары входных и выходных зажимов образуют соответственно *входы и выходы* электрической цепи, точнее, входы и выходы многополюсника, который получается из цепи при вынесении из нее источников внешнего воздействия и нагрузок.

*Стороной многополюсника*, или *портом*, называется пара зажимов, которые служат либо входом, либо выходом, либо и входом и выходом одновременно (на рис. п.2.1 изображена схема двухстороннего многополюсника) (четыреполюсника).

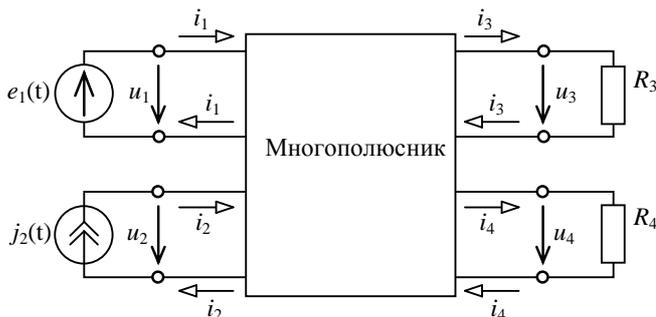


Рис. п.2.1. Схемы двухстороннего многополюсника

Из определений входных и выходных зажимов следуют две важные особенности зажимов, образующих порт многополюсника:

1) ток вытекающий через один полюс порта, равен току вытекающему через другой полюс порта;

2) между парами полюсов, принадлежащих разным портам, не должно быть никаких внешних по отношению к многополюснику соединений.

Если в электрической цепи выделена только одна пара полюсов, являющаяся одновременно входом и выходом, например, входным воздействием  $x(t)$  является напряжение, а выходным  $y(t)$  – ток, то такой многополюсник рассматривается как двухполюсник (рис. п.2.2).

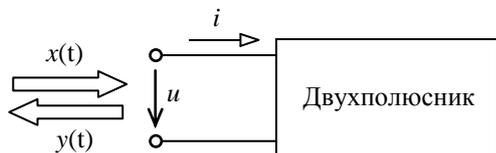


Рис. п.2.2. Схема двухполюсника

Многополюсник, имеющий внешнее воздействие  $x(t)$  только на одной паре полюсов и отклик  $y(t)$  тоже только на одной паре полюсов, называется четырёхполюсником (рис. п.2.3).

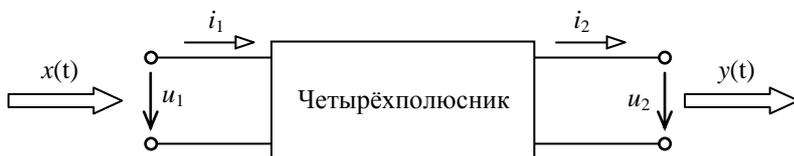


Рис. п.2.3. Схема четырёхполюсника при произвольном воздействии

Ограничимся рассмотрением случая гармонического воздействия на четырёхполюсник. В этом случае от исследования соотношений между мгновенными значениями внешнего воздействия  $x(t)$  и реакции цепи  $y(t)$  можно перейти к исследованию соотношений между их комплексными изображениями (рис. п.2.4):

$$x(t) \doteq \underline{X}_m = \sqrt{2} \underline{X} \quad y(t) \doteq \underline{Y}_m = \sqrt{2} \underline{Y} \quad , \quad (\text{П.2.1})$$

где  $\underline{X}_m$  и  $\underline{X}$  – соответственно, комплексная амплитуда и комплексное действующее значения внешнего воздействия;  $\underline{Y}_m$  и  $\underline{Y}$  – соответственно,

комплексная амплитуда и комплексное действующее значения отклика четырёхполюсника.

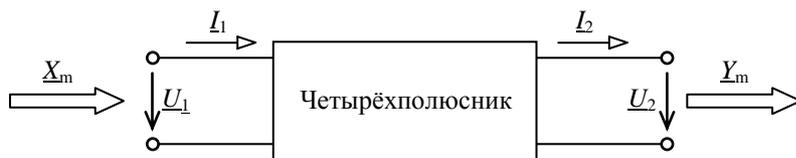


Рис. п.2.4. Схема четырёхполюсника при гармоническом воздействии

Комплексной частотной характеристикой (КЧХ) цепи называется отношение комплексных изображений отклика и воздействия:

$$H(j\omega) = \frac{Y_m}{X_m} = \frac{Y}{X} = \frac{Y \angle \psi_Y}{X \angle \psi_X} = \frac{Y}{X} \angle (\psi_Y - \psi_X), \quad (\text{п.2.2})$$

где  $X$  и  $Y$  – соответственно модули внешнего воздействия и отклика;  $\psi_X$  и  $\psi_Y$  – аргументы внешнего воздействия и отклика соответственно.

Комплексная частотная характеристика может быть записана в показательной

$$H(j\omega) = H(\omega) e^{j\psi_H(\omega)} = H(\omega) \angle \psi_H(\omega) \quad (\text{п.2.3})$$

или в алгебраической

$$H(j\omega) = H'(\omega) + jH'' \quad (\text{п.2.4})$$

формах.

Модуль КЧХ  $H(\omega)$  называется *амплитудно-частотной* характеристикой, а аргумент  $\psi_H(\omega)$  – *фазочастотной* характеристикой (ФЧХ). Это две важнейшие характеристики радиотехнических цепей.

Комплексные частотные характеристики делятся на *входные* и *передаточные*. Если отклик и воздействие рассматриваются на одних и тех же полюсах цепи (рис. п.2.2), КЧХ называется входной. Если отклик и воздействие рассматриваются на разных полюсах цепи (рис. п.2.3 и п.2.4), КЧХ называется передаточной.

Два вида входных характеристик. Если внешним воздействием является ток, а реакция (отклик) – напряжение, то КЧХ представляет собой комплексное входное сопротивление. Если внешним воздействием является напряжение, а реакция (отклик) – ток, то КЧХ представляет собой комплексное входную проводимость.

Комплексных передаточных характеристик (функций) четыре. Размерность передаточной КЧХ равна отношению размерностей отклика цепи и внешнего воздействия. Например, для схемы, показанной на

рис. п.2.4, можно записать четыре передаточные функции, в зависимости от того, что выберем внешним воздействием ( $\underline{U}_1$  или  $\underline{I}_1$ ), а что откликом ( $\underline{U}_2$  или  $\underline{I}_2$ ):

$$H_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \text{ – передаточная функция по напряжению,} \quad (\text{п.2.5})$$

$$H_I(j\omega) = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \text{ – передаточная функция по току,} \quad (\text{п.2.6})$$

$$H_Z(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \text{ – передаточное сопротивление,} \quad (\text{п.2.7})$$

$$H_Y(j\omega) = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \text{ – передаточная проводимость,} \quad (\text{п.2.8})$$

В ряде учебников можно найти другие обозначения передаточных характеристик:  $K_U(j\omega)$  – передаточная функция по напряжению;  $K_I(j\omega)$  – передаточная функция по току;  $Z(j\omega)$  – передаточное сопротивление;  $Y(j\omega)$  – передаточная проводимость. При графическом представлении комплексных частотных характеристик можно строить отдельно АЧХ и ФЧХ, либо отдельно вещественную  $H'$  и мнимую  $H''$  составляющие, которые однозначно выражаются через АЧХ и ФЧХ:

$$H'(\omega) = H(\omega) \cos \psi_H(\omega), \quad H''(\omega) = H(\omega) \sin \psi_H(\omega). \quad (\text{п.2.9})$$

Комплексную частотную характеристику можно в виде одной зависимости – *годографа* (рис. п.2.5). Годограф строится на комплексной плоскости и представляет собой геометрическое место концов вектора  $H(j\omega)$ , соответствующих частотам от нуля до бесконечности. Годограф КЧХ позволяет одновременно судить как об АЧХ и ФЧХ, так о зависимости вещественной  $H'(\omega)$  и мнимой  $jH''(\omega)$  составляющих КЧХ от частоты. Второе название годографа – амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ).

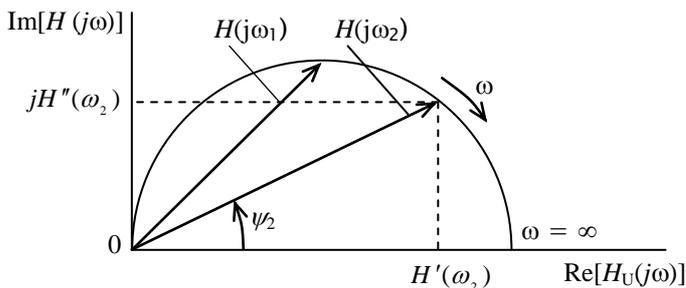


Рис. п.2.5. Годограф комплексной частотной характеристики цепи

На рис. п.2.5, в качестве примера, отображены для одной из частот ( $\omega_2$ ) вектор КЧХ  $H(j\omega_2)$  и его вещественная  $H'(\omega)$  и мнимая  $jH''(\omega)$  составляющие. Стрелка рядом с  $\omega$  показывает направление возрастания частоты. Частота возрастает от нуля до бесконечности.

КЧХ линейных цепей не зависят от амплитуды и начальной фазы внешнего воздействия, а определяются только структурой цепи и параметрами входящих в неё элементов.

### Комплексные частотные характеристики цепей с одним реактивным элементом

Рассмотрим комплексные частотные характеристики простейших цепей с одним реактивным элементом – ёмкостью или индуктивностью. Таких простейших цепей – четыре. Схемы их показаны на рис. п.2.6...п.2.9.

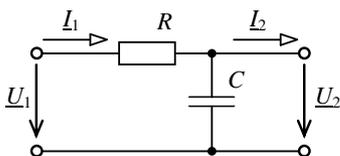


Рис. п.2.6

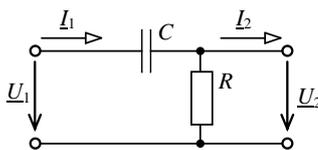


Рис. п.2.7

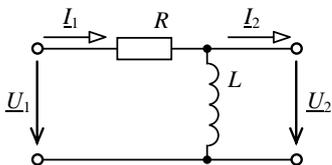


Рис. п.2.8

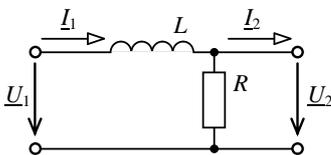


Рис. п.2.9

Обобщённая комплексная схема замещения четырёхполюсников, показанных на рис. П.2.6...П.2.9 показана на рис. П.2.10.

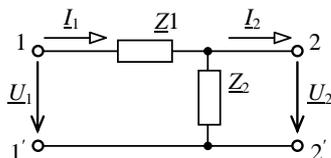


Рис. п.2.10

Комплексное входное сопротивление и комплексный коэффициент передачи можно рассматривать как со стороны выводов 1 и 1', так и со стороны выводов 2 и 2'. Входное сопротивление и комплексный коэффициент передачи зависят от сопротивления нагрузки, подключённой к выводам. Наиболее интересны случаи, когда сопротивление нагрузки равно нулю (короткое замыкание) или, когда сопротивление нагрузки бесконечно велико (холостой ход).

Входное сопротивление со стороны выводов 1 и 1' при холостом ходе на выводах 2 и 2'

$$Z_{11'XX}(j\omega) = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2, \quad (\text{п.2.10})$$

при коротком замыкании

$$Z_{11'KЗ}(j\omega) = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = \underline{Z}_1. \quad (\text{п.2.11})$$

Входное сопротивление со стороны выводов 2 и 2' при холостом ходе на выводах 1 и 1'

$$Z_{22'XX}(j\omega) = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \underline{Z}_2, \quad (\text{п.2.12})$$

при коротком замыкании

$$Z_{22'KЗ}(j\omega) = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{U_1=0} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (\text{п.2.13})$$

Найдём комплексный коэффициент передачи со стороны выводов 1 и 1' в режиме холостого хода на выводах 2 и 2'. В этом режиме через сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  протекает один и тот же ток

$$I_1 \Big|_{I_2=0} = \frac{U_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (\text{п.2.14})$$

В этом случае напряжение на выводах 2 и 2'

$$U_2 \Big|_{I_2=0} = \underline{Z}_2 I_1 \Big|_{I_2=0} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} U_1. \quad (\text{п.2.15})$$

Коэффициент передачи напряжения от выводов 1 и 1' к выводам 2 и 2'

$$H_{U21} \Big|_{I_2=0} = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (\text{п.2.16})$$

Коэффициент передачи напряжения от выводов 2 и 2' к выводам 1 и 1'

$$\underline{H}_{U12} \Big|_{I_1=0} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \Big|_{I_1=0} = 1 \quad (\text{п.2.17})$$

и не зависит от частоты внешнего воздействия.

Определим, в качестве примера, входное сопротивление со стороны выводов 1 и 1' при холостом ходе на выводах 2 и 2' для схемы, показанной на рис. п.2.6.

$$\underline{Z}_{11'} = R - j \frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle \text{arctg}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right). \quad (\text{п.2.18})$$

АЧХ входного сопротивления  $\underline{Z}_{11'}$ .

$$Z_{11'}(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (\text{п.2.19})$$

ФЧХ входного сопротивления  $\underline{Z}_{11'}$ .

$$\varphi_{11'}(\omega) = -\text{arctg} \frac{1}{\omega RC}. \quad (\text{П.2.20})$$

Графики АЧХ и ФЧХ входного сопротивления  $\underline{Z}_{11'}$  показаны на рис. П.2.11 и П.2.12.

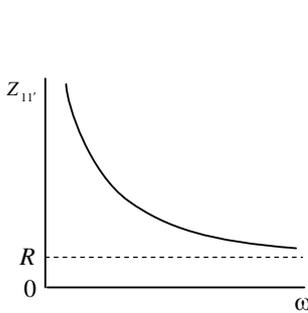


Рис. п.2.11. АЧХ входного сопротивления  $\underline{Z}_{11'}$

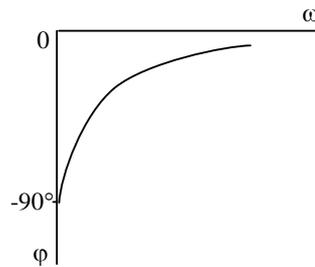


Рис. п.2.12. ФЧХ входного сопротивления  $\underline{Z}_{11'}$

Комплексный коэффициент передачи со стороны выводов 1 и 1' при холостом ходе на выводах 2 и 2' для схемы, показанной на рис. п.2.6

$$\underline{H}_{U21} \Big|_{I_2=0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}. \quad (\text{п.2.21})$$

Амплитудно-частотная характеристика полученной функции (упростим обозначения)

$$H_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (\text{п.2.22})$$

Фазочастотная характеристика полученной функции

$$\psi_U(\omega) = -\text{arctg} \omega RC. \quad (\text{п.2.23})$$

Графики АЧХ и ФЧХ полученной функции показаны на рис. п.2.13 и п.2.14.

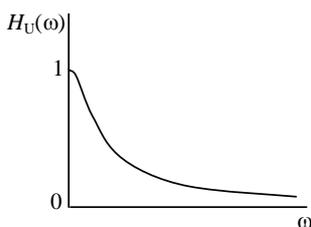


Рис. п.2.13. АЧХ передаточной функции  $\underline{H}_U$

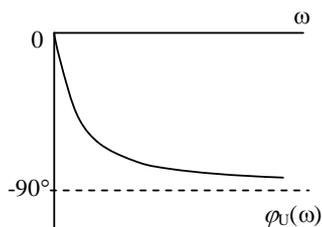


Рис. п.2.14. ФЧХ передаточной функции  $\underline{H}_U$

Годограф передаточной функции  $\underline{H}_U$  показан на рис. п.2.15.

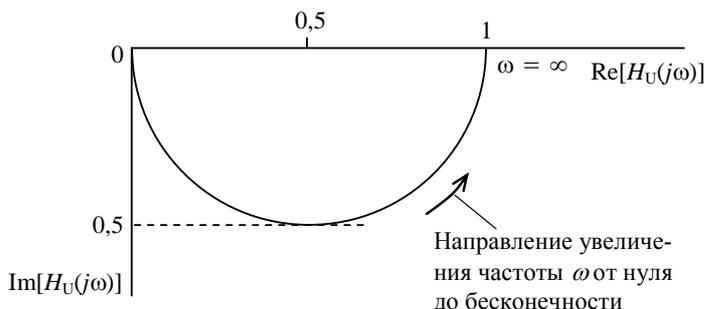


Рис. п.2.15. Годограф передаточной функции  $\underline{H}_U$

## Лабораторная работа 5 ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ RC

Цель работы – научиться снимать и анализировать амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики простых цепей  $RC$ .

При подготовке к работе воспользуйтесь конспектом лекций, учебником (Л. 1, § 3.1 стр. 161–173) и ниже расположенной теоретической частью работы.

Работа состоит из расчётной и экспериментальной частей и компьютерного моделирования исследуемой электрической цепи.

Расчётная часть выполняется *при подготовке* к лабораторной работе. Экспериментальная часть выполняется на стенде «Сигнал USB». Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*».

### Краткие теоретические сведения

Комплексные частотные характеристики (КЧХ) электрических цепей делятся на входные и передаточные. Если отклик и внешнее воздействие рассматриваются на одних и тех же зажимах цепи, то КЧХ называется *входной*. Если воздействие и отклик рассматриваются на разных зажимах, то КЧХ называется *передаточной*.

КЧХ линейных цепей не зависят от амплитуды и начальной фазы внешнего воздействия, а определяются только структурой цепи и параметрами, входящими в неё элементов.

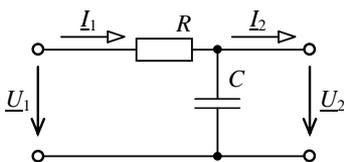


Рис. 5.1. Схема фильтра нижних частот

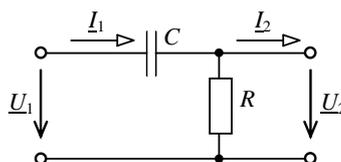


Рис. 5.2. Схема фильтра верхних частот

В данной работе рассматриваются комплексные передаточные характеристики по напряжению четырёхполюсников  $RC$ , схемы которых показаны на рис. 5.1 (фильтр нижних частот) и 5.2 (фильтр верхних частот). Вход-

ное напряжение и входной ток обозначены как  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_1$ , а выходные напряжение и ток как  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$ , соответственно. Передаточные характеристики по напряжению определены при холостом ходе на выходных выводах ( $I_2 = 0$ ).

Комплексная передаточная характеристика по напряжению для схемы рис. 5.1.

$$H_U(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \angle -\arctg \omega RC = H_U(\omega) \angle \varphi(\omega), \quad (5.1)$$

где  $H_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$  – амплитудно-частотная характеристика,

$\varphi(\omega) = -\arctg \omega RC$  – фазочастотная характеристика.

Комплексная передаточная характеристика по напряжению для схемы рис. 5.2.

$$H_U(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \angle (90^\circ - \arctg \omega RC) = H_U(\omega) \angle \varphi(\omega), \quad (5.2)$$

где  $H_U(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$  – амплитудно-частотная характеристика,

$\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg \omega RC$  – фазочастотная характеристика.

### Задание

Задание состоит из расчётной и двух экспериментальных частей. Первая экспериментальная часть выполняется на базе стенда «Сигнал-USB», вторая с использованием программы «Electronics Workbench». Параметры элементов для каждого варианта даны в табл. 5.1. при необходимости параметры элементов могут быть изменены. Пример выполнения задания дан ниже.

Таблица 5.1

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R, кОм	1	2	3	5	10	20	47	1	2	3
C, нФ	100	47	33	22	10	5,1	2	47	33	22

Вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$R$ , кОм	1	2	3	5	10	20	47	1	2	3
$C$ , нФ	33	22	10	5,1	2	47	33	22	10	5,1

Вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$R$ , кОм	1	2	3	5	10	20	47	1	2	3
$C$ , нФ	10	5,1	2	47	33	22	22	10	5,1	2

Вар.	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$R$ , кОм	1	2	3	5	10	20	47	1	2	3
$C$ , нФ	5,1	2	47	33	22	22	10	5,1	33	22

### Расчётная часть

1. Начертите схемы исследуемых цепей, выберите и запишите формулы, необходимые для расчёта (выполняется до прихода в лабораторию).

2. Уточните с помощью мультиметра значения сопротивления  $R$ , и ёмкости конденсатора  $C$  для Вашего варианта.

3. Рассчитайте верхнюю частоту  $f_{\text{В}}$  полосы пропускания ФНЧ (рис. 5.1)  $f_{\text{Н}}$  по уровню  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения передаточной функции. Эта же частота будет нижней частотой полосы пропускания ФВЧ (рис. 5.2).

4. Повторите пункт 3 для увеличенной приблизительно вдвое (предварительно уточнив мультиметром) ёмкости  $C$ .

### Исследование частотных характеристик цепи RC с помощью стенда «Сигнал-USB»

#### Определение влияния параметров $R$ и $C$ на граничные частоты

1. Ознакомьтесь с инструкцией по использованию стенда «Сигнал-USB».

2. Соберите на наборной плате схему рис. 5.1 и подключите её к генераторным и измерительным выводам.

3. Запустите компьютер и подключите к нему стенд «Сигнал-USB».

4. Настройте характеристикограф стенда с учётом рассчитанного для ФНЧ значения  $f_{\text{Н}}$  (от  $f = 0$  до  $f \approx 2 \dots 4 f_{\text{Н}}$ ).

5. Включите генератор и характериограф и получите на экране АЧХ и ФЧХ исследуемой цепи. Скопируйте их в отчёт.

6. По полученным графикам АЧХ и ФЧХ определите верхнюю граничную частоту  $f_B$  по уровню  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения АЧХ, угол сдвига фаз между входным и выходным напряжениями на граничной частоте  $\varphi(f_B)$ .

7. Вместо исходного конденсатора подключите конденсатор (конденсаторы) с емкостью примерно вдвое большей, чем исходная, и выполните пункты 5 и 6. *Настройки характериографа при этом не менять!*

8. Нанесите обе полученные АЧХ на одну систему координат.

9. Аналогично исследуйте схему рис. 5.2

10. По пунктам 6...9 сделайте выводы.

11. Нанесите АЧХ для исходных значений  $R$  и  $C$  схем рис. 5.1 и 5.2 на одну систему координат.

12. Сделайте выводы по пункту 11.

### **Построение годографа**

1. С помощью векторного вольтметра снимите ряд точек для построения годографа. Точки должны располагаться так, чтобы по возможности равномерно располагаться на годографе (смотри пример выполнения задания). Результаты измерений занесите в таблицу. Обязательно снимите точки для частот  $0,5f_B$  и  $2f_B$ .

2. Постройте годограф на комплексной плоскости.

3. Нанесите на годограф векторы выходного напряжения, соответствующие частотам  $0,5f_B$ ,  $f_B$  и  $2f_B$ .

4. Поменяйте местами резистор и конденсатор (рис. 5.2) и выполните пункты 1...3.

5. По полученным результатам сделайте и запишите в отчёт выводы.

### **Компьютерное моделирование частотных характеристик цепи RC**

Компьютерное моделирование частотных характеристик цепи  $RC$  проводится с помощью пакета «*Electronics Workbench*»:

1. Соберите на экране монитора схему рис. 5.1 с подключённым характериографом. Значения параметров  $R$  и  $C$  установите те же, что и при исследовании на стенде «*Сигнал – USB*».

2. Настройте характериограф.

3. По полученным графикам АЧХ и ФЧХ определите верхнюю граничную частоту  $f_B$  по уровню  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения АЧХ и угол сдвига фаз между входным и выходным напряжениями на граничной частоте  $\varphi(f_B)$ .

4. Вместо исходного конденсатора подключите конденсатор (конденсаторы) с емкостью примерно вдвое большей, чем исходная ёмкость и выполните пункт 3. *Настройки характеристики при этом не менять!*

5. Нанесите обе полученные АЧХ на одну систему координат.

6. По полученным результатам сделайте выводы.

### Пример выполнения задания

#### Расчётная часть

Пусть для схемы рис. 5.1 даны номинальные значения:  $R = 1$  кОм,  $C = 22$  нФ.

Уточнённые с помощью мультиметра значения:  $R = 0,990$  кОм,  $C = 20,3$  нФ.

Заданные значения  $R$  и  $C$  (уточнённые), а также рассчитанные по уровню  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения АЧХ частоты  $f_B$  и  $f_H$ , углы сдвига фаз между входным и выходным напряжениями на граничных частотах  $\varphi(f_B)$  и  $\varphi(f_H)$  для схем рис. 5.1 и 5.2 даны в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Дано		Схема рис. 5.1		Схема рис. 5.2	
$R$ , кОм	$C$ , нФ	$f_B$ , кГц	$\varphi(f_B)$	$f_H$ , кГц	$\varphi(f_H)$
0,990	20,3	7,921	-45°	7,921	45°

В табл. 5.3 даны значения величин, указанные в табл. 5.2, но при увеличенной ёмкости  $C$ .

Таблица 5.3

Дано		Схема рис. 5.1		Схема рис. 5.2	
$R$ , кОм	$C$ , нФ	$f_B$ , кГц	$\varphi(f_B)$	$f_H$ , кГц	$\varphi(f_H)$
0,990	40,5	3,960	-45°	3,960	45°

### Исследование частотных характеристик цепи $RC$ с помощью стенда «Сигнал-USB»

На рис. 5.3 показаны, полученные в результате опыта, графики АЧХ и ФЧХ цепи рис. 5.1 для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 20,3$  нФ в большом диапазоне частот. Для более точного определения  $f_B$ ,  $\varphi(f_B)$  частотный диапазон уменьшен, как показано на рис. 5.4. На рис. 5.5 по-

казаны, полученные из опыта в уменьшенном диапазоне частот, графики АЧХ и ФЧХ цепи рис. 5.1 для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 40,5$  нФ. Крестиками на всех графиках помечены значения, соответствующие граничной частоте  $f_B$  по уровню  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения АЧХ. Реальные значения параметров данной цепи, определённые из опытных графиков АЧХ и ФЧХ для ёмкостей  $C = 29,3$  нФ и  $C = 40,5$  нФ даны в табл. 5.4.

Таблица 5.4

$C = 20,3$ нФ		$C = 40,5$ нФ	
$f_{B1}$ , кГц	$\varphi^\circ(f_{B1})$	$f_{B2}$ , кГц	$\varphi^\circ(f_{B2})$
7,4	-42°	3,7	-42°

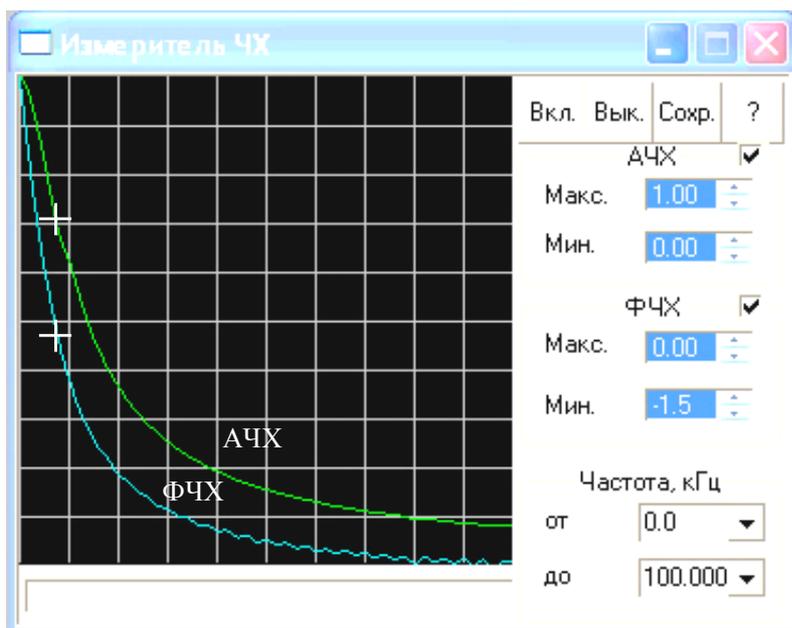


Рис. 5.3. АЧХ и ФЧХ цепи RC (рис. 5.1) для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 20,3$  нФ

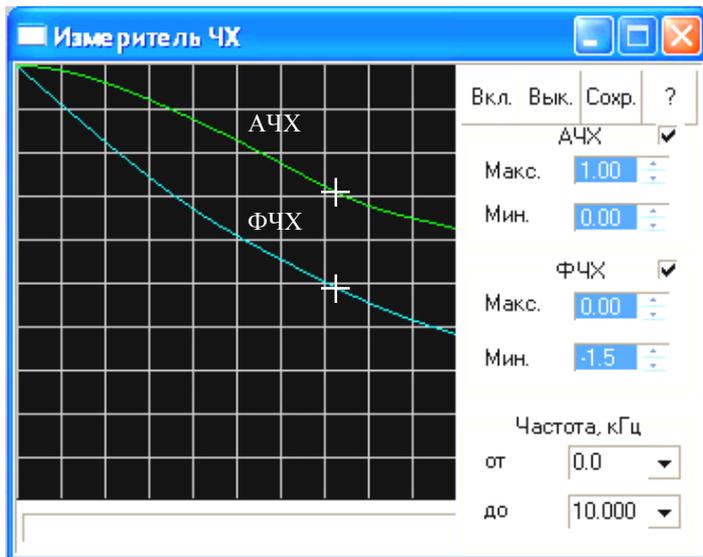


Рис. 5.4. АЧХ и ФЧХ цепи RC (рис. 5.1) для  $R = 0,99$  кОм и  $C = 20,3$  нФ

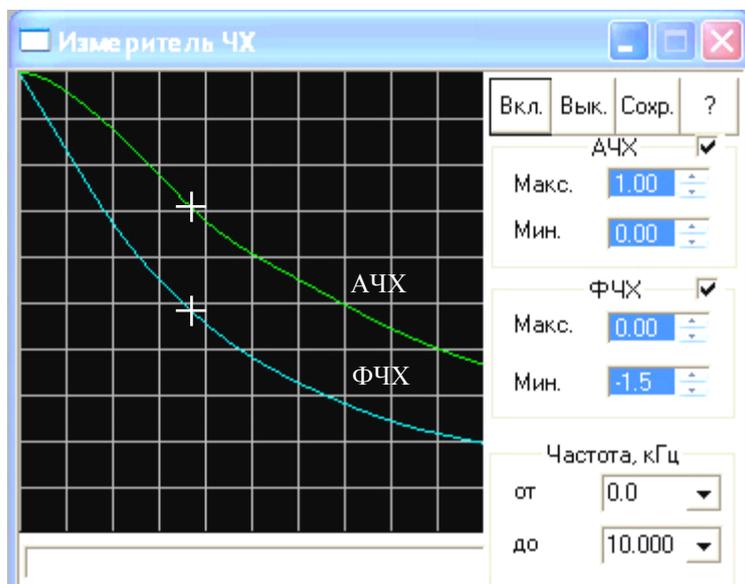


Рис. 5.5. АЧХ и ФЧХ цепи RC (рис. 5.1) для  $R = 0,99$  кОм и  $C = 40,5$  нФ

Сопоставляя рис. 5.4 и 5.5 можно увидеть, что при увеличении постоянной времени графики АЧХ и ФЧХ сдвигаются влево. Также можно заметить, что при частотах близких к  $f_B$  значение ФЧХ близко к  $45^\circ$ .

Аналогично исследуем цепь, схема которой показана на рис. 5.2.

### Годограф

Так как входное напряжение равно 1 В, а его начальная фаза равна нулю, то значения АЧХ и ФЧХ четырёхполюсника RC 1 численно равны соответственно модулю и аргументу выходного напряжения.

С помощью векторного вольтметра получена таблица значений АЧХ и ФЧХ в показательной форме комплексных чисел для ряда частот (табл. 5.5), для построения годографа.

Таблица 5.5

$f$ , кГц	1.0	2.0	3.0	3.861	5.0	6.0	7.0
$U_{Cm}$ , В	1.01	0.98	0.94	0.9	0.85	0.80	0.75
$\varphi$ , град.	-6.72	-15.07	-21.9	-27.26	-33.4	-38.3	-42.7

$f$ , кГц	7.723	8.5	9.0	10.0	12.0	15.0	15.445
$U_{Cm}$ , В	0.72	0.68	0.66	0.62	0.55	0.46	0.45
$\varphi$ , град.	-42.5	-47.8	-49.2	-52.1	-56.7	-61.8	-62.4

$f$ , кГц	20.0	30.0	40.0	50.0	100.0
$U_{Cm}$ , В	0.36	0.25	0.19	0.15	0.082
$\varphi$ , град.	-67.5	-74.1	-75.6	-76.6	-81.0

Для большей наглядности построения годографа перейдём от показательной формы записи АЧХ и ФЧХ к алгебраической (табл. 5.6).

Таблица 5.6

$f$ , кГц	1.0	2.0	3.0	3.861	5.0	6.0	7.0
$ReU_{Cm}$ , В	1	0,946	0,872	0,8	0,71	0,628	0,551
$ImU_{Cm}$ , В	-0,118	-0,255	-0,351	-0,412	-0,468	-0,496	-0,509

$f$ , кГц	7.723	8.5	9.0	10.0	12.0	15.0	15.445
$ReU_{Cm}$ , В	0,506	0,457	0,431	0,381	0,302	0,217	0,208
$ImU_{Cm}$ , В	-0,512	-0,504	-0,5	-0,489	-0,46	-0,405	-0,399

$f$ , кГц	20.0	30.0	40.0	50.0	100.0
$ReU_{Cm}$ , В	0,138	0,068	0,047	0,035	0,013
$ImU_{Cm}$ , В	-0,333	-0,24	-0,184	-0,146	-0,081

На рис. 5.6 показан годограф, построенный по данным табл. 5.5. Отдельно показаны векторы комплексной частотной характеристики, соответствующими частотам  $0,5f_B$ ,  $f_B$  и  $2f_B$ .

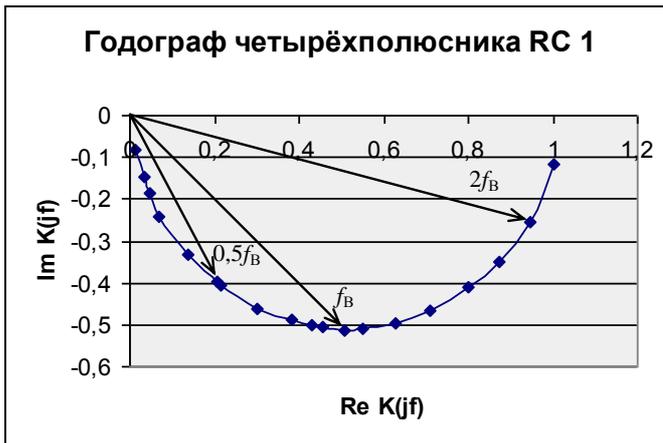


Рис. 5.6. Годограф четырёхполюсника RC 1

### Исследование частотных характеристик цепи RC с помощью программы «EWB-512»

Получим с помощью программы «EWB-512» АЧХ и ФЧХ схем, показанных на рис. 5.1 и 5.2, для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 20,3$  нФ, и наложим их друг на друга.

Схема двух исследуемых цепей с характернографом показаны на рис. 5.7.

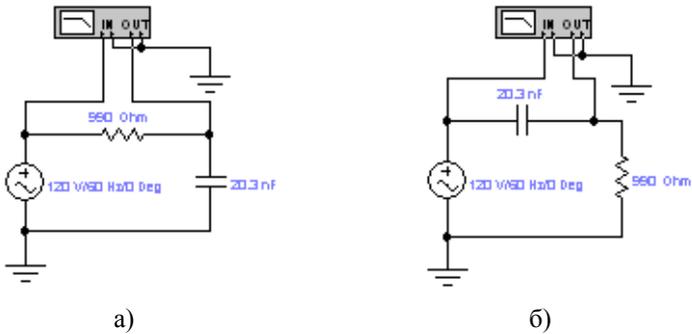


Рис. 5.7. Схемы четырёхполюсника  $RC$  с характеристикографом

На рис. 5.8 и 5.9 показаны графики АЧХ и ФЧХ, для схемы рис. 5.7а для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 20,3$  нФ.

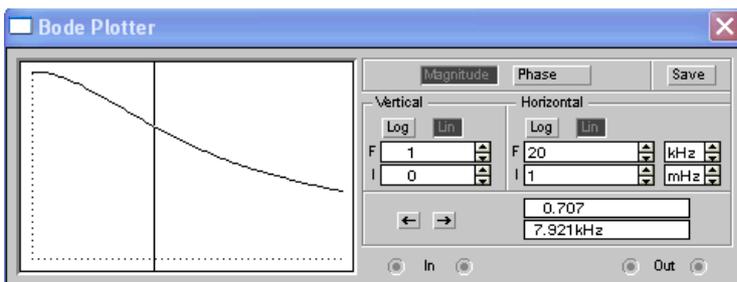


Рис. 5.8. АЧХ четырёхполюсника  $RC$  для схемы рис. 5.7а

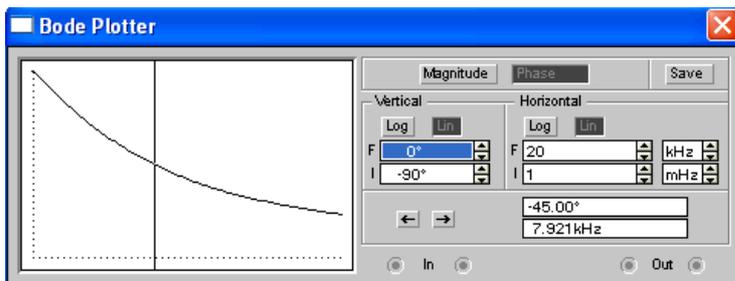


Рис. 5.9. ФЧХ четырёхполюсника  $RC$  для схемы рис. 5.7б

На рис. 5.10 и 5.11 показаны графики АЧХ и ФЧХ, для схемы рис. 5.7б для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 20,3$  нФ.

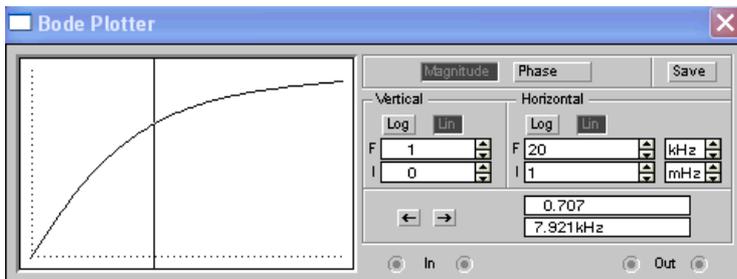


Рис. 5.10. АЧХ четырёхполюсника  $RC$  для схемы рис. 5.7б

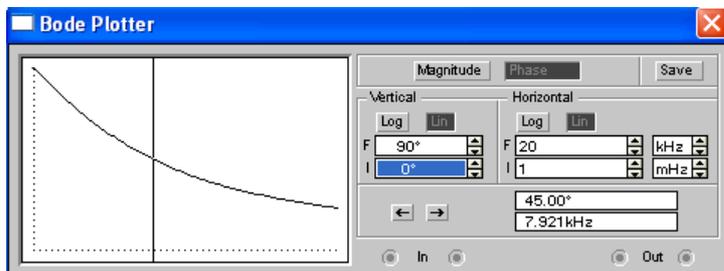


Рис. 5.11. ФЧХ четырёхполюсника  $RC$  для схемы рис. 5.7б

Из полученных графиков АЧХ и ФЧХ (рис. 5.8...5.11) для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 20,3$  нФ, видно очень хорошее совпадение расчётной (7.921 Гц) и экспериментальной (7.921 Гц) граничных частот и углов сдвига фаз между входным и выходным напряжениями четырёхполюсников на граничной частоте (соответственно  $-45^\circ$  и  $+45^\circ$ ) рис. 5.7а и 5.7б.

Для более наглядного отображения полученных результатов, на рис. 5.14 показаны наложенные друг на друга АЧХ рис. 5.7а и 5.7б. ФЧХ для рис. 5.7а и 5.7б наложить друг на друга невозможно т.к. они имеют разные знаки.

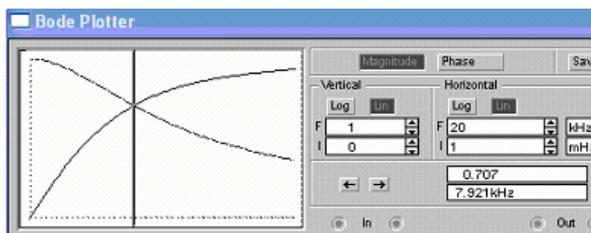


Рис. 5.12. АЧХ схем рис. 5.7а и 5.7б, изображённые на одной системе координат

Увеличим ёмкость приблизительно в два раза и аналогично получим АЧХ (рис. 5.13 и 5.14 соответственно) и ФЧХ (рис. 5.15 и 5.16 соответственно) для схем рис. 5.7а и 5.7б. Совместим полученные АЧХ на одной системе координат (рис. 5.17).

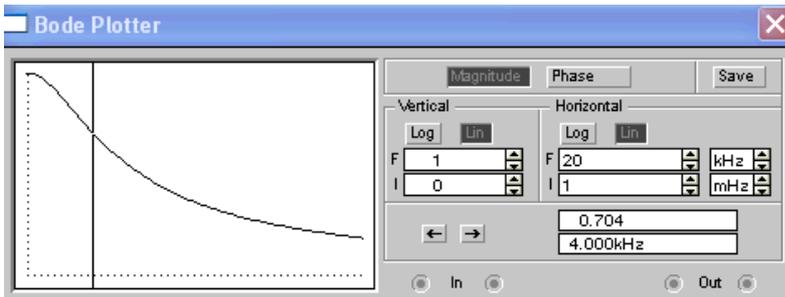


Рис. 5.13. АЧХ рис. 5.7а для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 40,5$  нФ

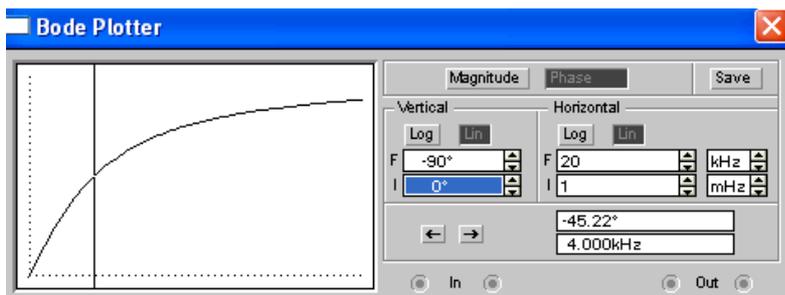


Рис. 5.14. ФЧХ рис. 5.7а для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 40,5$  нФ

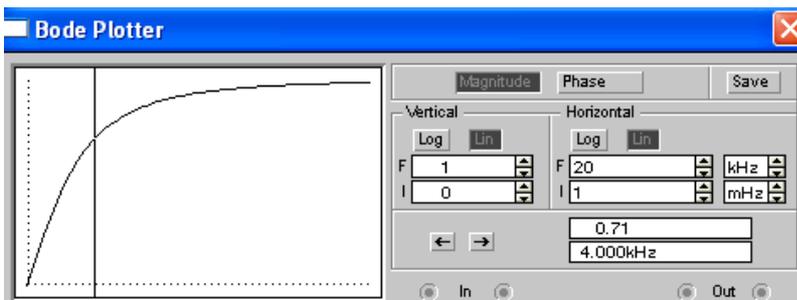


Рис. 5.15. АЧХ рис. 5.7б для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 40,5$  нФ

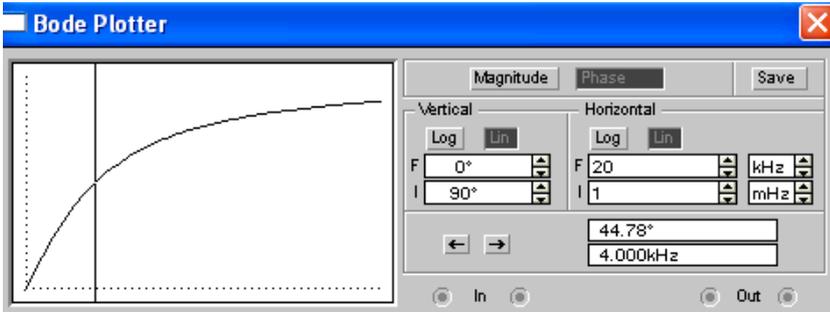


Рис. 5.16. ФЧХ рис. 5.6 для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 40,5$  нФ

Из-за того, что в программе EWB-512 не удалось точно установить уровень  $1/\sqrt{2} = 0,707$ , имеются отличия расчётных и экспериментальных значений АЧХ (3,960 кГц и 4,0 кГц, соответственно) и ФЧХ ( $-45^\circ$  и  $-45,22^\circ$  для схемы рис. 5.7а и  $45^\circ$  и  $-45^\circ$  и  $44,78^\circ$  для схемы рис. 5.7б).

Сопоставляя рис. 5.10 и рис. 5.15, видим, что граничная частота при одном и том же сопротивлении  $R$ , будет тем меньше, чем больше ёмкость  $C$  (аналогично будет происходить и при увеличении сопротивления  $R$ ).

Для схемы рис. 5.7а на рис. 5.19 показаны, в одной системе координат АЧХ для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 20,3$  нФ (1) и для  $R = 0,990$  кОм и  $C = 40,5$  нФ (5.2). Визирные линии пересекают АЧХ в точках, соответствующих уровню  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения АЧХ, что соответствует верхним граничным частотам  $f_{B1}$  и  $f_{B2}$ .

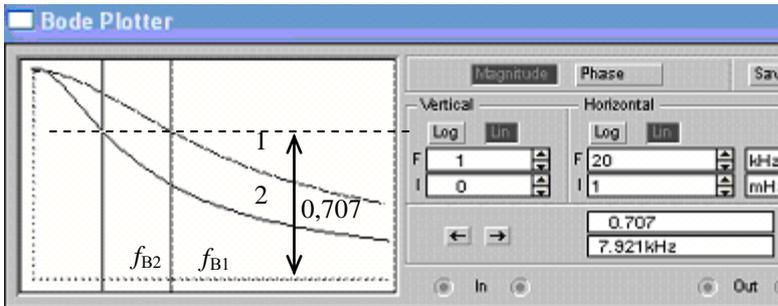


Рис. 5.17. АЧХ схемы рис. 5.7а для  $C = 20,3$  нФ (5.1) и для  $C = 40,5$  нФ (5.2)

Аналогично наложить друг на друга АЧХ для  $C = 20.3$  нФ и для  $C = 40.5$  нФ схемы рис. 5.7б.

### Контрольные вопросы

1. Поясните понятие «частотно-избирательная цепь».
2. Укажите разновидности комплексных частотных характеристик.
3. Укажите последовательность нахождения формул АЧХ и ФЧХ.
4. Поясните понятия «нижняя граничная частота» и «верхняя граничная частота».
5. Поясните понятие «полоса пропускания».
6. Укажите значения АЧХ и ФЧХ цепей, схемы которых показаны на рис. 5.1 и 5.2, на граничной частоте по уровню  $1/\sqrt{2}$ .
7. Выведите формулы АЧХ и ФЧХ цепей, схемы которых показаны на рис. 5.1 и 5.2.
8. Поясните понятие «годограф».
9. Опишите способы построения годографа.

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ 6 И 7

### Понятие о резонансе в электрических цепях

Амплитуда отклика цепей, содержащих одновременно индуктивность и ёмкость, может резко изменяться, когда частота внешнего воздействия приближается к определенному значению – резонансной частоте. Явление резкого возрастания амплитуды отклика цепи при приближении частоты внешнего воздействия к резонансной частоте называется *резонансом*. Такое определение резонанса заимствовано из механики и справедливо только для цепей с малыми потерями. Резонанс, отвечающий этому определению, условно называется *амплитудным*.

В теории цепей обычно используют другое определение резонанса, которое применяется как для цепей с малыми, так и для цепей с большими потерями. Под *резонансом* понимают такой режим работы электрической цепи, содержащей емкости и индуктивности, при котором реактивные составляющие входных сопротивления и проводимости цепи равны нулю. Резонанс, отвечающий данному определению, условно называется *фазовым*. При фазовом резонансе величина отклика цепи может, как резко возрастать при приближении частоты внешнего воздействия к резонансной частоте, так и не возрастать. Можно показать, что резонансные частоты, соответствующие амплитудному и фазовому резонансам, совпадают только в идеализированном случае, когда потери в цепи равны нулю.

На резонансной частоте входное сопротивление и входная проводимость электрической цепи имеют чисто резистивный характер. Входное напряжение и входной ток при резонансе совпадают по фазе.

Простейшими электрическими цепями, в которых наблюдается явление резонанса, являются *одиночные колебательные контуры*, представляющие собой цепи, состоящие из конденсатора ( $Z_C$ ) и индуктивной катушки ( $Z_K$ ).

В зависимости от способа подключения источника энергии, различают *последовательный* колебательный контур и *параллельный* колебательный контуры. В последовательном колебательном контуре (рис. п.3.1) источник энергии включен последовательно с индуктивной катушкой и конденсатором. В параллельном колебательном контуре

(рис. п.3.2) источник энергии включен параллельно с индуктивной катушкой и конденсатором.

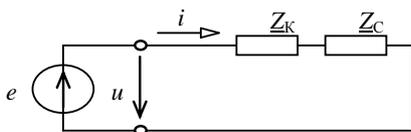


Рис. п.3.1. Схема последовательного колебательного контура

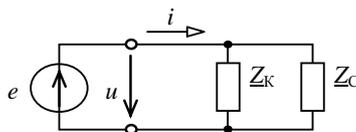


Рис. п.3.1. Схема параллельного колебательного контура

Ниже рассмотрен только последовательный колебательный контур, т.к. параметры параллельного колебательного контура практически равны параметрам последовательного колебательного контура, особенно при высоких добротностях катушки индуктивности и конденсатора.

При изучении последовательной  $RLC$  – цепи, было установлено, что ее входное сопротивление может иметь чисто резистивный характер, если мнимая составляющая входного сопротивления индуктивности по абсолютному значению равна мнимой составляющей входного сопротивления ёмкости ( $X_L = |X_C|$ ). В этом случае напряжение на емкости равно по амплитуде и противоположно по фазе напряжению на индуктивности ( $U_L = -U_C$ ), а напряжение на входе цепи  $\underline{U}$  равно напряжению на сопротивлении  $\underline{U}_R$  и совпадает по фазе с входным током  $\underline{I}$ . Такая разновидность резонанса получила название *резонанса напряжений*.

В параллельной  $RLC$  – цепи входная проводимость может иметь чисто резистивный характер, если мнимые составляющие входных проводимостей индуктивности и емкости равны по абсолютному значению ( $|b_L| = b_C$ ). В этом случае ток индуктивности равен по амплитуде и противоположен по фазе току емкости ( $I_L = -I_C$ ), а входной ток цепи  $\underline{I}$  равен току через резистивное сопротивление  $\underline{I}_R$  и совпадает по фазе с входным напряжением  $\underline{U}$ . Такая разновидность резонанса называется резонансом токов.

Для анализа процессов, протекающих в контуре, необходимо перейти от его принципиальной схемы к эквивалентной путем замены каждого реального элемента его эквивалентной схемой.

Воспользуемся простейшими последовательной и параллельной схемами замещения индуктивной катушки и конденсатора.

Последовательная и параллельная схемы замещения катушки показаны на рис. п.3.3.

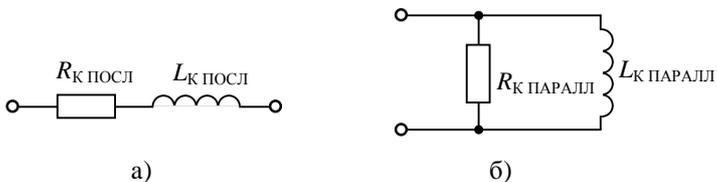


Рис. п.3.3. Простейшие схемы замещения катушки индуктивности: последовательная а) и параллельная б)

Векторные диаграммы, иллюстрирующие фазовые соотношения между токами и напряжениями последовательной цепи  $RL$  моделирующей индуктивную катушку, показаны на рис. п.3.4 и п.3.5.

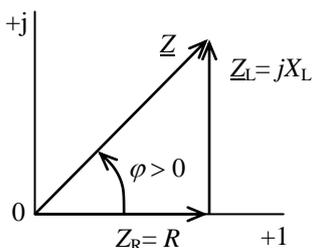


Рис. п.3.4. Треугольник сопротивлений, соответствующий простейшей последовательной схеме замещения катушки индуктивности

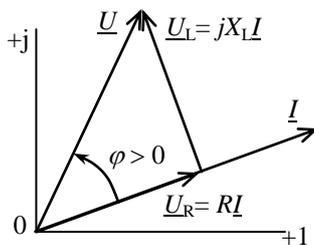


Рис. п.3.5. Векторная диаграмма тока и напряжений, соответствующая простейшей последовательной схеме замещения катушки индуктивности

Последовательная и параллельная схемы замещения конденсатора показаны на рис. п.3.6.

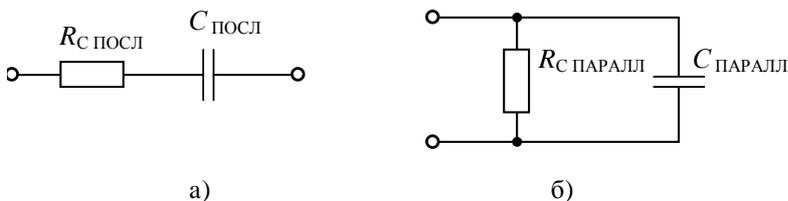


Рис. п.3.6. Простейшие схемы замещения конденсатора: последовательная а) и параллельная б)

Векторные диаграммы, иллюстрирующие фазовые соотношения между токами и напряжениями последовательной цепи  $RC$  моделирующей конденсатор, показаны на рис. п.3.7 и п.3.8.

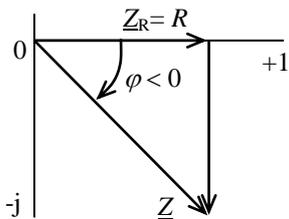


Рис. п.3.7. Треугольник сопротивлений, соответствующий простейшей последовательной схеме замещения конденсатора

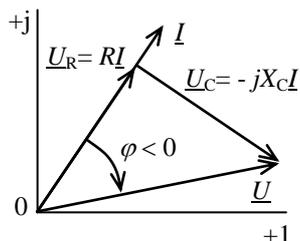


Рис. п.3.8. Векторная диаграмма тока и напряжений, соответствующая простейшей последовательной схеме замещения конденсатора

Из векторных диаграмм видно, что вследствие потерь сдвиг фаз между напряжением и током, как на зажимах катушки индуктивности, так и на зажимах конденсатора меньше  $\pi/2$ . Очевидно, что чем меньше будут потери в катушке индуктивности и в конденсаторе, тем ближе к  $\pi/2$  будет сдвиг фаз  $|\varphi|$ , и тем ближе будут свойства реальной катушки индуктивности и реального конденсатора к идеальной индуктивности и к идеальной ёмкости.

Количественно степень приближения свойств реальных элементов к свойствам идеальных элементов оценивается их *добротностью*. Добротность определяется как модуль тангенса сдвига фаз между напряжением и током на зажимах соответствующего элемента на данной частоте:

$$Q = |\operatorname{tg} \varphi| = \operatorname{tg} |\varphi|. \quad (\text{п.3.1})$$

Из векторных диаграмм рисунков видно, что добротность катушки индуктивности

$$Q_L = \frac{X_L}{R_{L \text{ посл}}} = \frac{\omega L_{\text{посл}}}{R_{L \text{ посл}}}, \quad (\text{п.3.2})$$

а добротность конденсатора

$$Q_C = \frac{|X_C|}{R_{C \text{ посл}}} = \frac{1}{\omega R_{C \text{ посл}} C_{\text{посл}}}. \quad (\text{п.3.3})$$

В колебательных контурах радиотехнических устройств стремятся использовать элементы с высокой добротностью. Добротность катушек индуктивности обычно составляет десятки и сотни, а добротность конденсаторов сотни и тысячи.

Исходя из выше полученных формул (п.3.1, п.3.2, п.3.3) можно заключить, что

$$\frac{\omega L_{ПОСЛ}}{R_{L_{ПОСЛ}}} \gg 1; \quad \omega C_{ПОСЛ} R_{C_{ПОСЛ}} \ll 1.$$

Экспериментально установлено, что в достаточно широком диапазоне частот  $R_{L_{ПОСЛ}}$  и  $L_{ПОСЛ}$  можно приближённо считать не зависящими от частоты.

Используя формулы эквивалентного преобразования последовательного соединения в параллельное, получим параметры параллельной схемы замещения катушки индуктивности

$$L_{ПАР} = L_{ПОСЛ} \left[ 1 + \left( \frac{R_{L_{ПОСЛ}}}{\omega L_{ПОСЛ}} \right)^2 \right]; \quad (п.3.4)$$

$$R_{L_{ПАР}} = R_{L_{ПОСЛ}} \left[ 1 + \left( \frac{\omega L_{ПОСЛ}}{R_{L_{ПОСЛ}}} \right)^2 \right]. \quad (п.3.5)$$

С учётом полученных выше выражений (п.3.4, п.3.5), можно записать

$$L_{ПАР} \approx L_{ПОСЛ} = L; \quad R_{L_{ПАР}} \approx \frac{\omega^2 L^2}{R_{L_{ПОСЛ}}}$$

Таким образом, у индуктивных катушек с высокой добротностью значения индуктивностей параллельной и последовательной схем замещения приблизительно одинаковы и могут считаться не зависящими от частоты; значение сопротивления в параллельной схеме замещения обратно пропорционально значению сопротивления последовательной схемы замещения и сильно зависит от частоты.

Аналогичным образом найдем соотношения между параметрами элементов параллельной и последовательной схем замещения конденсатора:

$$C_{ПАР} = \frac{C_{ПОСЛ}}{1 + (\omega C_{ПОСЛ} R_{C_{ПОСЛ}})^2} \approx C_{ПОСЛ} = C; \quad (п.3.6)$$

$$R_{C_{ПАР}} = R_{C_{ПОСЛ}} \left( 1 + \frac{1}{(\omega C_{ПОСЛ} R_{C_{ПОСЛ}})^2} \right) \approx \frac{1}{\omega^2 C^2 R_{C_{ПОСЛ}}}. \quad (п.3.7)$$

Экспериментально установлено, что в достаточно широком диапазоне частот  $R_{C \text{ ПАР}}$  и  $C_{\text{ПАР}}$  можно приближённо считать не зависящими от частоты. Из соотношений (п.3.6, п.37) следует, что у конденсаторов с высокой добротностью значения емкостей в последовательной и параллельной схемах замещения приблизительно одинаковы и могут считаться не зависящими от частоты; сопротивление  $R_{C \text{ ПОСЛ}}$  обратно пропорционально сопротивлению  $R_{C \text{ ПАР}}$ :

$$R_{C \text{ ПОСЛ}} \approx \frac{1}{\omega^2 C^2 R_{C \text{ ПАР}}}$$

и зависит от частоты.

Между сопротивлениями потерь индуктивной катушки  $R_L$  и конденсатора  $R_C$ , как правило, выполняются соотношения

$$R_{L \text{ ПОСЛ}} \gg R_{C \text{ ПОСЛ}} ; \quad R_{L \text{ ПАР}} \ll R_{C \text{ ПАР}} .$$

### Последовательный колебательный контур

#### Параметры элементов контура и их схемы замещения.

#### Эквивалентная схема последовательного колебательного контура

Последовательный колебательный контур представляет собой электрическую цепь, содержащую индуктивную катушку ( $Z_L$ ) и конденсатор ( $Z_C$ ), включенные последовательно с источником энергии  $e$  (рис. п.3.1).

Для анализа процессов в последовательном колебательном контуре удобно воспользоваться последовательными схемами замещения индуктивной катушки, конденсатора и источника энергии. Представляя каждый из этих элементов его последовательной схемой замещения, получим эквивалентную схему последовательного колебательного контура (рис. п.3.9).

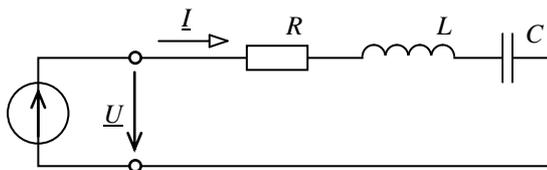


Рис. п.3.9. Эквивалентная схема последовательного колебательного контура

Пренебрегая сопротивлением источника, и учитывая соотношения, полученные выше, можно записать

$$R = R_{L \text{ ПОСЛ}} + R_{C \text{ ПОСЛ}} \approx R_{L \text{ ПОСЛ}} . \quad (\text{п.3.8})$$

$R$  – эквивалентное сопротивление контура, которое практически не зависит от частоты.

Таким образом, исследование последовательного колебательного контура сводится к исследованию последовательной цепи  $RLC$ , питающейся от идеального источника напряжения.

### **Резонансная частота, характеристическое сопротивление и добротность контура**

Мнимая составляющая входного сопротивления контура

$$\text{Im}[Z] = X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L + X_C \quad (\text{п.3.9})$$

на резонансной частоте должна быть равна нулю

$$\text{Im}[Z]_{\omega=\omega_0} = [X_L + X_C]_{\omega=\omega_0} = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 , \quad (\text{п.3.10})$$

или

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} ;$$

тогда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \quad (\text{п.3.11})$$

или

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} . \quad (\text{п.3.12})$$

Величины индуктивного или ёмкостного сопротивлений на резонансной частоте (на резонансной частоте они равны) называется характеристическим сопротивлением контура и обозначается буквой  $\rho$

$$X_{L_0} = X_{C_0} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \rho . \quad (\text{п.3.13})$$

Подставив в выражение для характеристического сопротивления  $\rho$ , выражение для резонансной частоты  $\omega_0$ , видим, что характеристическое сопротивление не зависит от частоты и определяется только параметрами реактивных элементов контура

$$\rho = X_{L_0} = X_{C_0} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} . \quad (\text{п.3.14})$$

На резонансной частоте входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и равно сопротивлению потерь контура

$$\underline{Z}|_{\omega=\omega_0} = R. \quad (\text{п.3.15})$$

Действующее значение тока контура на резонансной частоте

$$I = \frac{U}{R}, \quad (\text{п.3.16})$$

где  $U$  – действующее значение входного напряжения контура.

Действующие значения напряжений на реактивных элементах контура на резонансной частоте

$$U_L|_{\omega=\omega_0} = U_C|_{\omega=\omega_0} = \omega_0 LI = \frac{1}{\omega_0 C} I = \rho I. \quad (\text{п.3.17})$$

Под *добротностью контура*  $Q$  понимают отношение действующего значения напряжения на каком-либо реактивном элементе на резонансной частоте к действующему значению входного напряжения контура.

$$Q = \frac{U_L}{U} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{U_C}{U} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{\rho}{R}. \quad (\text{п.3.18})$$

Добротность контура можно выразить через параметры его элементов

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (\text{п.3.19})$$

Из выражения (П.319) следует, что добротность на неизменной резонансной частоте растёт с уменьшением сопротивления потерь  $R$  и с увеличением характеристического сопротивления  $\rho$ .

Добротность колебательного контура может быть выражена через добротности его элементов на резонансной частоте. Рассматривая величину *затухания контура*  $d$

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}$$

и учитывая, что сопротивление потерь контура равно сумме сопротивлений потерь катушки индуктивности и конденсатора последовательной схемы замещения

$$\frac{1}{Q} = \frac{R_{L \text{ посл}}}{\omega_0 L} + \omega_0 C R_{C \text{ посл}}. \quad (\text{п.3.20})$$

Учитывая, что величины  $\frac{\omega_0 L}{R_{L \text{ посл}}}$  и  $\frac{1}{\omega_0 C R_{C \text{ посл}}}$  равны добротностям катушки индуктивности и конденсатора на резонансной частоте:

$$Q_{L_0} = \frac{\omega_0 L}{R_{L \text{ посл}}} ; Q_{C_0} = \frac{1}{\omega_0 C R_{C \text{ посл}}} ,$$

получаем простое выражение, связывающее добротность контура с добротностями катушки индуктивности и конденсатора на резонансной частоте:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{L_0}} + \frac{1}{Q_{C_0}} \quad \text{или} \quad Q = \frac{Q_{L_0} Q_{C_0}}{Q_{L_0} + Q_{C_0}} . \quad (\text{п.3.21})$$

Анализ выражения (п.3.21) показывает, что добротность контура не может превышать добротности любого из его элементов. Так как обычно  $Q_{C_0} \gg Q_{L_0}$ , то добротность контура определяется в основном добротностью катушки индуктивности.

### Энергетические процессы в последовательном колебательном контуре

При резонанса входное напряжение и ток в последовательном колебательном контуре совпадают по фазе. Учитывая, что напряжение на индуктивности опережает ток на  $90^\circ$ , а напряжение на ёмкости отстает от тока на  $90^\circ$  начертим графики тока и напряжений на элементах контура (рис. п.3.10).

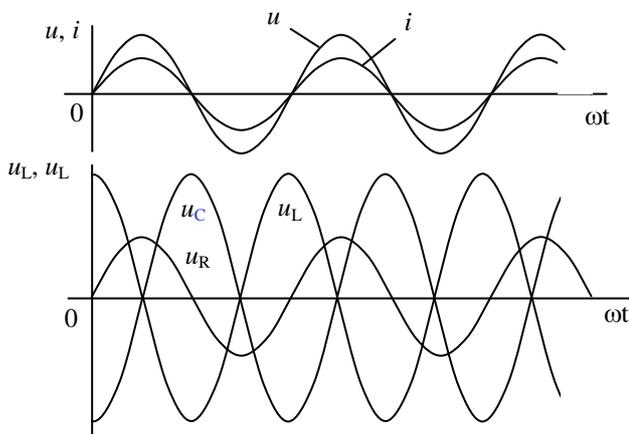


Рис. п.3.10. Графики тока  $i$  и напряжений  $u$ ,  $u_R$ ,  $u_L$ ,  $u_C$  при резонансе

Пусть  $u = U_m \sin \omega_0 t$ ,  $i = I_m \sin \omega_0 t$ . Тогда мгновенная мощность

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m I_m \sin^2(\omega_0 t) = U_m I_m \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2} = \\ &= UI - UI \cos 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (\text{п.3.22})$$

Для уяснения энергетических процессов определим сумму энергий магнитного  $w_M$  и электрического  $w_\Delta$  полей контура в произвольный момент времени

$$w = w_M + w_\Delta. \quad (\text{п.3.23})$$

Пусть при резонансе ток в контуре  $i = I_m \sin \omega_0 t$ . Напряжение на ёмкости

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}).$$

Суммарная энергия

$$\begin{aligned} w = w_M + w_\Delta &= \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_C^2}{2} = \\ &= \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{CU_{Cm}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t \end{aligned} \quad (\text{п.3.24})$$

Но

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega_0 C} I_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m,$$

откуда

$$\frac{CU_{Cm}^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2},$$

и, следовательно,

$$w = w_M + w_\Delta = \frac{LI_m^2}{2} + \frac{CU_{Cm}^2}{2} = const, \quad (\text{п.3.25})$$

т.е. сумма энергий магнитного и электрического полей с течением времени не изменяется. Уменьшение энергии электрического поля сопровождается увеличением энергии магнитного поля, и наоборот.

Энергия, поступающая в контур при резонансе от источника питания, в любой момент времени целиком переходит в тепло. Поэтому для источника питания на частоте резонанса контур эквивалентен резистивному элементу.

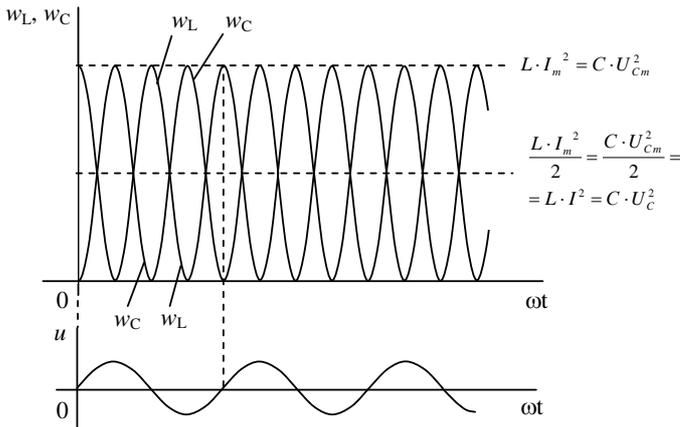


Рис. п.3.11. График изменения энергии в последовательном контуре

### Расстройки колебательных контуров

Если частота источника, подключённого к контуру, равна резонансной частоте этого контура, то контур настроен на частоту источника. Если частота резонанса контура отличается от частоты генератора, то контур расстроен.

Виды расстройки

1. Абсолютная,
2. Относительная,
3. Обобщённая

Абсолютная расстройка

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \text{ или } \Delta f = f - f_0. \quad (\text{п.3.36})$$

Относительная расстройка

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \quad (\text{п.3.37})$$

Обобщённая расстройка  $\xi$ .

Проведём небольшие преобразования формулы комплексного сопротивления

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R[1 + j(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC})] = \\ &= R[1 + j\frac{\omega_0 L}{R}(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})] = R[1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})] = R(1 + j\xi) \end{aligned}$$

Итак

$$Z(j\omega) = R(1 + j\xi),$$

где  $\xi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$  – обобщённая расстройка. (п.3.38)

Тогда

$$Z = R\sqrt{1 + \xi^2}; \quad \varphi = \arctg \xi.$$

Обобщённая расстройка  $\xi$  характеризует удалённость от резонансной частоты.

## Лабораторная работа 6 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА

Цель работы – исследовать влияние сопротивления нагрузки на параметры и характеристики последовательного колебательного контура.

При подготовке к работе воспользуйтесь конспектом лекций, учебником (Л. 1. стр. 100...103; 177...198) и ниже расположенной теоретической частью работы.

Работа состоит из расчётной, экспериментальной частей и компьютерного моделирования исследуемого колебательного контура.

Расчётная часть выполняется *при подготовке* к лабораторной работе. Экспериментальная часть выполняется на стенде «Сигнал USB». Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*».

### Краткие теоретические сведения

#### Входные характеристики последовательного колебательного контура

##### Входное сопротивление контура

$$Z(j\omega) = Z(\omega) \angle \varphi(\omega),$$

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} - \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2} = R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \operatorname{arctg} \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]. \quad (6.2)$$

$$\text{При резонансе } \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0, \quad Z(\omega_0) = R, \quad \varphi(\omega_0) = 0.$$

Графики АЧХ и ФЧХ входного сопротивления контура приведены на рис. 6.1.

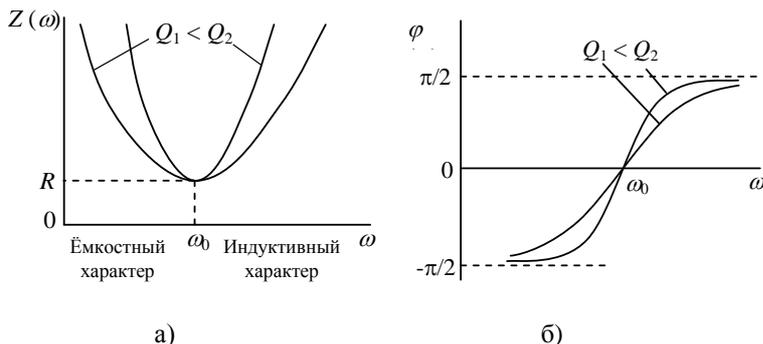


Рис. 6.1. АЧХ а) и ФЧХ б) входного сопротивления последовательного колебательного контура

Из графиков рис. 6.1 видно, что чем больше добротность последовательного колебательного контура, тем «острее» зависимость  $Z(\omega)$  и тем круче переход через ноль у ФЧХ.

#### Входная проводимость контура

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = Y(\omega) \angle \mathcal{G}(\omega),$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}, \quad (6.3)$$

$$\mathcal{G}(\omega) = -\varphi(\omega) = -\text{arctg} \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]. \quad (6.4)$$

Графики АЧХ и ФЧХ входной проводимости контура приведены на рис. 6.2.

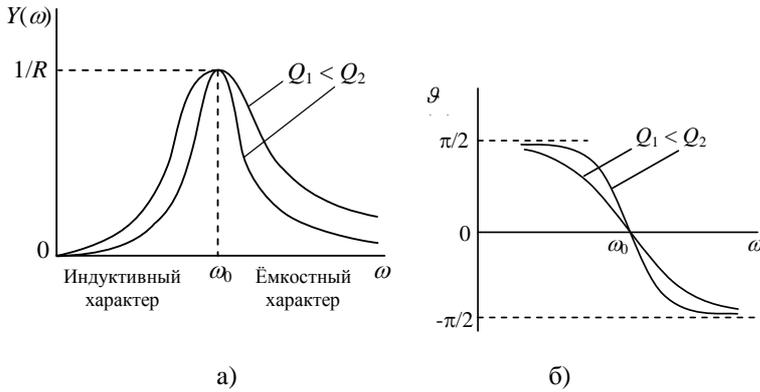


Рис. 6.2. АЧХ а) и ФЧХ б) входной проводимости последовательного колебательного контура

### Входной ток контура

Примем амплитуду входного напряжения неизменной, начальную фазу равной нулю, а частоту изменяющейся от нуля до бесконечности. Индуктивность и ёмкость оставим неизменными, тогда

$$\underline{I} = \frac{U}{Z} = \frac{U \angle \psi_U}{Z \angle \varphi} = \frac{U \angle 0^\circ}{Z \angle \varphi} = I \angle -\varphi. \quad (6.3)$$

Модуль входного тока

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

аргумент входного тока

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Графики модуля и аргумента входного тока последовательного колебательного контура при разных добротностях показаны на рис. 6.3.

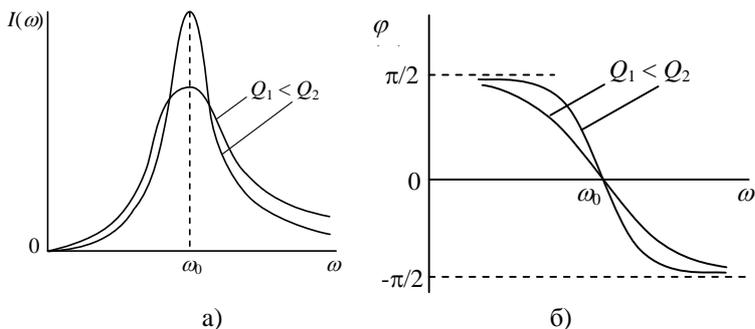


Рис. 6.3. Графики модуля а) и аргумента б) входного тока последовательного колебательного контура

На практике чаще всего применяют нормированные входные характеристики из-за удобства их применения. Нормируют величины по значениям, которые они принимают на резонансной частоте. Например, нормируют частоту –  $\omega/\omega_0$ , входное сопротивление –  $Z(\omega)/R$ , входную проводимость –  $Y(\omega)/Y(\omega_0)$ , входной ток –  $I(\omega)/I_0$ . Нормированные характеристики модуля и аргумента входного тока показаны на рис. 6.4.

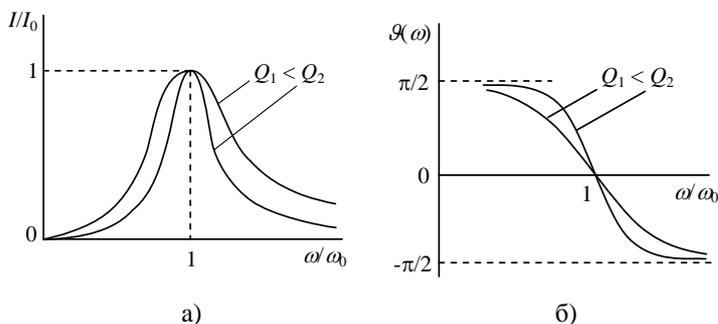


Рис. 6.4. Нормированные графики модуля а) и аргумента б) входного тока последовательного колебательного контура

### Передаточные характеристики последовательного колебательного контура

Пусть к контуру приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , амплитуда которого неизменна, а частота может изменяться от 0 до  $\infty$ .

Изменение частоты приводит к изменению реактивных сопротивлений контура  $X_L$ ,  $X_C$ ,  $X = X_L + X_C$  а, следовательно, к изменению полного комплексного сопротивления  $Z$ , тока  $I$ , напряжений  $U_R$ ,  $U_L$ ,  $U_C$ .

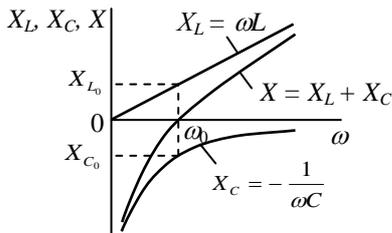


Рис. 6.5. Частотные характеристики реактивных сопротивлений контура

На рис. 6.5 изображены частотные характеристики сопротивлений  $X_L(\omega)$ ,  $X_C(\omega)$  и  $X(\omega) = X_L(\omega) + X_C(\omega)$ .

Найдём коэффициенты передачи по напряжению  $K_C$ , когда выходное напряжение снимают с ёмкости (рис. 6.6) и  $K_L$ , когда выходное напряжение снимают с индуктивности (рис. 6.7). Передающие характеристики снимают при холостом ходе на выходных зажимах. Тогда через все элементы контура протекает один и тот же ток.

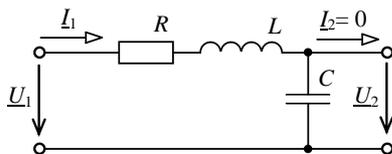


Рис. 6.6

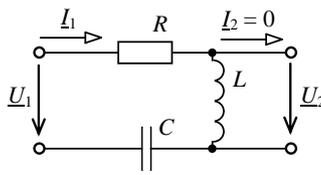


Рис. 6.7

Передающая функция  $K_C(j\omega)$

$$K_C(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_C(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{-j\frac{1}{\omega C}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}. \quad (6.6)$$

Передающая функция  $K_L(j\omega)$

$$K_L(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_L(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}. \quad (6.7)$$

Исследуя АЧХ  $K_C(\omega)$  и  $K_L(\omega)$  на экстремум можно установить, что функция  $K_C(\omega)$  имеет максимум на частоте

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}, \quad (6.8)$$

а функция  $K_L(\omega)$  – на частоте

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}}. \quad (6.9)$$

Максимальные значения АЧХ обеих функций одинаковы:

$$K(\omega_L) = K(\omega_C) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = K_{\max}. \quad (6.10)$$

На рис. 6.8 приведены АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи последовательного колебательного контура.

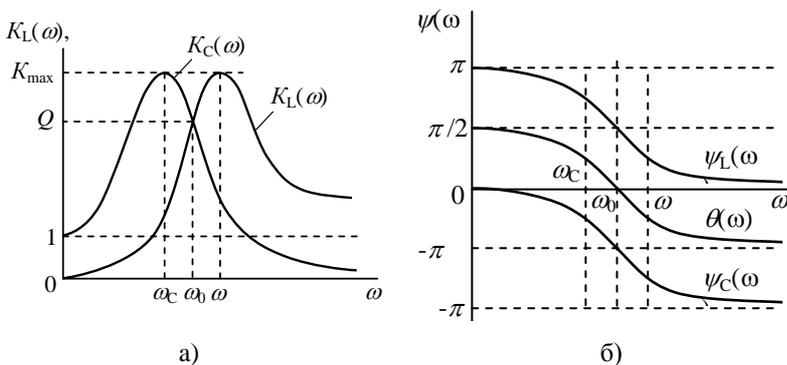


Рис. 6.8. АЧХ (а) и ФЧХ (б) коэффициента передачи последовательного колебательного контура

Рис. 6.8 носит чисто качественный характер. Смещение кривых  $K_C(\omega)$  и  $K_L(\omega)$  относительно друг друга преувеличено с тем, чтобы показать, что их максимумы находятся на разных частотах. В действительности уже при  $Q \geq 5$  отличие  $\omega_L$  и  $\omega_C$  от  $\omega_0$  не превышает  $0,01 \omega_0$ , поэтому во всех практически важных случаях можно считать, что  $K_C(\omega)$  и  $K_L(\omega)$  имеют максимум на резонансной частоте, причём  $K_{\max} = Q$ .

### Избирательные свойства последовательного колебательного контура

Амплитуда реакции последовательного колебательного контура на гармоническое воздействие сильно зависит от частоты. По мере удаления от резонансной частоты, как в область нижних, так и в область верхних частот, амплитуда отклика (реакции) уменьшается. Если на

вход такого контура подать сумму гармонических колебаний имеющих одинаковые амплитуды, но разные частоты, то на выходе можно обнаружить, что колебания, частота которых близка к резонансной, имеют значительно большую амплитуду, чем колебания, частота которых существенно отличается от частоты резонанса. Способность электрической цепи выделять колебания отдельных частот из суммы колебаний называется *избирательностью*. На рис. 6.9 показаны нормированные АЧХ идеальной (1) и реальной (2) избирательных цепей. Как видно из рис. 6.9, у реальной избирательной цепи, в отличие от идеальной, отсутствует резкая граница между диапазонами пропускаемых и не пропускаемых (задерживаемых) частот.

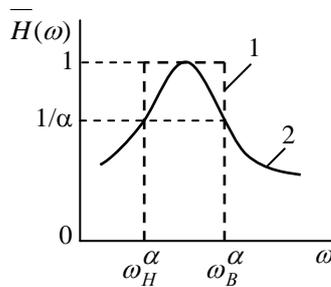


Рис. 6.9. Нормированные АЧХ идеальной (1) и реальной (2) избирательных цепей

Полосу пропускания реальных цепей определяют по условному уровню  $1/\alpha$ , в пределах которого амплитуда отклика не падает больше чем в  $\alpha$  раз, относительно своего максимального значения.

$$\Pi_\omega^\alpha = \omega_B^\alpha - \omega_H^\alpha, \text{ или } \Pi_f^\alpha = f_B^\alpha - f_H^\alpha. \quad (6.11)$$

Обычно полосу пропускания избирательной цепи определяют по уровню  $1/\sqrt{2}$ . В этом случае на границах полосы пропускания последовательного колебательного контура входной ток снижается до  $I = I_0 / \sqrt{2} \approx 0,707I_0$ , а активная (резистивная) мощность контура снижается в два раза по сравнению с резонансной:

$$P = RI^2 = R\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}RI_0^2 = \frac{1}{2}P_0. \quad (6.12)$$

Границам полосы пропускания по уровню  $1/\sqrt{2}$  соответствует равенство  $R = |X|$ .

Покажем это

$$RI^2 = R \frac{U^2}{R^2 + X^2} = R \frac{U^2}{2R^2} = \frac{U^2}{2R} = \frac{1}{2} P_0.$$

Результат тот же, что и в (6.12), следовательно, действительно на границах полосы пропускания  $R = |X|$ .

Обобщённая расстройка  $\xi$  на границах полосы пропускания по уровню  $1/\sqrt{2}$  равна  $\pm 1$ .

$$\frac{I}{I_0} = \frac{U}{Z} / \frac{U}{R} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{R\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\sqrt{1+\xi^2} = \sqrt{2}, \quad \xi = \pm 1. \quad (6.13)$$

Полосу пропускания можно выразить через резонансную частоту и добротность контура. Полагая, что на нижней граничной частоте  $\omega_H$  обобщённая расстройка  $\xi = -1$ , а на верхней  $\omega_B$   $\xi = +1$ , запишем

$$-1 = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right); \quad 1 = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right). \quad (6.14)$$

Решая (6.14), найдём

$$\omega_B = \omega_0 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{(2Q)^2}} + \frac{1}{2Q} \right); \quad (6.15)$$

$$\omega_H = \omega_0 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{(2Q)^2}} - \frac{1}{2Q} \right). \quad (6.16)$$

Ширина полосы пропускания по уровню  $1/\sqrt{2}$  пропорциональна резонансной частоте контура и обратно пропорциональна добротности контура. Полосу пропускания по уровню  $1/\sqrt{2}$  обозначим  $\Pi_\omega$  или  $\Pi_f$ .

$$\Pi_\omega = \Pi_\omega^{\sqrt{2}} = \omega_B - \omega_H = \frac{\omega_0}{Q}, \quad \text{или} \quad \Pi_f = \Pi_f^{\sqrt{2}} = f_B - f_H = \frac{f_0}{Q}. \quad (6.17)$$

*Таким образом, избирательные свойства последовательного колебательного контура зависят от его добротности: чем выше добротность контура, тем меньше ширина полосы пропускания.*

## Влияние внутреннего сопротивления источника энергии на избирательные свойства последовательного колебательного контура

Пусть контур питается от источника энергии с внутренним сопротивлением  $R_i$  (рис. 6.10).

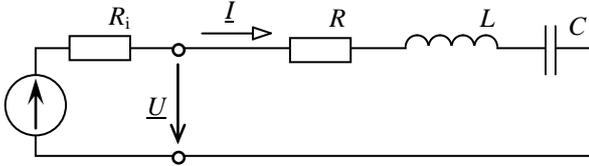


Рис. 6.10. Последовательный колебательный контур с питанием от источника с внутренним сопротивлением  $R_i$ .

Сопротивления  $R_i$  и  $R$ , включённые последовательно, можно заменить эквивалентным сопротивлением  $R_{\Sigma 1} = R_i + R$  и тогда схема рис. 6.10 может быть описана соотношениями, полученными для схемы рис. 6.6, при замене сопротивления  $R$  на  $R_{\Sigma 1}$ .

Добротность такого контура определяется выражением

$$Q_{\Sigma 1} = \frac{\rho}{R_{\Sigma}} = \frac{\rho}{R_i + R} = \frac{Q}{1 + \frac{R_i}{R}}, \quad (6.18)$$

где  $Q = \frac{\rho}{R}$  – добротность контура без учёта сопротивления источника.

Ширина полосы пропускания контура, питающегося от источника с внутренним сопротивлением  $R_i$ , может быть найдена из выражения (6.19) при замене  $Q$  на  $Q_{\Sigma 1}$ :

$$\Pi_{\omega} = \omega_B - \omega_H = \frac{\omega_0}{Q_{\Sigma 1}} = \frac{\omega_0(1 + \frac{R_i}{R})}{Q}, \quad (6.19)$$

или

$$\Pi_f = f_B - f_H = \frac{f_0}{Q_{\Sigma 1}} = \frac{f_0(1 + \frac{R_i}{R})}{Q}.$$

Как видно из выражений (6.19), наличие внутреннего сопротивления источника энергии уменьшает эквивалентную добротность контура и ухудшает его избирательность.

Вывод. Чтобы контур имел как можно большую избирательность, источник его питания должен иметь как можно меньшее внутреннее сопротивление, т.е. по свойствам приближался к идеальному источнику напряжения.

**Влияние сопротивления нагрузки на избирательные свойства последовательного колебательного контура**

На рис. 6.11 и 6.12 показаны схемы контура с подключённой нагрузкой.

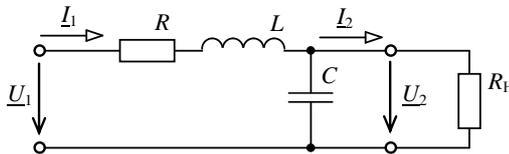


Рис. 6.11. Схема последовательного колебательного контура с нагрузкой, подключённой к ёмкости

Параллельную цепь  $CR_H$  можно заменить эквивалентной последовательной (рис. 6.12) –  $CR_{BH1}$ , где  $R_{BH1}$  – внесённое в контур сопротивление

$$R_{BH1} \approx \frac{1}{\omega^2 C^2 R_{H1}}. \tag{6.20}$$

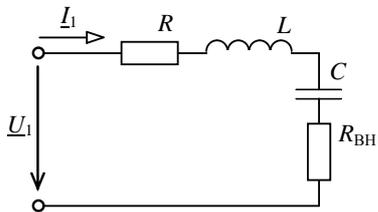


Рис. 6.12. Параллельное соединение  $C$  и  $R_H$  заменено эквивалентным последовательным соединением  $C$  и  $R_{BH}$

Эквивалентные добротность и полоса пропускания контура по уровню  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$  от максимума

$$Q_{Э2} = \frac{\rho}{R + R_{BH}} = \frac{\rho}{R + \frac{\rho^2}{R_H}} = \frac{Q}{1 + \frac{Q\rho}{R_H}}; \tag{6.21}$$

$$\Pi_{\omega} = \frac{\omega_0}{Q_{\Sigma 2}} = \frac{\omega_0}{Q} \left( 1 + \frac{Q\rho}{R_H} \right) \quad (6.22)$$

или

$$\Pi_f = \frac{f_0}{Q_{\Sigma 2}} = \frac{f_0}{Q} \left( 1 + \frac{Q\rho}{R_H} \right).$$

Выражения (6.21), (6.22) применимы и для схемы рис. 6.13.

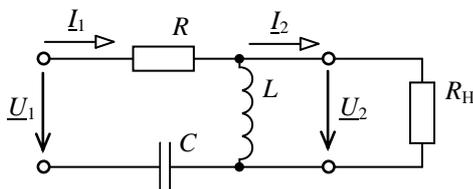


Рис. 6.13. Схема последовательного колебательного контура с нагрузкой, подключённой к индуктивности

**Вывод.** Из выражений (6.21) и (6.22) следует, что для увеличения эквивалентной добротности контура и улучшения его избирательности необходимо, чтобы сопротивление нагрузки контура  $R_H$  было как можно большим.

### Задание

Задание состоит из расчётной, экспериментальной частей и компьютерного моделирования исследуемого последовательного колебательного контура.

Экспериментальная часть выполняется на стенде «Сигнал-USB». Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*». Варианты заданий даны в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Вар.	$R_{Г}$ , Ом	$R_{К}$ , Ом	$L_{К}$ , мГн	$C$ , нФ	$R_{Н}$ , кОм
1	2	3	4	5	6
1	5,0	5,7	2,15	4,7	10
2	5,0	5,7	2,15	5,6	11
3	5,0	5,7	2,15	6,8	12
4	5,0	5,7	2,15	8,3	13

Окончание табл. 6.1

1	2	3	4	5	6
5	5,0	5,7	2,15	10	15
6	5,0	5,7	2,15	12	16
7	5,0	5,7	2,15	15	18
8	5,0	5,7	2,15	18	20
9	5,0	5,7	2,15	22	22
10	5,0	5,7	2,15	27	24
11	5,0	5,7	2,15	4,7+6,8	27
12	5,0	5,7	2,15	5,6+6,8	30
13	5,0	5,7	2,15	6,8+6,8	33
14	5,0	5,7	2,15	8,3+6,8	36
15	5,0	5,7	2,15	10+6,8	39
16	5,0	5,7	2,15	12+6,8	4,3
17	5,0	5,7	2,15	15+6,8	4,7
18	5,0	5,7	2,15	18+4,7	5,1
19	5,0	5,7	2,15	22+4,7	5,6
20	5,0	5,7	2,15	27+4,7	6,2
21	5,0	5,7	2,15	4,7+22	6,8
22	5,0	5,7	2,15	5,6+22	7,5
23	5,0	5,7	2,15	6,8+22	8,3
24	5,0	5,7	2,15	8,3+22	9,1
25	5,0	5,7	2,15	10+22	10
26	5,0	5,7	2,15	12+22	11
27	5,0	5,7	2,15	15+22	12
28	5,0	5,7	2,15	18+22	13
29	5,0	5,7	2,15	22+10	15
30	5,0	5,7	2,15	27+10	16
31	5,0	5,7	2,15	4,7+33	18
32	5,0	5,7	2,15	5,6+33	20
33	5,0	5,7	2,15	6,8+33	22
34	5,0	5,7	2,15	8,3+33	24
35	5,0	5,7	2,15	10+10	27
36	5,0	5,7	2,15	12+10	30
37	5,0	5,7	2,15	15+10	33
38	5,0	5,7	2,15	18+10	36
39	5,0	5,7	2,15	22+18	39
40	5,0	5,7	2,15	27+18	4,3

## Расчётная часть

1. Начертите схемы исследуемых цепей, выберите и запишите формулы, необходимые для расчёта (выполняется до прихода в лабораторию). Выходное напряжение снимать с ёмкости.

2. Уточните с помощью мультиметра значения сопротивления нагрузки  $R_H$ , резистивного сопротивления катушки индуктивности  $R_K$  и ёмкости конденсатора  $C$  для Вашего варианта.

3. Зная внутреннее сопротивление генератора (указано на стенде), индуктивность катушки  $L_K$  и уточнённые значения  $R_K$  и  $C$  Вашего варианта, рассчитайте резонансную частоту  $f_0$ , нижнюю и верхнюю граничные частоты  $f_H$  и  $f_B$  по уровню  $1/\sqrt{2}$ , добротность контура  $Q$ , полосу пропускания  $\Pi_f$  не нагруженного контура.

3. Выполните пункт 3 для контура, нагруженного на сопротивление  $R_H$ .

## Экспериментальная часть

1. Ознакомьтесь с инструкцией по использованию стенда «Сигнал-USB».

2. Соберите на наборной плате исследуемую схему (при отсутствии нагрузки) и подключите её к генераторным и измерительным выводам.

3. Запустите компьютер и подключите к нему стенд «Сигнал-USB».

4. Настройте характериограф стенда с учётом рассчитанных значений резонансной частоты и добротности.

5. Включите генератор и характериограф и получите на экране искомые зависимости.

6. По полученным графикам АЧХ и ФЧХ определите резонансную частоту  $f_0$ , нижнюю и верхнюю граничные частоты  $f_H$  и  $f_B$  по уровню  $1/\sqrt{2}$ , добротность контура  $Q$ , полосу пропускания  $\Pi_f$ .

7. Подключите параллельно конденсатору сопротивление нагрузки  $R_H$  и выполните пункты 2...6.

8. Сравните результаты при отсутствии нагрузки и при подключённой нагрузке и сделайте выводы.

Для выполнения первой экспериментальной части задания требуется элементная база стенда «Сигнал-USB» и, возможно, дополнительные резисторы и конденсаторы. В табл. 6.1 даны параметры элементов, соответствующие вариантам заданий.

## Компьютерное моделирование последовательного колебательного контура

1. Ознакомьтесь с программой «*Electronics Workbench*»

2. Соберите на экране монитора схему не нагруженного контура с подключённым характериографом.

3. Настройте характериограф с учётом рассчитанных значений резонансной частоты и добротности.
4. Получите на экране искомые зависимости.
5. По полученным графикам АЧХ и ФЧХ определите резонансную частоту  $f_0$ , нижнюю и верхнюю граничные частоты  $f_H$  и  $f_B$  по уровню  $1/\sqrt{2}$ , добротность контура  $Q$ , полосу пропускания  $\Pi_f$ .
6. Подключите параллельно конденсатору сопротивление нагрузки  $R_H$  и выполните пункты 2...5.
8. Сравните результаты при отсутствии нагрузки и при подключенной нагрузке и сделайте выводы.

### Пример выполнения задания

#### Экспериментальная часть

Экспериментальное исследование последовательного колебательного контура проведём с помощью стенда «Сигнал-USB».

#### Определение параметров не нагруженного контура

Пусть дано (табл. 6.2): сопротивление генератора  $R_G$  (указано на стенде), резистивное сопротивление катушки, измеренное мультиметром  $R_K$ , индуктивность катушки  $L$ , значение ёмкости  $C$ , измеренное мультиметром.

Таблица 6.2

$R_G$ , Ом	$R_K$ , Ом	$L$ , мГн	$C$ , нФ
3,8	5,7	2,15	24,5

Расчётные значения основных параметров не нагруженного контура показаны в табл. 6.3.

Таблица 6.3

$f_0$ , кГц	$\rho$ , Ом	$Q$	$\Pi_f^{\sqrt{2}}$ , кГц	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц
21,933	296,2	31,18	0,697	21,593	22,290

На рис. 6.14 показаны, полученные в результате опыта, графики АЧХ и ФЧХ не нагруженного исследуемого контура. Реальные значения параметров контура, определённые из опытных графиков АЧХ и ФЧХ даны в табл. 6.4.

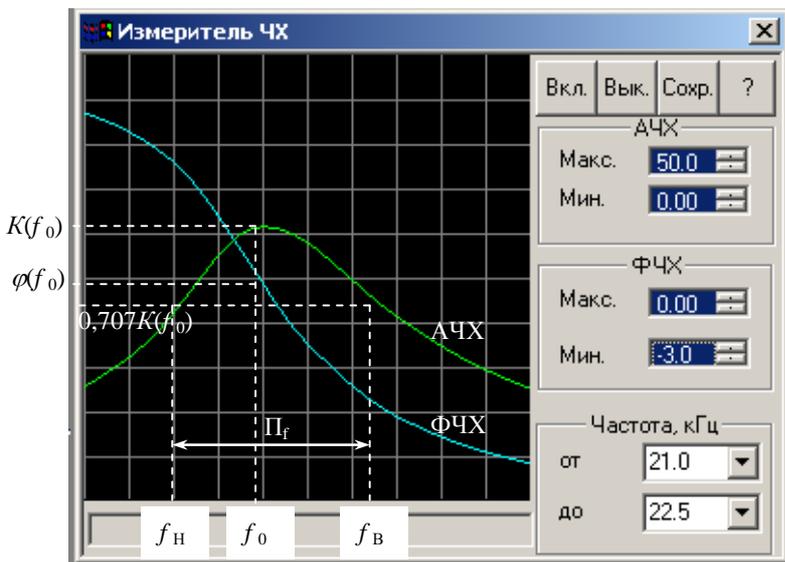


Рис. 6.14. Полученные из опыта графики АЧХ и ФЧХ ненагруженного последовательного контура  $RLC$

Таблица 6.4

$f_0$ , кГц	$Q$	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц	$\Pi_f^{\sqrt{2}}$ , кГц	$\varphi^\circ(f_0)$
21,6	31	21,33	21,99	0,66	-84,3

### Определение параметров нагруженного контура

Подключим параллельно конденсатору сопротивление нагрузки  $R_H = 5,1$  кОм (предварительно уточнив значение мультиметром).

Расчётные значения основных параметров нагруженного контура даны в табл. 6.5.

Таблица 6.5

$f_0$ , кГц	$\rho$ , Ом	$Q_{\text{ЭКВ}}$	$\Pi_f^{\sqrt{2}}$ , кГц	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц
21,933	296,2	11,09	1,977	21,593	22,290

На рис. 6.15 показаны, полученные в результате опыта, графики АЧХ и ФЧХ нагруженного контура. Реальные значения параметров контура, определённые из опытных графиков АЧХ и ФЧХ даны в табл. 6.6.

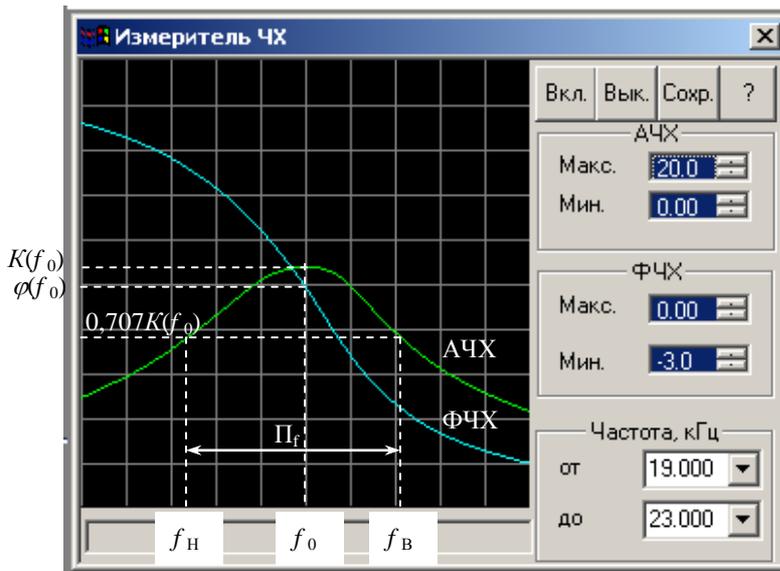


Рис. 6.15. Полученные из опыта графики АЧХ и ФЧХ нагруженного последовательного контура *RLC*

Таблица 6.6

$f_0$ , кГц	$Q$	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц	$\Pi_f^{\sqrt{2}}$ , кГц	$\varphi^\circ(f_0)$
21,0	10,8	19,92	21,84	1,92	-84,2

### Компьютерное моделирование

Компьютерное моделирование последовательного колебательного контура проведём с помощью программы «*Electronics Workbench*»

## Определение параметров не нагруженного контура

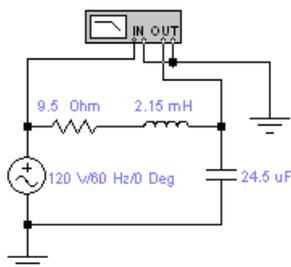


Рис. 6.16. Схема не нагруженного последовательного колебательного контура с характериографом

На рис. 6.16 показана схема не нагруженного последовательного колебательного контура, собранная на экране монитора в программе «*Electronics Workbench*». Значения параметров те же, что и у реального контура. Параметры источника (напряжение, частота, начальная фаза) при работе с характериографом значения не имеют.

На рис. 6.17 и 6.18 показаны АЧХ и ФЧХ, снятые с помощью характериографа программы «*Electronics Workbench*».

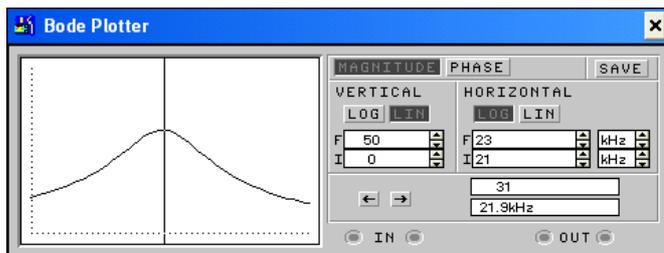


Рис. 6.17. АЧХ не нагруженного контура, показанная характериографом программы «*Electronics Workbench*»

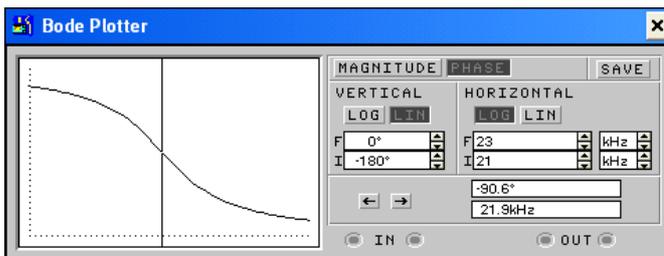


Рис. 6.18. ФЧХ не нагруженного контура, показанная характериографом программы «*Electronics Workbench*»

Основные параметры не нагруженного контура, определённые с помощью программы «*Electronics Workbench*», даны в табл. 6.7.

Таблица 6.7

$f_0$ , кГц	$Q$	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц	$\Pi_{f}^{\sqrt{2}}$ , кГц	$\varphi^{\circ}(f_0)$
21,9	31	21,6	22,3	0,70	-90,6

### Определение параметров нагруженного контура

На рис. 6.19 показана схема нагруженного на сопротивление  $R_H$  последовательного колебательного контура, собранная на экране монитора в программе «*Electronics Workbench*».

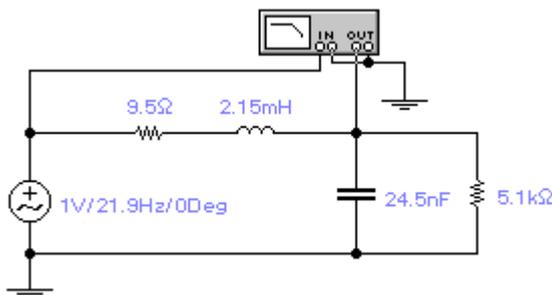


Рис. 6.19. Схема нагруженного последовательного колебательного контура с характерографом

На рис. 6.20 и 6.21 показаны АЧХ и ФЧХ нагруженного контура, снятые с помощью характерографа программы «*Electronics Workbench*».

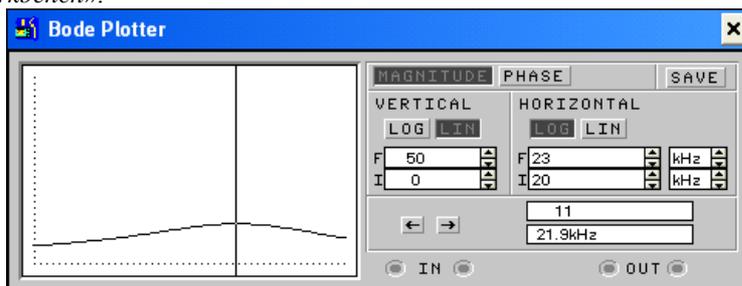


Рис. 6.20. АЧХ нагруженного контура, показанная характерографом программы «*Electronics Workbench*»

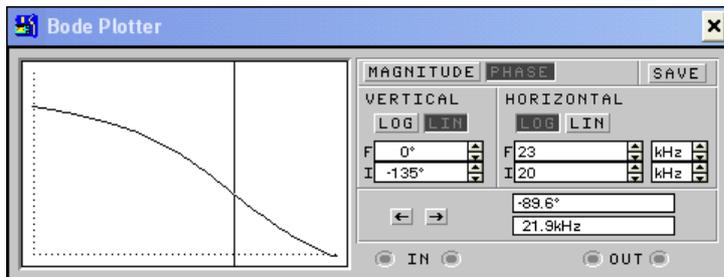


Рис. 6.21. ФЧХ нагруженного контура, показанная характернографом программы «*Electronics Workbench*»

Основные параметры нагруженного контура, определённые с помощью программы «*Electronics Workbench*», даны в табл. 6.8.

Таблица 6.8

$f_0$ , кГц	$Q$	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц	$\Pi_f^{\sqrt{2}}$ , кГц	$\varphi^\circ(f_0)$
21,9	10,8	20,9	22,9	2,00	-89,6

Основные параметры не нагруженного контура, полученные расчётом, из опыта на стенде «Сигнал – USB» и с помощью программы «*Electronics Workbench*» сведены в табл. 6.9.

Таблица 6.9

	$Q$	$f_0$ , кГц	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц	$\Pi_f$ , кГц	$\varphi^\circ(f_0)$
Расчет	31,2	21,9	21,6	22,3	0,7	-90
Опыт	31,0	21,6	21,3	22,0	0,66	-84,3
EWB	31,0	21,9	21,6	22,3	0,7	-90,6

Основные параметры нагруженного контура, полученные расчётом, из опыта на стенде «Сигнал – USB» и с помощью программы «*Electronics Workbench*» сведены в табл. 6.10.

Таблица 6.10

	$Q$	$f_0$ , кГц	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц	$\Pi_f$ , кГц	$\varphi^\circ(f_0)$
Расчет	11,1	21,9	21,6	22,3	1,98	-90
Опыт	10,8	21,0	19,92	21,84	1,92	-84,2
EWB	10,8	21,9	20,9	22,9	2,0	-89,6

Как правило расчётные и экспериментальные данные не совпадают. Расхождения расчетных и полученных из опытов величин, можно объяснить неточностью параметров генератора, катушки индуктивности, конденсатора, неточностью измерений, влиянием соединительных проводов, неточностью расчётов и др.

Выводы по полученным результатам сделайте самостоятельно.

### **Контрольные вопросы**

1. Опишите явление резонанса в последовательном колебательном контуре.
2. Укажите способы, которыми можно установить в последовательном колебательном контуре режим резонанса.
3. Опишите простейшие схемы, моделирующие реальную катушку индуктивности.
4. Опишите простейшие схемы, моделирующие реальный конденсатор.
5. Перечислите основные параметры последовательного колебательного контура и запишите их формулы.
6. Опишите энергетические процессы в последовательном колебательном контуре.
7. Начертите векторную диаграмму последовательного колебательного контура при резонансе.
8. Перечислите расстройки последовательного колебательного контура и запишите их формулы.

## Лабораторная работа 7. ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА

Цель работы – исследовать влияние внутреннего сопротивления источника сигнала на параметры и характеристики параллельного колебательного контура.

При подготовке к работе воспользуйтесь конспектом лекций, учебником (Л. 1. стр. 198...205) и ниже расположенной теоретической частью работы.

Работа состоит из расчётной, экспериментальной частей и компьютерного моделирования исследуемого колебательного контура.

Расчётная часть выполняется *при подготовке* к лабораторной работе. Экспериментальная часть выполняется на стенде «Сигнал USB». Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*».

### Краткие теоретические сведения

Рассмотрим параллельный контур, у которого катушка индуктивности и конденсатор представлены *последовательными* схемами замещения. Схема и векторная диаграмма простейшего колебательного контура с потерями (потери отображены сопротивлениями потерь  $R_1$  и  $R_2$ ) изображены на рис. 7.1.

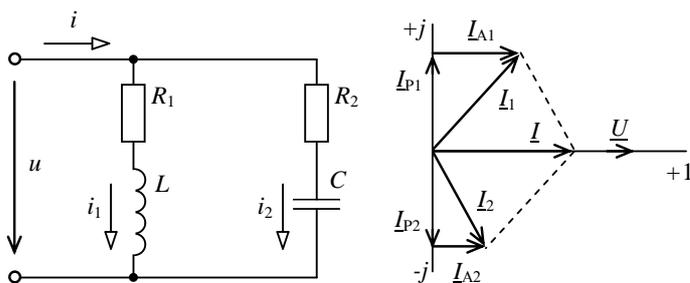


Рис. 7.1. Схема (слева) и векторная диаграмма (справа) параллельного контура основного вида

Комплексная проводимость параллельного контура

$$\underline{Y}_K = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1 + G_2 - j(B_1 - B_2) = G - jB, \quad (7.1)$$

где  $\underline{Y}_1 = G_1 - jB_1$  и  $\underline{Y}_2 = G_2 + jB_2$  – комплексные проводимости ветвей с индуктивностью и с ёмкостью соответственно.

Резистивные проводимости  $G_1, G_2$  и реактивные проводимости  $B_1, B_2$

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}; G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}; B_1 = \frac{X_1}{Z_1^2}; B_2 = \frac{X_2}{Z_1^2}, \quad (7.2)$$

где  $X_1 = \omega L$ ;  $X_2 = \frac{1}{\omega C}$  – индуктивное и ёмкостное реактивные сопротивления ветвей соответственно,

$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$ ;  $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}$  – модули комплексных сопротивлений ветвей соответственно.

На резонансной частоте мнимая составляющая входной проводимости параллельного контура должна быть равна нулю.

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} = 0 \quad (7.3)$$

Решив (7.3) относительно  $\omega$  получим

$$\omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}, \quad (7.4)$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансная частота последовательного колебательно-го контура, составленного из тех же элементов, что и данный параллельный контур.

Из уравнения (7.4) следует, что резонанс возможен только при неотрицательности подкоренного выражения (т.е. при  $R_1 < \rho$  и  $R_2 < \rho$  или при  $R_1 > \rho$  и  $R_2 > \rho$ ).

Векторная диаграмма токов в параллельном контуре показана на рис. 7.2. Начальная фаза входного напряжения контура принята равной нулю. Реактивные составляющие токов при резонансе равны друг другу:

$$I_{P1} = UB_1 = I_{P2} = UB_2. \quad (7.5)$$

Входной ток параллельного контура при резонансе

$$I_0 = UG_0 = \frac{U}{R_0}, \quad (7.6)$$

где  $G_0$  – резонансная проводимость, а  $R_0$  – резонансное сопротивление контура.

Величину  $R_0$  можно найти из условия резонанса токов. Так как при резонансе токов  $B_0 = 0$ , то согласно (7.1) и (7.2) входная проводимость контура при резонансе

$$G_0 = G_1 + G_2 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega_p L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + 1/(\omega_p C)^2} \quad (7.7)$$

Подставив значение  $\omega_p$  из (7.4) в (7.7), получим

$$G_0 = \frac{R_1 + R_2}{\rho^2 + R_1 R_2} \quad (7.8)$$

откуда

$$R_0 = \frac{\rho^2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (7.9)$$

Комплексное входное сопротивление параллельного колебательно-го контура (рис. 7.1):

$$Z_K(j\omega) = \frac{(R_1 + j\omega L)(R_2 - j\frac{1}{\omega C})}{(R_1 + j\omega L) + (R_2 - j\frac{1}{\omega C})} \quad (7.10)$$

Ограничимся случаем, когда элементы контура имеют высокую добротность  $\omega_p L \gg R_1$ ,  $1/\omega_p C \gg R_2$ , а частота внешнего воздействия мало отличается от частоты резонанса  $\omega_p$ . Тогда можно записать:

$$R_0 = \frac{\rho^2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2} \approx \frac{\rho^2}{R}, \quad (7.11)$$

где  $\rho = \sqrt{L/C}$  – характеристическое сопротивление,  $R = R_1 + R_2$  – сопротивление потерь последовательного контура, составленного из тех же элементов, что и данный параллельный контур пренебрегая  $R_1$  и  $R_2$  в числителе (7.10) имеем:

$$\begin{aligned} Z_K(j\omega) &\approx \frac{L/C}{R_1 + R_2 + j[\omega L - 1/(\omega C)]} = \\ &= \frac{\rho^2}{R + jX} = \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)} = \frac{R_0}{1 + j\xi} \end{aligned} \quad (7.12)$$

В выражении (7.12)  $\xi$  – обобщённая расстройка контура:

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (7.13)$$

Параметры контура  $R, L, C$  можно считать не зависящими от частоты, а входное сопротивление контура  $Z_K$  и его составляющие  $R_K$  и  $X_K$  (частотные характеристики) зависят от частоты.

Определим частотные характеристики контура  $Z_K, R_K, X_K, \varphi$ .

$$Z_K(j\omega) = \frac{R_0}{1 + j\xi} = \frac{R_0 - jR_0\xi}{1 + \xi^2} =$$

$$= \frac{R_0}{1 + \xi^2} - \frac{jR_0\xi}{1 + \xi^2} = R_K + jX_K \quad (7.14)$$

откуда

$$Z_K = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad R_K = \frac{R_0}{1 + \xi^2}, \quad X_K = -\frac{R_0\xi}{1 + \xi^2}, \quad \varphi = -\arctg \xi \quad (7.15)$$

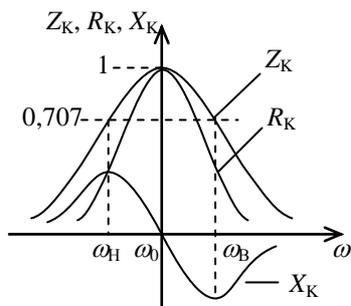


Рис. 7.3. Частотные характеристики параллельного контура

Частотные характеристики  $Z_K/R_0, R_K/R_0, X_K/R_0$ , нормированные относительно резонансного сопротивления  $R_0$  показаны на рис. 7.3. Граничные частоты  $\omega_H$  и  $\omega_B$  показаны по уровню  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ . Фазочастотная характеристика показана на рис. 7.4.

На резонансной частоте входное сопротивление контура должно быть чисто резистивным (мнимая составляющая должна быть равна нулю), следовательно:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)_{\omega=\omega_p} = 0 \quad (7.16)$$

Из выражения (7.16) следует, что условие резонанса токов в параллельном колебательном контуре при высокой добротности элементов имеет такой же вид, как и условие резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре. Следовательно, частота резонанса токов параллельного контура совпадает с частотой резонанса напряжений последовательного контура, составленного из тех же элементов:

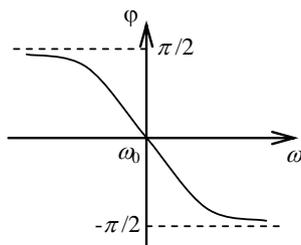


Рис. 7.4. Фазочастотные характеристики параллельного контура

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7.17)$$

Характеристическое сопротивление параллельного контура, равное абсолютному значению мнимых составляющих сопротивлений ветвей контура на резонансной частоте, имеет то же выражение, что и характеристическое сопротивление последовательного контура:

$$\rho = |X_C|_{\omega=\omega_p} = X_L|_{\omega=\omega_p} = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.18)$$

Входное напряжение  $u$  и входной ток  $i$  на резонансной частоте совпадают по фазе, а их действующие значения  $I_0 = I|_{\omega=\omega_p}$  и  $U_0 = U|_{\omega=\omega_p}$  связаны соотношением:

$$U_0 = R_0 I_0 = \frac{\rho^2}{R} I_0. \quad (7.19)$$

Действующие значения токов ветвей контура на резонансной частоте практически одинаковы:

$$I_1|_{\omega=\omega_p} \approx I_2|_{\omega=\omega_p} \approx \frac{U_0}{\rho} = \frac{\rho}{R_0} I_0. \quad (7.20)$$

Используя выражение (7.20), найдём добротность параллельного контура:

$$Q = \left| \frac{I_1}{I_0} \right|_{\omega=\omega_p} = \left| \frac{I_2}{I_0} \right|_{\omega=\omega_p} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.21)$$

Следовательно, добротность параллельного колебательного контура (рис. 7.1) совпадает с добротностью последовательного колебательного контура составленного из тех же элементов.

Для того чтобы определить влияние на добротность параллельного контура сопротивления источника, питающего контур и сопротивления нагрузки, подключаемой к контуру, представим контур эквивалентной параллельной схемой замещения (рис. 7.5). В этой схеме источник, питающий контур представлен схемой источника тока с задающим током  $j$  и внутренней проводимостью  $G_i$ , а сопротивления контура и нагрузки проводимостями  $G$  и  $G_n$ , соответственно.

На резонансной частоте полные проводимости ёмкости

$$Y_C|_{\omega=\omega_p} = b_C|_{\omega=\omega_p} = \omega_p C = \sqrt{\frac{C}{L}} = \rho^{-1} = \sigma \quad (7.22)$$

и индуктивности

$$Y_L|_{\omega=\omega_p} = b_L|_{\omega=\omega_p} = \frac{1}{\omega_p L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \rho^{-1} = \sigma \quad (7.23)$$

равны характеристической проводимости параллельного контура  $\sigma$ . Из векторной диаграммы рис. 7.6 видно, что при резонансе действующие значения тока индуктивности и тока ёмкости одинаковы:  $I_L = I_C = U / \rho$ , а входной ток контура равен току проводимости  $I = I_G = GU$ . Тогда выражение для добротности контура можно записать в виде:

$$Q = \frac{I_L}{I|_{\omega=\omega_p}} = \frac{I_C}{I|_{\omega=\omega_p}} = \frac{G}{\rho}. \quad (7.24)$$

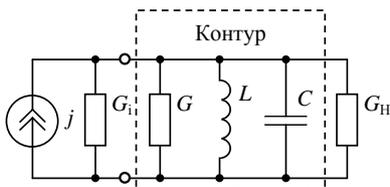


Рис. 7.5. Параллельная схема замещения контура основного вида

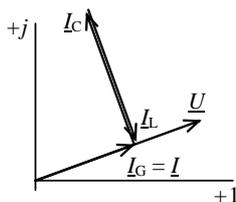


Рис. 7.6. Векторная диаграмма параллельного контура основного вида при резонансе

Из полученного выражения (7.24) видно, что с увеличением проводимости потерь, добротность параллельного колебательного контура падает. Аналогично на добротность контура влияют внутренняя проводимость источника  $G_i$  и проводимость нагрузки  $G_H$ . Тогда для эквивалентной добротности  $Q_{\Sigma}$  можно записать:

$$Q_{\Sigma} = \frac{\sigma}{G + G_i + G_H} = \frac{Q}{1 + G_i / G + G_H / G}, \quad (7.25)$$

где  $Q$  – добротность параллельного контура без учёта проводимостей  $G_i$  и  $G_H$ .

Из полученного выражения (7.25) видно, что для повышения эквивалентной добротности параллельного контура необходимо, чтобы проводимости источника и нагрузки были как можно меньше. Это означает, что *питать контур следует от источника близкого по свойствам к*

идеальному источнику тока, а сопротивление нагрузки должно быть как можно больше.

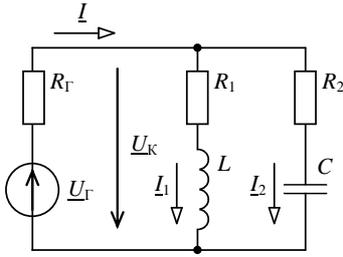


Рис. 7.7. Схема параллельного контура основного вида

Определим частотную зависимость напряжения на контуре, нормированного относительно напряжения на контуре при резонансе. Контур подключён к источнику с задающим напряжением  $\underline{U}_G$  и внутренним сопротивлением  $R_G$  (рис. 7.7). Сопротивление нагрузки  $R_H = \infty$ . При этом комплексное напряжение на контуре  $U_K$  определяется выражением

$$\underline{U}_K = I \underline{Z}_K = \frac{\underline{U}_G}{R_G + \underline{Z}_K} \underline{Z}_K. \quad (7.26)$$

При резонансе токов напряжение на контуре

$$\underline{U}_{KP} = \frac{\underline{U}_G}{R_G + R_0} R_0. \quad (7.27)$$

Тогда, используя (7.13), (7.25) и (7.26), получим частотную зависимость

$$\frac{\underline{U}_K}{\underline{U}_{KP}} = \frac{R_G + R_0}{(1 + j\xi)[R_G + R_0/(1 + j\xi)]}. \quad (7.28)$$

используя (7.13), (7.24) и учтя, что в (7.24)  $G_H = 0$ , после преобразований получим:

$$\frac{\underline{U}_K}{\underline{U}_{KP}} = \frac{1}{1 + jQ_3 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}. \quad (7.29)$$

Из (7.29) получим нормированные АЧХ и ФЧХ:

$$\frac{U_K}{U_{KP}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [Q_3 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)]^2}}, \quad (7.30)$$

$$\varphi = \arctg Q_3 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (7.31)$$

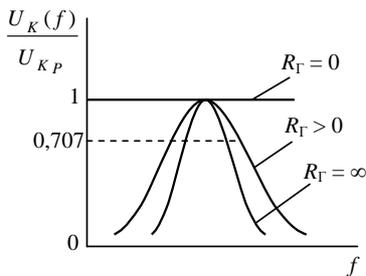


Рис. 7.8

На рис. 7.8 показаны нормированные к напряжению параллельного контура при резонансе  $U_{KP}$  зависимости напряжения на контуре  $U_K(f)$  для разных значений сопротивления источника  $R_\Gamma$  и  $R_H = \infty$ .

Определим граничные частоты  $f_H$  и  $f_B$  по уровню  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$  от максимального значения АЧХ.

$$\frac{U_K}{U_{KP}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [Q_3(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f})]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7.32)$$

Отсюда граничные частоты:

$$f_H = \frac{f_0}{2Q_3} (\sqrt{1 + 4Q_3^2} - 1), \quad (7.33)$$

$$f_B = \frac{f_0}{2Q_3} (\sqrt{1 + 4Q_3^2} + 1). \quad (7.34)$$

При этом полоса пропускания будет равна

$$\Pi_f^{\sqrt{2}} = \frac{f_0}{Q_3} = \frac{f_0}{Q} (1 + \frac{R_0}{R_\Gamma}). \quad (7.35)$$

Из формулы (7.35) следует, что параллельный контур в общем случае имеет более широкую полосу пропускания, чем последовательный. Только при  $R_\Gamma = \infty$  их полосы будут равны. Поэтому для улучшения избирательных свойств параллельного контура его следует питать от источника близкого по свойствам к идеальному источнику тока. Кроме того, из (7.27) следует, что напряжение на контуре всегда меньше напряжения питающего его источника  $U_{KP} < U_\Gamma$ .

### Задание

Задание состоит из расчётной, экспериментальной частей и компьютерного моделирования исследуемого колебательного контура.

Экспериментальная часть выполняется на стенде «Сигнал-USB». Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*». Варианты заданий даны в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Вар.	$R_{Г1}$ , кОм Уточнить	$R_{Г2}$ , кОм Уточнить	$R_K$ , Ом Уточнить	$L_K$ , мГн	$C$ , нФ Уточнить
1	2	3	4	5	6
1	100	300	5,7	2,15	4,7
2	110	310	5,7	2,15	5,6
3	120	320	5,7	2,15	6,8
4	130	330	5,7	2,15	8,3
5	140	340	5,7	2,15	10
6	100	300	5,7	2,15	12
7	110	310	5,7	2,15	15
8	120	320	5,7	2,15	18
9	130	330	5,7	2,15	22
10	140	340	5,7	2,15	27
11	100	300	5,7	2,15	4,7+6,8
12	110	310	5,7	2,15	5,6+6,8
13	120	320	5,7	2,15	6,8+6,8
14	130	330	5,7	2,15	8,3+6,8
15	140	340	5,7	2,15	10+6,8
16	100	300	5,7	2,15	12+6,8
17	110	310	5,7	2,15	15+6,8
18	120	320	5,7	2,15	18+4,7
19	130	330	5,7	2,15	22+4,7
20	140	340	5,7	2,15	27+4,7
21	100	300	5,7	2,15	4,7+22
22	110	310	5,7	2,15	5,6+22
23	120	320	5,7	2,15	6,8+22
24	130	330	5,7	2,15	8,3+22
25	140	340	5,7	2,15	10+22
26	100	300	5,7	2,15	12+22
27	110	310	5,7	2,15	15+22
28	120	320	5,7	2,15	18+22
29	130	330	5,7	2,15	22+10
30	140	340	5,7	2,15	27+10
31	100	300	5,7	2,15	4,7+33
32	110	310	5,7	2,15	5,6+33
33	120	320	5,7	2,15	6,8+33

1	2	3	4	5	6
34	130	330	5,7	2,15	8,3+33
35	140	340	5,7	2,15	10+10
36	100	300	5,7	2,15	12+10
37	110	310	5,7	2,15	15+10
38	120	320	5,7	2,15	18+10
39	130	330	5,7	2,15	22+18
40	140	340	5,7	2,15	27+18

### Расчётная часть

1. Рассчитать для двух значений внутреннего сопротивления источника питающего контур  $R_{\Gamma}$  эквивалентные добротности  $Q_{\Sigma}$  параллельного контура по заданным, параметрам  $R, L, C$  самого контура при отсутствии нагрузки (холостом ходе).

2. Рассчитать для двух полученных значений эквивалентной добротности нижние  $f_{\text{Н}}$  и верхние  $f_{\text{В}}$  граничные частоты полос пропускания, а также полосы пропускания по уровню  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения АЧХ.

### Экспериментальная часть

Эта часть лабораторной работы выполняется с использованием стенда «Сигнал USB». Уточните с помощью мультиметра параметры элементов исследуемого параллельного контура.

1. Соберите на наборной плате стенда «Сигнал USB» исследуемую электрическую цепь.

2. Включите компьютер и подключите к нему стенд «Сигнал USB».

3. Настройте характериограф стенда на удобный частотный диапазон и снимите АЧХ и ФЧХ исследуемого параллельного контура.

4. По полученной АЧХ определите частоту резонанса  $f_{\text{Р}}$ , нижнюю  $f_{\text{Н}}$  и верхнюю  $f_{\text{В}}$  частоты полосы пропускания, а также саму полосу пропускания по уровню  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения АЧХ и сравните полученные значения с расчётными.

5. Повторите пункты 2...5 для второго значения  $R_{\Gamma}$ . Настройки характериографа по частоте при этом не изменяйте.

6. По полученным результатам сделайте выводы.

## Компьютерное моделирование параллельного колебательного контура

Эта часть лабораторной работы выполняется с использованием пакета «Electronics Workbench».

1. Соберите на экране монитора схему исследуемого параллельного контура и установите значения его параметров те же, что и в реальном эксперименте.

2. Включите схему и настройте характеристиограф на удобный частотный диапазон. Снимите АЧХ и ФЧХ исследуемого контура.

3. По полученной АЧХ определите частоту резонанса  $f_R$ , нижнюю  $f_H$  и верхнюю  $f_B$  частоты полосы пропускания, а также саму полосу пропускания по уровню  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения АЧХ и сравните полученные значения с расчётными.

4. Повторите пункты 1...3 для второго значения  $R_G$ . Настройки характеристикиографа по частоте при этом не изменяйте.

5. Совместите полученные АЧХ на одном рисунке.

6. Совместите полученные ФЧХ на одном рисунке.

7. По полученным результатам сделайте выводы.

### Пример выполнения задания

#### Расчётная часть

Пусть дано (табл. 7.2): сопротивление генератора  $R_G$ , резистивное сопротивление катушки, измеренное мультиметром  $R_K$ , индуктивность катушки  $L$ , значение ёмкости  $C$ , измеренное мультиметром.

Таблица 7.2

$R_G$ , кОм	$R_K$ , Ом	$L$ , мГн	$C$ , нФ
97,6	5,7	2,1	1,85

Расчётные значения основных параметров не нагруженного контура показаны в табл. 7.3.

Таблица 7.3

$\rho$ , Ом	$R_0$ , кОм	$Q$	$Q_{\Sigma}$	$f_R$ , кГц	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц	$\Pi_f^{\sqrt{2}}$ , кГц
1065	199,15	186,9	63,5	80,76	80,108	81,42	1,313

## Экспериментальная часть

Реальная экспериментальная часть исследования параллельного колебательного контура выполняется с помощью стенда «Сигнал-USB». Контур не нагружен ( $R_H = \infty$ ). Измерения выполняются для двух значений внутреннего сопротивления источника сигнала питающего контур значительно отличающихся друг от друга. Порядок выполнения данной части смотри выше.

На рис. 7.9 и 7.10 показаны, полученные в результате опыта, графики АЧХ и ФЧХ не нагруженного исследуемого параллельного контура при разных значениях внутреннего сопротивления источника, питающего контур. Реальные значения параметров контура, определённые из опытных графиков АЧХ и ФЧХ даны в табл. 7.4.

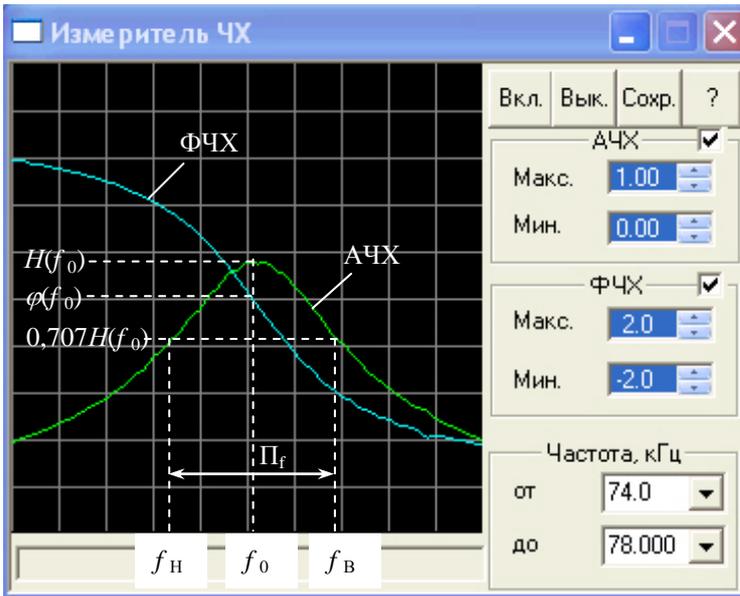


Рис. 7.9. График АЧХ параллельного контура при  $R_{\Gamma} = 97,6$  кОм

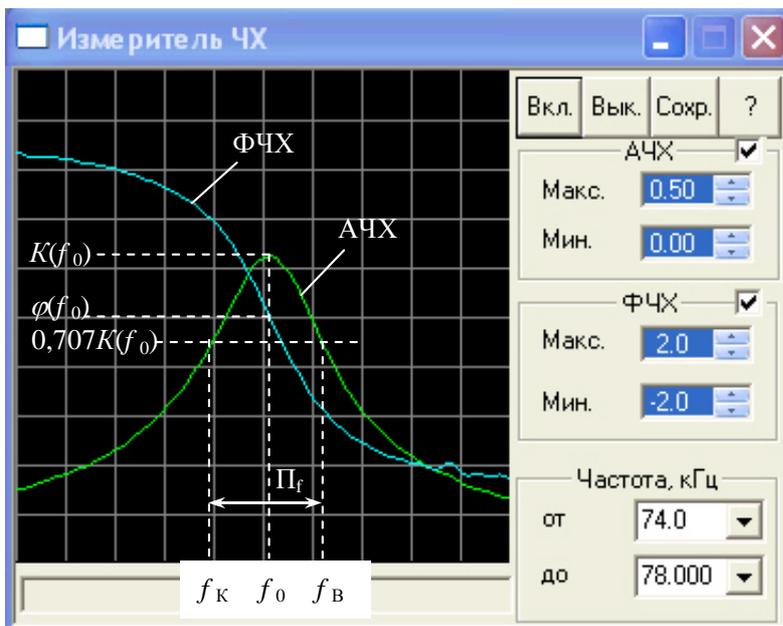


Рис. 7.10. График АЧХ параллельного контура при  $R_{Г} = 295$  кОм

Таблица 7.4

$R_{Г}$ , кОм	$H(f_0)$	$f_p$ , кГц	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц	$\Pi_{f^{\sqrt{2}}}$ , кГц	$\varphi(f_0)^\circ$
97,6	0,58	76,08	75,36	76,76	1,4	0
295	0,315	76,08	75,56	76,48	0,92	0

### Компьютерное моделирование параллельного колебательного контура

Компьютерная часть исследования параллельного колебательного контура выполняется с помощью пакета «Electronics Workbench». Контур не нагружен ( $R_{П} = \infty$ ). Измерения выполняются для двух значений внутреннего сопротивления источника сигнала питающего контур значительно отличающихся друг от друга. Порядок выполнения данной части смотри выше.

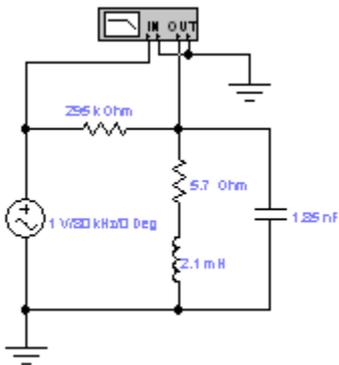


Рис. 7.11. Схема исследуемого параллельного контура

На рис. 7.11 показана исследуемая схема параллельного контура. На рис. 7.12...7.14 показаны, графики АЧХ не нагруженного исследуемого параллельного контура при внутреннем сопротивлении источника, питающего контур  $R_{\Gamma} = 97,6$  кОм. Граничные частоты  $f_H$  и  $f_B$  определены по уровню  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$  от значения АЧХ на частоте резонанса  $H(f_0) = 0,671$  (рис. 7.11). При определении граничных частот,

визирная линия характеристики устанавливается в положение наиболее близкое к  $0,707H(f_0)$ , т.к. установить точно значение АЧХ равное  $0,707H(f_0)$ , не всегда удаётся. Например, в данном случае  $0,707H(f_0) = 0,707 \cdot 0,671 = 0,474$ , а значения АЧХ для определения  $f_H$  и  $f_B$  установлены 0,471 и 0,473 соответственно. На рис. 7.15 показан график ФЧХ исследуемого контура.

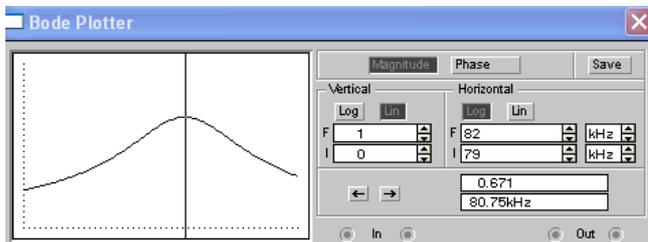


Рис. 7.12. Визирная линия установлена для определения  $f_0$ ,  $R_{\Gamma} = 97,6$  кОм

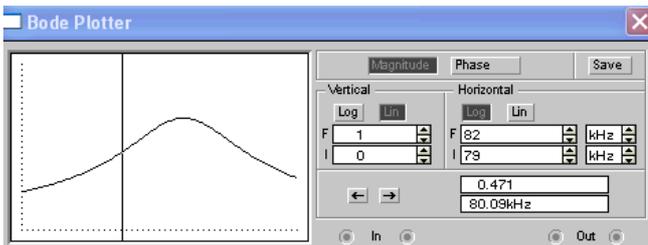


Рис. 7.13. Визирная линия установлена для определения  $f_H$ ,  $R_{\Gamma} = 97,6$  кОм

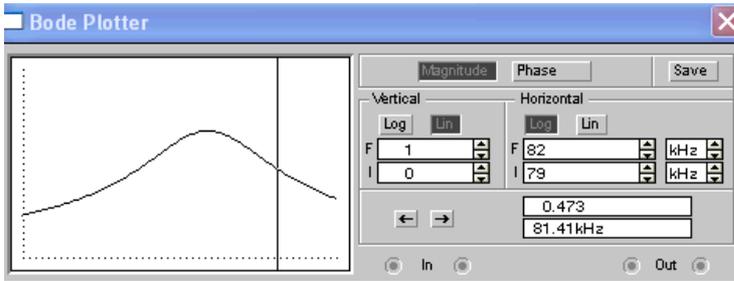


Рис. 7.14. Визирная линия установлена для определения  $f_B$ ,  $R_{\Gamma} = 97,6$  кОм

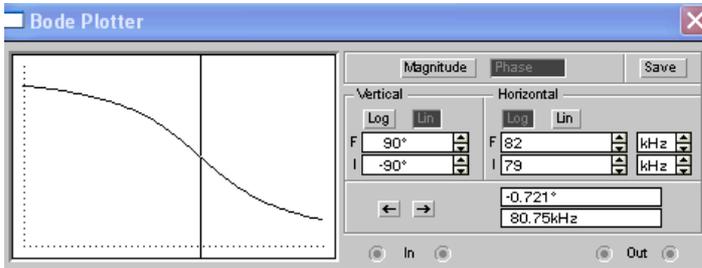


Рис. 7.15. Визирная линия установлена для определения  $\varphi(f_0)$ ,  $R_{\Gamma} = 97,6$  кОм

Аналогично определяются  $f_0$ ,  $f_H$ ,  $f_B$ ,  $\varphi(f_0)$  для внутреннего сопротивления генератора  $R_{\Gamma} = 295$  кОм. Значения полученных параметров контура, сведены в табл. 7.5.

Таблица 7.5

$R_{\Gamma}$ , кОм	$H(f_0)$	$f_0$ , кГц	$f_H$ , кГц	$f_B$ , кГц	$\Pi \sqrt{f}$ , кГц	$\varphi(f_0)^\circ$
97,6	0,671	80,75	80,09	81,41	1,32	-0,721
295	0,403	80,75	80,38	81,11	0,73	-1,307

Для большей наглядности на рис. 7.16 и 7.17 показаны наложенные друг на друга, соответственно, графики АЧХ и ФЧХ для обоих внутренних сопротивлений. Верхняя (1) АЧХ (рис. 7.16) и более пологая (1) ФЧХ (рис. 7.17) соответствуют  $R_{\Gamma} = 97,6$  кОм. Нижняя (2) АЧХ (рис. 7.16) и более крутая (2) ФЧХ (рис. 7.17) соответствуют  $R_{\Gamma} = 295$  кОм.

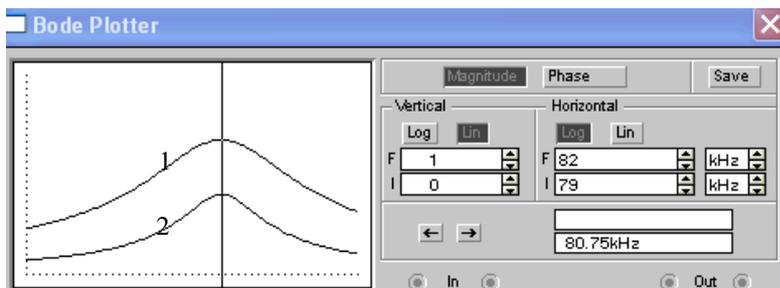


Рис. 7.16. Наложенные графики АЧХ

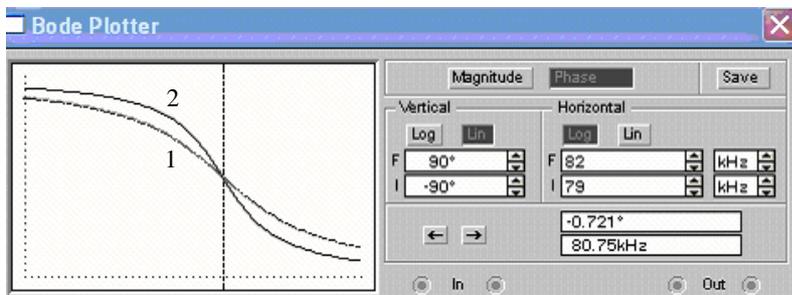


Рис. 7.17. Наложенные графики ФЧХ

### Контрольные вопросы

1. Опишите явление резонанса в параллельном колебательном контуре.
2. Укажите способы, которыми можно установить в контуре режим резонанса.
3. Опишите простейшие схемы, моделирующие реальную катушку индуктивности.
4. Опишите простейшие схемы, моделирующие реальный конденсатор.
5. Перечислите основные параметры параллельного колебательного контура и запишите их формулы.
6. Опишите энергетические процессы в параллельном колебательном контуре.
7. Начертите векторную диаграмму параллельного колебательного контура при резонансе.
8. Перечислите расстройки параллельного колебательного контура и запишите их формулы.

## Лабораторная работа 8. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПИ RC

Цель работы – исследование переходных процессов происходящих в цепи RC при воздействии на неё прямоугольных импульсов.

При подготовке к работе воспользуйтесь конспектом лекций, учебником (Л. 1. стр. 306..322) и ниже расположенной теоретической частью работы.

Работа состоит из расчётной и экспериментальной частей.

### Краткие теоретические сведения

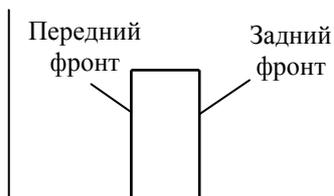


Рис. 8.1. Прямоугольный импульс

Прямоугольный импульс имеет два вертикальных фронта (рис.8.1).

При наступлении переднего фронта конденсатор заряжается. Это эквивалентно включению конденсатора на постоянное напряжение. При наступлении заднего фронта – разряжается.

Любое скачкообразное изменение в электрической цепи, как, например, при воздействии фронтов прямоугольных импульсов, приводящее к нарушению установившегося режима, называется *коммутацией*. Процессы, которые имеют место в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому, называются *переходными*. Длительностью процесса коммутации, как правило, можно пренебречь, т.е. можно считать, что коммутация осуществляется практически мгновенно. Момент времени непосредственно перед коммутацией обозначают через  $t = 0_-$ , а момент времени непосредственно за коммутацией через  $t = 0_+$ . Математика не умеет различать  $t = 0_-$  и  $t = 0_+$ .

Реальная электрическая цепь не может переходить от одного установившегося режима к другому мгновенно (скачком). Скачкообразное

изменение энергии, запасённой в цепи, потребовало бы бесконечно большой мощности источников, а такие источники неизвестны:

$$p = \frac{dw}{dt} = ui = \infty. \quad (8.1)$$

Следовательно, суммарная энергия, запасённая в магнитном и электрическом полях электрической цепи, при переходе цепи из одного состояния в другое, может изменяться только плавно, т.е. представляет собой непрерывную функцию времени. Поскольку энергия, запасённая в цепи, определяется суммарным потокоцеплением всех индуктивных катушек и суммарным зарядом всех конденсаторов, то, следовательно, суммарное потокоцепление и суммарный заряд цепи, также являются непрерывными функциями времени. Это известно как *принцип непрерывности* во времени суммарного потокоцепления и суммарного электрического заряда цепи. В частности можно записать

$$\sum \psi(0_+) = \sum \psi(0_-); \quad \sum q(0_+) = \sum q(0_-). \quad (8.2)$$

Если в процессе коммутации не производится подключения или отключения ветвей, содержащих ёмкости и индуктивности, и не происходит скачкообразного изменения их параметров, то из принципа непрерывности суммарного потокоцепления и суммарного заряда следует непрерывность токов индуктивностей и напряжений на ёмкостях. Вышесказанное формулируется в виде двух законов коммутации.

Первый закон коммутации: в начальный момент времени после коммутации ток в индуктивности сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-), \quad (8.3)$$

а затем плавно изменяется, начиная с этого значения.

Второй закон коммутации: в начальный момент времени после коммутации напряжение на ёмкости сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-), \quad (8.4)$$

а затем плавно изменяется, начиная с этого значения.

Законы коммутации не накладывают ограничений на характер изменений напряжений на индуктивностях, токов в ёмкостях, а также токов и напряжений резистивных сопротивлений. Они могут изменяться произвольно, в том числе и скачкообразно.

Совокупность на момент  $t = 0$  начальных значений токов независимо включённых индуктивностей, и напряжений независимо включённых ёмкостей представляет собой независимые начальные условия. Используя независимые начальные условия и уравнения электрического

равновесия цепи после коммутации, можно найти зависимые начальные условия, т.е. значения токов и напряжений и их производных в момент времени  $t = 0_+$  для любых ветвей.

В момент  $t = 0_+$  начинается переходный процесс и с этого момента:

1. Сопротивления индуктивности и ёмкости резко изменяются.
2. Эквивалентная схема цепи приобретает совершенно другой вид, чем до коммутации.
3. Все законы вынужденных режимов становятся несправедливыми.
4. Цепь начинает подчиняться законам переходных режимов.

Анализ переходных процессов в линейных электрических цепях, в конечном счёте, сводится к решению неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Решение такого уравнения равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного дифференциального уравнения.

Частное решение  $y_{ПР}$  определяет принуждённый режим работы цепи (режим, задаваемый действующими в цепи независимыми источниками энергии).

Общее решение однородного дифференциального уравнения  $y_{СВ}$  определяет свободный режим работы цепи. Свободные процессы протекают за счёт разности энергий соответствующих установившимся режимам работы цепей, до и после коммутации. Характер свободных процессов *не зависит* от вида внешнего воздействия, а определяется *только* топологией цепи и параметрами пассивных элементов и линейно управляемых источников. В результате имеем

$$y = y_{ПР} + y_{СВ} . \quad (8.5)$$

С течением времени переходный процесс затухает

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{СВ} = 0, \text{ тогда } y_{ПР} = \lim_{t \rightarrow \infty} y . \quad (8.6)$$

Последовательность анализа переходных процессов классическим методом

1. Анализ цепи до коммутации.
2. Определение независимых начальных условий.
3. Составление дифференциального уравнения цепи.
4. Определение принуждённой составляющей реакции цепи.
5. Определение свободной составляющей реакции цепи.
6. Суммирование принуждённой и свободной составляющих.
7. Определение постоянных интегрирования.
8. Определение реакции цепи.

## Переходные процессы в цепи $RC$ при наступлении переднего фронта импульса

Наступление переднего фронта импульса эквивалентно подключению цепи  $RC$  на постоянное напряжение. Поэтому обратимся к рис. 8.2. Пусть происходит коммутация (замыкание ключа  $SA$ ) в цепи, показанной на рис. 8.2. Примем, что независимые начальные условия нулевые. Это значит, что напряжение на конденсаторе на момент времени  $t = 0$ , равно нулю. Тока в цепи на момент времени  $t = 0$ , нет, следовательно, и напряжение на резисторе  $R$  тоже равно нулю. После коммутации цепь приобретает вид, показанный на рис. 8.3. В момент непосредственно после коммутации ( $t = 0_+$ ) сопротивление конденсатора и напряжение на нём равны нулю, а в цепи возникает ток  $i = \frac{E}{R}$ . Все напряжение  $E$  в момент  $t = 0_+$  приложено к резистору  $R$ . С течением времени конденсатор заряжается и напряжение на нём возрастает, ток в цепи, а, следовательно, и напряжение на резисторе  $R$  уменьшаются. По окончании переходного процесса (теоретически через бесконечно большое время) напряжение на конденсаторе установится равным ЭДС  $E$ , ток и напряжение сопротивления  $R$  станут равными нулю.

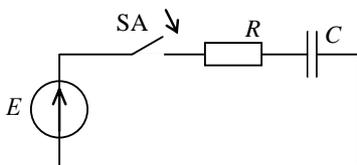


Рис. 8.2. Коммутируемая цепь  $RC$

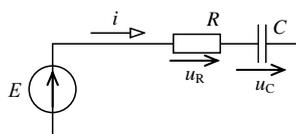


Рис. 8.3. Цепь  $RC$  после коммутации

Единственное независимое начальное условие для данной цепи

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0. \quad (8.7)$$

Для цепи после коммутации можно записать

$$E = u_R + u_C; \quad u_R = Ri; \quad i = i_R = i_C = C \frac{du_C}{dt};$$

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (8.8)$$

Напряжение на ёмкости при  $t \geq 0$  представим в виде суммы принуждённой и свободной составляющих

$$u_C = u_{C_{пр}} + u_{C_{св}} \quad (8.9)$$

Принуждённая составляющая в данном случае равна установившемуся значению, т.е. ЭДС  $E$

$$u_{C_{пр}} = E. \quad (8.10)$$

Характеристическое уравнение цепи

$$RCp + 1 = 0 \quad (8.11)$$

имеет единственный корень

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}, \quad (8.12)$$

где  $\tau$  – постоянная времени последовательной цепи  $RC$ , поэтому свободная составляющая напряжения на ёмкости  $u_{C_{св}}$  содержит один экспоненциальный член

$$u_{C_{св}} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.13)$$

Используя выражения (8.9), (8.10), (8.13), находим напряжение на ёмкости после коммутации

$$u_C = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.14)$$

Для определения постоянной интегрирования воспользуемся независимым начальным условием (8.7). Полагая в (8.14)  $t = 0$ , имеем

$$u_C(0) = 0 = E + A, \text{ откуда } A = -E.$$

Таким образом, напряжение на ёмкости после коммутации при заданных начальных условиях

$$u_C = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}} = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (8.15)$$

Ток в цепи после коммутации

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.16)$$

Напряжение на резисторе  $R$  после коммутации

$$u_R = Ee^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.17)$$

Графики напряжений  $u_C$ ,  $u_R$  и тока  $i$ , даны на рис. 8.4 и 8.5.

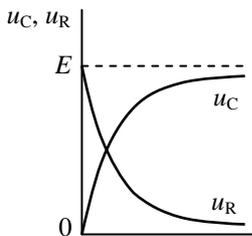


Рис. 8.4. Графики напряжений  $u_C$  и  $u_R$

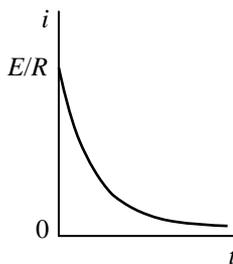


Рис. 8.5. График тока  $i$

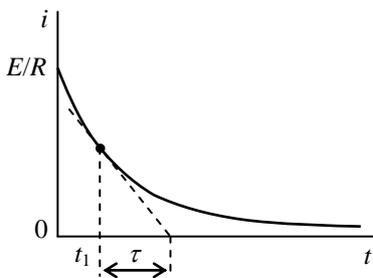


Рис. 8.6. Определение постоянной времени  $\tau$

Можно показать, что постоянная времени данной цепи численно равна длине подкасательной к любой из полученных кривых ( $u_C$ ,  $u_R$ ,  $i$ ) при любом значении  $t \geq 0$ , т.е. длине отрезка временной оси, заключённого между какой-либо точкой  $t = t_1 \geq 0$  и точкой пересечения временной оси с касательной, проведённой к выбранной кривой ( $u_C$ ,  $u_R$ ,  $i$ ) в точке  $t_1$  (рис. 8.6).

Для определения постоянной времени цепи, касательную к выбранной кривой наиболее удобно проводить при  $t_1 = 0$ . В этом случае она пересекает ось времени в точке  $t = \tau$ .

Наступление заднего фронта импульса эквивалентно короткому замыканию цепи  $RC$  при заряженном конденсаторе. Поэтому обратимся к рис. 8.7. В этом случае постоянная времени цепи  $RC$  остаётся прежней. Независимым начальным условием является напряжение на конденсаторе  $u_C(0) = U_C$ .

Учитывая сказанное выше, запишем

$$u_C = U_C e^{-\frac{t}{\tau}}; i_C = -\frac{U_C}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}; u_R = -U_C e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.18)$$

Графики полученных выражений показаны на рис. 8.8 и 8.9.

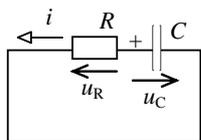


Рис. 8.7. Короткое замыкание цепи RC

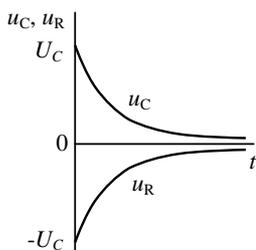


Рис. 8.8. Графики напряжений  $u_C$  и  $u_R$

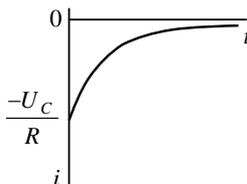


Рис. 8.9. График тока  $i$

График напряжения на ёмкости при её заряде под воздействием импульса до напряжения  $E$ , и последующем разряде, представлен на рис. 8.10.

Для случая, когда постоянная времени такова, что конденсатор не успевает зарядиться до напряжения  $E$ , график напряжения на ёмкости показан на рис. 8.11.

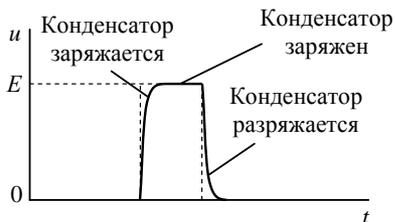


Рис. 8.10. График напряжения на ёмкости для случая, когда конденсатор успевает зарядиться до напряжения  $E$

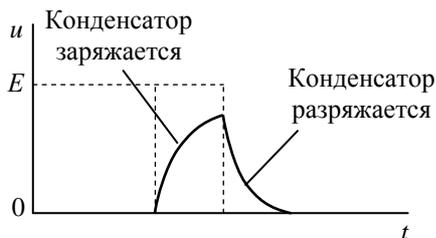


Рис. 8.11. График напряжения на ёмкости для случая, когда конденсатор не успевает зарядиться до напряжения  $E$

### Задание

Задание состоит из расчётной, экспериментальной частей и компьютерного моделирования исследуемой электрической цепи.

Экспериментальная часть выполняется на стенде «Сигнал-USB». Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*». Варианты заданий даны в табл. 8.1.

Таблица 8.1

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$U_m, В$	6	7	8	1	2	3	4	5
$R, кОм$	1	2	3	5	10	20	47	51
$C, нФ$	51	47	33	20	10	5	3	2

Продолжение табл. 8.1

№	9	10	11	12	13	14	15	16
$U_m, В$	2	3	4	5	6	7	8	1
$R, кОм$	1	2	3	5	10	20	47	51
$C, нФ$	100	51	47	33	20	10	5	3

Продолжение табл. 8.1

№	17	18	19	20	21	22	23	24
$U_m, В$	3	4	5	6	7	8	1	2
$R, кОм$	1	2	3	5	10	20	47	51
$C, нФ$	47	33	20	10	5	3	2	1

Продолжение табл. 8.1

№	25	26	27	28	29	30	31	32
$U_m, В$	4	5	6	7	8	1	2	3
$R, кОм$	1	2	3	5	10	20	47	51
$C, нФ$	33	20	10	5	3	2	1	5

№	33	34	35	36	37	38	39	40
$U_m, В$	5	6	7	8	1	2	3	4
$R, кОм$	1	2	3	5	10	20	47	51
$C, нФ$	20	10	5	3	2	1	5	10

### Расчётная часть

1. Рассчитайте постоянную времени цепи  $\tau$  и приблизительное время затухания переходного процесса.
2. Рассчитайте напряжение на конденсаторе по прошествии времени равного  $\tau$  с момента начала импульса.
3. Подберите из номинальных значений сопротивлений  $R$  и ёмкостей  $C$  такие, чтобы постоянная времени  $\tau$  возросла приблизительно в два раза и выполните пункт 2.

### Экспериментальная часть

Реальная экспериментальная часть выполняется на стенде «Сигнал – USB». Перед выполнением экспериментальной части необходимо ознакомиться с подготовкой к работе стенда «Сигнал – USB» и порядком работы на нём.

1. Соберите на наборной плате схему, показанную на рис. 8.12.

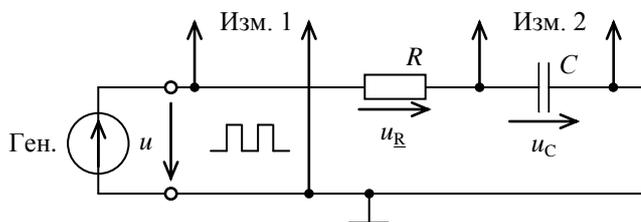


Рис. 8.12. Схема для исследования цепи RC

2. Установите у генератора форму сигнала «прямоугольный импульс» и настройте генератор и осциллограф для получения осциллограммы, пригодной для определения постоянной времени  $\tau$  и приблизительного времени затухания переходного процесса.
3. Определите по осциллограмме постоянную времени  $\tau$  и приблизительное время затухания переходного процесса.

4. Проверьте выполнение пункта 2 расчётной части.
5. Увеличьте постоянную времени  $\tau$  приблизительно в два раза и выполните пункты 2 и 3. Настройки осциллографа при этом не изменять!
6. Поменяйте местами резистор  $R$  и конденсатор  $C$  и выполните пункты 2 и 3 для тех же двух постоянных времени  $\tau$ .
7. По полученным результатам сделайте и внесите в отчёт выводы.

### Компьютерное моделирование переходных процессов в цепи $RC$

Компьютерное моделирование выполняется с использованием пакета «*Electronics Workbench*».

1. Соберите на экране монитора исследуемую электрическую цепь с заданными параметрами элементов.
2. Установите у генератора форму сигнала «прямоугольный импульс» и настройте генератор и осциллограф для получения осциллограммы, пригодной для определения постоянной времени  $\tau$  и приблизительного времени затухания переходного процесса.
3. Определите по осциллограмме постоянную времени  $\tau$  и приблизительное время затухания переходного процесса.
4. Проверьте выполнение пункта 2 расчётной части.
5. Увеличьте постоянную времени  $\tau$  приблизительно в два раза и выполните пункты 2 и 3. Настройки осциллографа при этом не изменять!
6. Поменяйте местами резистор  $R$  и конденсатор  $C$  и выполните пункты 2 и 3 для тех же двух постоянных времени  $\tau$ .
7. По полученным результатам сделайте и внесите в отчёт выводы.
8. По всей проделанной работе сделайте и запишите в отчет выводы.

### Пример выполнения задания

Пусть дано

Вариант	$U_m, В$	$R, кОм$	$C, мФ$
41	2	5,1	33

### Расчётные данные

Постоянная времени цепи  $RC$

$$\tau = RC = 10000 \cdot 0,000000033 = 0,00033 \text{ с} = 330 \text{ мкс.}$$

Приблизительное время затухания переходного процесса

$$\tau_{\text{зат}} = 5\tau = 5 \cdot 33 = 1650 \text{ мкс.}$$

Напряжение по прошествии времени  $\tau$

$$u_C|_{t=\tau} = U_m (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 2(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = 1,264 \text{ В.}$$

### Экспериментальная часть

Установки генератора и осциллограммы для схемы рис. 8.12 показаны на рис. 8.13 и 8.14.

При определении постоянной времени  $\tau$  и времени затухания переходного процесса  $t_{\text{зат}}$  учтём, что значения величин получаемые с помощью осциллографа довольно приблизительны.

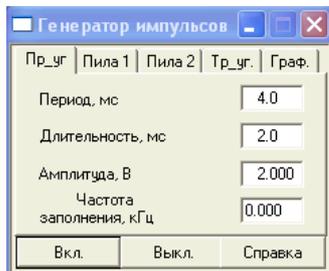


Рис. 8.13. Установки генератора

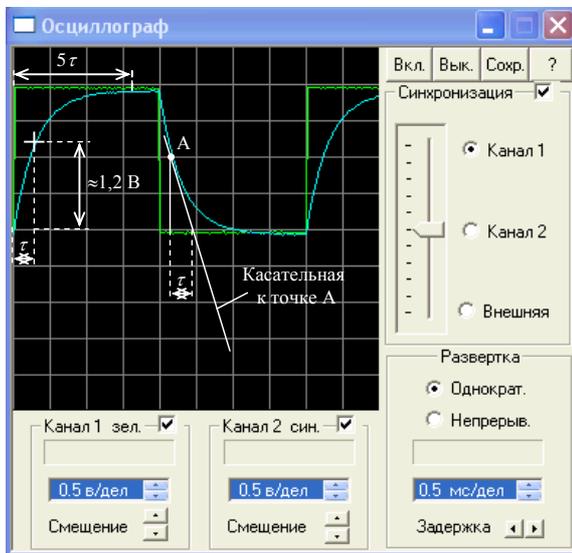


Рис. 8.14. Осциллограмма переходных процессов

Согласно построениям показанным на рис. 8.14, постоянная времени приблизительно равна расчётной  $\tau \approx 330$  мкс, а напряжение по прошествии времени равного  $\tau$ , тоже приблизительно равно расчётному  $u_C|_{t=\tau} \approx 1,264$  В. Переходный процесс по прошествии времени равного  $5\tau$  практически затух – напряжение на конденсаторе практически сравнялось с входным напряжением.

Аналогично выполнить измерения для увеличенной в два раза постоянной времени.

Поменяйте местами в схеме сопротивление  $R$  и ёмкость  $C$  и повторите измерения.

### Компьютерное моделирование переходных процессов в цепи $RC$

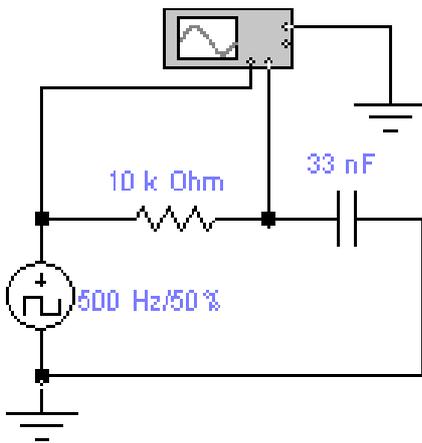


Рис. 8.15. Схема для исследования переходных процессов

На рис. 8.15 показана собранная на экране монитора схема  $RC$ -цепи с подключённым генератором прямоугольных импульсов. На схеме установлены значения частоты и длительности импульсов удобные для исследования переходных процессов при сопротивлении  $R = 10$  кОм и ёмкости  $33$  нФ. На рис. 8.16 показаны осциллограммы напряжения генератора  $u$  и напряжения на конденсаторе  $u_C$ . Построения для определения величин, указанных в расчётной части, точно такие же, как в экспериментальной части и здесь не приводятся. Но в отчёте они необходимы.

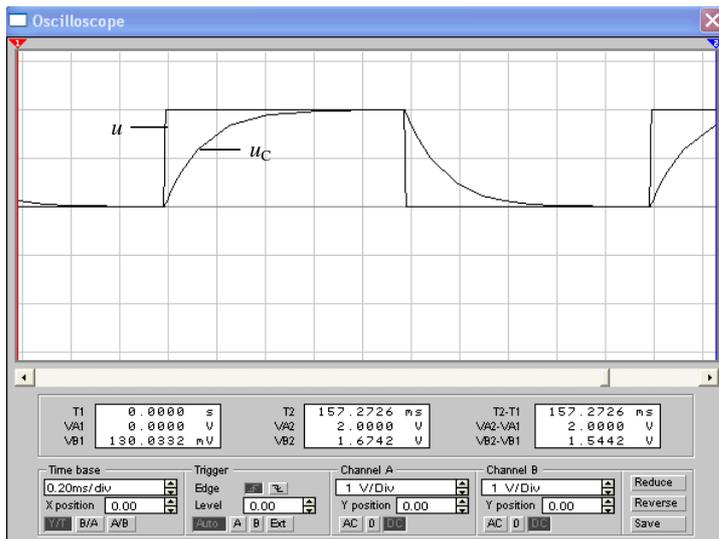


Рис. 8.16. Осциллограммы входного  $u$  и выходного  $u_C$  напряжений цепи  $RC$

Аналогично исследуйте переходные процессы при увеличенной вдвое постоянной времени  $\tau$ .

Поменяйте в схеме местами сопротивление  $R$  и ёмкость  $C$  и повторите измерения.

### Контрольные вопросы

1. Поясните понятия коммутация, «переходный процесс».
2. Поясните, что следует понимать под терминами независимые и зависимые начальные условия.
3. Поясните, почему суммарное потокосцепление и суммарный электрический заряд цепи не могут изменяться скачком (*принцип непрерывности* во времени).
4. Первый и второй законы коммутации.
5. Укажите последовательность анализа переходных процессов классическим методом.
6. Поясните понятия «постоянная времени» и «время затухания переходного процесса».
7. Принуждённая и свободная составляющие напряжения на ёмкости, а также принуждённая и свободная составляющие тока и напряжения на резистивном сопротивлении.
8. Выведите формулу переходного напряжения на резистивном сопротивлении.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов, В. П. Основы теории цепей учебник для студентов вузов / В.П. Попов. – 6-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2007. – 575 с. Ил.
2. Фриск, В.В. Основы теории цепей: лабораторный практикум на персональном компьютере / В.В. Фриск. – М.: СОЛОН-Пресс, 2002. – 192 с. – (Библиотека студента).
3. Основы теоретической электротехники: учебное пособие для студ. вузов / Ю.А. Бычков, В.М. Золотницкий, Э.П. Чернышов, А.Н. Белянин. – СПб.: Лань, 2008. – 592 с.: ил. – (Учебники для вузов, специальная литература).
4. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение «Солон-Р» Москва 2000.
5. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л.А. Бессонов. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 1999. – 638 с.: ил.
6. Лабораторный практикум по основам теории цепей: учебное пособие для вузов по спец. «Радиотехника». – М.: Высшая школа, 1986. – 192 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
Лабораторная работа 1. ЗАКОНЫ КИРХГОФА .....	5
Лабораторная работа 2. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ.....	15
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ 3 и 4 .....	27
Лабораторная работа 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ $RC$ .....	38
Лабораторная работа 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ $RLC$ .....	52
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 5 .....	63
Лабораторная работа 5 ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ $RC$ .....	71
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ 6 и 7 .....	85
Лабораторная работа 6 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА .....	97
Лабораторная работа 7. ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА .....	117
Лабораторная работа 8. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПИ $RC$ .....	133
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	146

Учебное издание

**Останин** Борис Павлович

## **ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ**

Учебно-практическое пособие

В авторской редакции  
Компьютерная верстка М.А. Портновой

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 03816 от 22.01.2001

Подписано в печать 05.07.10. Формат 60×84/16.  
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,6.  
Уч.-изд. л. 7,8. Тираж 50 экз. Заказ

---

Издательство Владивостокский государственный университет  
экономики и сервиса  
690600, Владивосток, ул. Гоголя, 41  
Отпечатано: множительный участок ВГУЭС  
690600, Владивосток, ул. Державина, 57